Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ady Cambraia Junior

Envelope de Planos Médios

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Janeiro 2015

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ady Cambraia Junior

Envelope de Planos Médios

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Carlos Diosdado Espinoza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Luis Florial Espinoza Sanchez
Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos

Prof. Marcelo José Saia
Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Ralph Costa Teixeira
Universidade Federal Fluminense

Prof. Simone Maria de Moraes
Universidade Federal da Bahia

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador do Centro Técnico Científico
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 23 de janeiro de 2015

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ady Cambraia Junior

Possui graduação, licenciatura e bacharelado, no curso de matemática pela Universidade Federal de Viçosa-MG (2007), mestrado em matemática, na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2009). Atualmente é professor Assistente Nível II do departamento de matemática da Universidade Federal de Viçosa-MG.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Ficha Catalográfica

Cambraia Junior, Ady

Envelope de Planos Médios / Ady Cambraia Junior; orientador: Marcos Craizer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2015.

v., 75 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese 2. Retas Médias; 3. Planos Médios; 4. Curvas Médias; 5. Plano de Transon; 6. Quádrica de Moutard; 7. Cone de B. Su; 8. $AESS$; 9. $MPTS$. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 000

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Aos meus pais Ady Cambraia e Cecília dos Santos Cambraia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado inteligência e forças para conseguir vencer mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, Ady e Cecília, pelo incentivo incondicional em todos os momentos.

À minha esposa Thaís, que compartilhou todos os momentos sempre de perto, fossem eles difíceis ou não. Obrigado pela companhia, compreensão e confiança de sempre.

A todos os professores que contribuíram para esta vitória, em especial ao professor e orientador Marcos, por seus ensinamentos, conselhos e por sua brilhante orientação.

Aos amigos Sérgio, Carlos e Abgail, por terem aberto a porta de suas casas nos momentos em que mais precisava.

Aos amigos Antônio e Átila pela companhia sempre bem humorada nos momentos de descontração no Rio de Janeiro: corridas na orla, jogos do flamengo, do goitacaz, sinucas, 4 e 60, etc.

Aos colegas da PUC-Rio, de modo especial ao Alessandro e ao Otávio, que sempre estiveram dispostos a ajudar.

Aos funcionários da PUC-Rio, especialmente a Creuza, por todo carinho e atenção.

À Universidade Federal de Viçosa-MG -UFV e ao departamento de matemática da UFV, os quais apoiaram e depositaram confiança ao me liberar das atividades de docente para concluir o doutorado.

E a todos aqueles que de certa forma contribuíram para esta formação.

Meus sinceros agradecimentos a todos. Um grande abraço!

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Resumo

Cambraia Junior, Ady; Craizer, Marcos. **Envelope de Planos Médios**. Rio de Janeiro, 2015. 75p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O Envelope de Retas Médias - ERM consiste da união de três conjuntos invariantes afins: o Affine Envelope Symmetry Set - $AESS$; o Mid-Parallel Tangents Locus - $MPTL$; e a Evoluta Afim - EA. O ERM de curvas planas convexas é um assunto que tem sido muito explorado. Porém, não existe na literatura nenhum estudo do ERM para superfícies. Por isso, o objetivo principal desta tese é generalizar o ERM de curvas convexas para superfícies convexas. Para tanto, dividimos a tese em duas partes. A primeira consiste de uma revisão sobre a geometria afim de curvas planas e do estudo do ERM com uma nova abordagem. Na segunda parte realizamos uma breve introdução da geometria afim de hipersuperfícies e a generalização do ERM. Na generalização do ERM, trabalhamos com superfícies, definimos os planos médios e estudamos o que denominamos Envelope de Planos Médios -EPM. Provamos que, o EPM assim como o ERM, é formado por três conjuntos invariantes afins: a Superfície de Centros de $3+3$-Cônicas - $SC3C$; o Mid-Parallel Tangents Surface -$MPTS$; e a Evoluta de Curvas Médias - ECM.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Palavras–chave

Retas Médias; Planos Médios; Curvas Médias; Plano de Transon; Quádrica de Moutard; Cone de B. Su; $AESS$; $MPTS$.

Abstract

Cambraia Junior, Ady; Craizer, Marcos (Advisor) . **Envelope of Mid-Planes**. Rio de Janeiro, 2015. 75p. Ph.D. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Envelope of Mid-Lines - EML consists of the union of three affine invariant sets: the Affine Envelope Symmetry Set - $AESS$; the Mid-Parallel Tangents Locus - $MPTL$; and the Affine Evolute. The EML of convex planar curves is a subject that has been very explored. However, there is no study in the literature of the EML for surfaces. Therefore, the main objective of this thesis is to generalize the EML of convex curves to convex surfaces. We divide the writing into two parts. The first part consists of a study of the EML with a new approach. In the second part we consider the EML for surfaces, that we call Envelope of Mid-Planes - EMP. We prove that, the EMP, like the EML, is formed by three affine invariant sets: the Centers of $3+3$-Conics Surface - $C3CS$; the Mid-Parallel Tangents Surface -$MPTS$; and the Medial Curves Evolute - MCE.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Keywords

Mid Lines; Mid Planes; Medial Curves; Transon Plane; Moutard's Quadric; Cone of B. Su; $AESS$; $MPTS$.

Sumário

1 Introdução **11**

I Envelope de Retas Médias **13**

2 Revisão: geometria afim de curvas planas **14**

3 Envelope de Retas Médias - ERM **19**
3.1 Retas tangentes paralelas 30
3.2 Comportamento local do $MPTL \cup AESS$ 33

II Envelope de Planos Médios **35**

4 Revisão: geometria afim de hipersuperfícies **36**

5 Envelope de Planos Médios - EPM **42**
5.1 Superfície de Centros de $3+3$-Cônicas 42

6 EPM : planos tangentes paralelos não coincidentes **55**
6.1 Planos tangentes paralelos não coincidentes 55

7 Envelope dos Planos Médios: planos tangentes coincidentes **61**

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Lista de Figuras

2.1 Curvatura afim de seções cônicas 16

3.1 Envelope de círculos unitários 19
3.2 Envelope de normais à parábola (evoluta) 20
3.3 Reta Média 21
3.4 $AESS$ como um segmento de reta 27
3.5 Comportamento local do $AESS \cup MPTL$ 32

4.1 O normal afim ao gráfico de $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ em qualquer ponto aponta para cima. 39

5.1 A geometria da $SC3C$ 45
5.2 A condição de suavidade para $\pi_2(H^{-1}(0))$ é que o tangente não seja vertical. 53

6.1 Comportamento do $MPTS$ na vizinhança do centro de uma $3+3$ cônica 60

7.1 O plano de Transon da tangente T contém a normal afim de qualquer seção planar que contém T 62
7.2 A curva média tem normal afim na direção do cone de B.Su 63
7.3 O plano tangente à Evoluta de Curvas Médias é o plano de Transon 74

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Lista de Símbolos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$AESS$ Affine Envelope Symmetry Set

EA Evoluta Afim

ECM Evoluta de Curvas Médias

EPM Envelope de Planos Médios

ERM Envelope de Retas Médias

$MPTL$ Mid-Parallel Tangents Locus

$MPTS$ Mid-Parallel Tangents Surface

$SC3C$ Superfície de Centros de $3+3$-Cônicas

1
Introdução

O envelope de retas médias - ERM de curvas planas convexas é um assunto que tem sido muito explorado. Ele consiste da união dos seguintes conjuntos invariantes afins: o Affine Envelope Symmetry Set - $AESS$, o Mid-Parallel Tangents Locus - $MPTL$ e a Evoluta Afim - EA [1], [2], [3], [4]. Na literatura muitas vezes o termo envelope também é traduzido como envoltória ou envolvente.

O $AESS$ é o fecho do lugar geométrico dos centros de cônicas que fazem um contato de pelo menos ordem 3 com a curva em no mínimo dois pontos distintos. Este conjunto ocorre no ERM ao considerar pontos na curva que possuem retas tangentes concorrentes.

Uma propriedade importante para construir o $AESS$ é saber quando os pontos na curva estão relacionados, ou seja, qual é a condição para que exista uma cônica tendo um contato de ordem 3 com no mínimo dois pontos da curva [2], [3]. Uma vez estabelecida a condição para existência da cônica, pode-se determinar seu centro, e portanto o ponto do $AESS$. Portanto foi possível estudar a suavidade do conjunto, as singularidades, etc. Outra propriedade interessante deste conjunto de simetria afim é: se o $AESS$ para dois arcos de uma curva convexa γ é um segmento de reta, então existe uma reflexão afim que leva um arco no outro.

O $MPTL$ é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que ligam pontos que possuem retas tangentes paralelas. Este conjunto é singular no centro de uma $3+3$ cônica, e esta singularidade trata-se de uma cúspide ordinária. Como o $AESS$ apresenta cúspides nos pontos onde as retas são paralelas, segue que, o $MPTL$ e o $AESS$ se encontram em cúspides [3].

Por fim, o último conjunto pertencente ao ERM é a Evoluta Afim - EA. A EA é o lugar geométrico dos centros de cônicas osculadoras e ocorre quando as tangentes são coincidentes. Neste caso a reta média coincide com a reta normal afim.

Neste trabalho de tese, fizemos uma generalização do ERM de curvas planas convexas para superfícies convexas. Mais precisamente, estudamos o que chamamos de Envelope de Planos Médios -EPM.

Provamos que o EPM, assim como o ERM, é formado por três conjuntos invariantes afins: a Superfície de Centros de $3+3$-Cônicas - $SC3C$, o Mid-Parallel Tangents Surface - $MPTS$ e a Evoluta de Curvas Médias - ECM. Os conjuntos $SC3C$ e ECM foram apresentados pela primeira vez neste trabalho, enquanto o $MPTS$ já havia sido estudado [1].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

A $SC3C$ é o fecho do lugar geométrico dos centros de cônicas que fazem um contato de pelo menos ordem 3 com a superfície em no mínimo dois pontos distintos. Esse contato ocorre em direções ortogonais, na métrica de Blaschke, a interseção dos planos tangentes. A $SC3C$ ocorre no EPM quando os planos tangentes não são paralelos.

Para construir a $SC3C$ precisamos verificar sob que condições os pontos da superfície estão relacionados. Verificamos que, no caso de superfícies, existem duas condições, como pode ser observado na proposição 5.6. Ainda nesta proposição apresentamos o centro da cônica. Em seguida, estudamos condições de suavidade para a $SC3C$.

Apesar da $SC3C$ ser a generalização do $AESS$, nem sempre estes conjuntos possuem propriedades semelhantes. Vimos anteriormente que se o $AESS$ de um par de curvas é um segmento de reta, então as curvas são simétricas afins. Esta propriedade não ocorre com a $SC3C$, ou seja, se a $SC3C$ de um par de superfícies é um pedaço de plano, então não necessariamente existe uma reflexão afim que leva uma superfície na outra.

O $MPTS$ é formado por centros de cordas que ligam pontos que possuem planos tangentes paralelos e não coincidentes. Assim como no caso de curvas existe uma relação entre o $AESS$ e o $MPTL$, no caso de superfícies o $MPTS$ e a $SC3C$ também se relacionam. Provamos que, nos pontos da $SC3C$ o $MPTS$ é singular, e que esta singularidade, genericamente, trata-se de uma aresta cuspidal.

Na tentativa de resolver o EPM no limite, ou seja, quando fazemos um ponto tender ao outro, conseguimos relacionar o nosso estudo com tópicos clássicos da geometria diferencial afim, como por exemplo, plano de Transon, quádrica de Moutard, cone de B. Su, etc.

Provamos que, no limite, o plano médio é o plano de Transon de uma tangente, e que o EPM consiste de uma superfície formada por centros de quádricas de Moutard. Superfície esta que é constituída por no máximo seis componentes conexas e que denominamos Evoluta de Curvas Médias -ECM.

A ECM, foi assim denominada, porque os centros das quádricas de Moutard podem ser encontrados ao determinar o ponto focal de curvas que chamamos de curvas médias. Encerramos o trabalho com o teorema 7.19, no qual apresentamos condições para que a ECM seja suave.

Este trabalho de tese abre caminhos para trabalhos futuros, como por exemplo: estudar as singularidades dos conjuntos $SC3C$ e ECM; estudar o comportamento local do $MPTS \cup SC3C$; estudar relações entre estes conjuntos; dentre outros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Parte I

Envelope de Retas Médias

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

2
Revisão: geometria afim de curvas planas

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos da geometria diferencial afim de curvas suaves planas, [5]. A ideia básica desta área da geometria é definir uma nova parametrização que seja um invariante afim. No que segue, explicitaremos como construir este novo parâmetro.

Seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva planar parametrizada por um parâmetro qualquer t.

Seja s uma reparametrização de γ, ou seja, $\gamma(s) = \gamma(s(t))$ tal que

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1, \tag{2.1}$$

onde $[,]$ é a notação que usaremos para determinantes.

Quando uma curva satisfaz a equação 2.1 dizemos que está parametrizada pelo comprimento de arco afim.

Os vetores γ_s e γ_{ss} são o tangente afim e o normal afim, respectivamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Observação 2.1 (Interpretação geométrica do normal afim)

Se traçarmos a tangente em um ponto da curva e cordas paralelas a esta tangente, o lugar geométrico dos pontos médios dessas cordas corresponde a uma curva central. A tangente a esta curva central coincide com o normal afim da curva dada. Note que esta construção é invariante afim, pois paralelismo e pontos médios são invariantes por transformações afins.

A relação entre os parâmetros s e t pode ser verificada abaixo:

$$[\gamma_t, \gamma_{tt}] = \left[\gamma_s s_t, \gamma_{ss}(s_t)^2 + \gamma_s s_{tt}\right] = s_t^3[\gamma_s, \gamma_{ss}] = s_t^3.$$

Logo,

$$\frac{ds}{dt} = [\gamma_t, \gamma_{tt}]^{\frac{1}{3}}.$$

Observação 2.2 *Observe que se v é o comprimento de arco euclideano, então a relação anterior nos diz que:*

$$\frac{ds}{dv} = [\gamma_v, \gamma_{vv}]^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \frac{ds}{dv} = \left[\begin{array}{cc} \vec{t} & \kappa\vec{n} \end{array}\right]^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \frac{ds}{dv} = \kappa^{\frac{1}{3}},$$

onde κ é a curvatura euclideana da curva γ, $\vec{t}$ e $\vec{n}$ são o tangente e o normal euclideanos unitários. Daí,

$$\frac{d}{dv}\gamma(s(v)) = \frac{d\gamma}{ds}\frac{ds}{dv} \longrightarrow \gamma_s = \kappa^{-\frac{1}{3}}\vec{t}.$$

Isto significa que duas curvas com a mesma tangente afim também têm o mesmo tangente euclideano e a mesma curvatura, ou seja, estas curvas possuem 3-pontos de contato (veja definição 2.3). Esta propriedade aparecerá na definição do envelope das retas médias na seção subsequente.

Definição 2.3 *Sejam $\gamma(t)$ uma curva parametrizada e seja $F(x,y)=0$ uma outra curva. Considere a curva,*

$$g(t) = F \circ \gamma(t),$$

Dizemos que γ e $F(x,y)=0$ têm $k+1$-contato em t_0 (ou contato de ordem k) se e só se

$$g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0 \quad e \quad g^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

Ao derivar a condição do parâmetro de comprimento de arco afim s, $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, com relação a s, obtemos:

$$[\gamma_s, \gamma_{sss}] = 0 \Rightarrow \gamma_{sss} + \mu(s)\gamma_s = 0.$$

A função $\mu(s)$ é a **curvatura afim** e é o mais simples invariante diferencial não-trivial que define γ a menos de uma transformação afim. Note que:

$$[\gamma_s, \gamma_{sss}] = 0 \Rightarrow \gamma_{sss} = -\mu(s)\gamma_s,$$

logo podemos concluir que:

$$\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}].$$

Exemplo 2.4 *(a) Considere a parábola $\gamma(s) = \left(-\frac{s}{2}, 1-s^2\right)$.*

A curvatura euclideana desta curva é dada por

$$\kappa(s) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{(1+16s^2)^3}} \neq 0$$

Note que:

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1,$$

logo a curva esta parametrizada pelo comprimento de arco afim s. Daí, a curvatura afim é dada por

$$\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

(b) Considere a elipse parametrizada por $\gamma(s) = \left(\frac{1}{3}\cos(s), 3\sin(s)\right)$.

Note que

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1,$$

logo s é o parâmetro de comprimento de arco afim.

Assim, a curvatura afim desta elipse é:

$$\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\cos(s) & \frac{1}{3}\sin(s) \\ -3\sin(s) & -3\cos(s) \end{vmatrix} = 1.$$

(c) No caso da hipérbole $\gamma(s) = (\sinh(s), \cosh(s))$.

Note que

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$$

A curvatura afim será

$$\begin{aligned} \mu(s) &= [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] \\ &= \begin{vmatrix} \sinh(s) & \cosh(s) \\ \cosh(s) & \sinh(s) \end{vmatrix}. \\ &= -1 \end{aligned}$$

Estes exemplos nos motiva a enunciar o seguinte resultado, que caracteriza as curvas planas de curvatura afim constante.

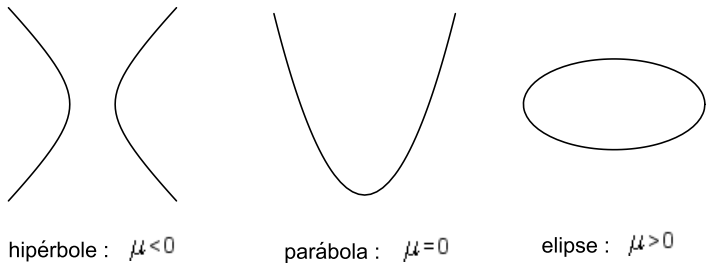


Figura 2.1: Curvatura afim de seções cônicas

Teorema 2.5 *Curvas possuem curvatura afim constante se, e somente se, elas são seções cônicas.*

Demonstração: [5]. ■

Geralmente, a curva está parametrizada por um parâmetro t qualquer, neste caso podemos explicitar os invariantes afins desta curva. O próximo resultado fornece uma expressão para o normal afim de uma curva não parametrizada pelo comprimento de arco afim:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Proposição 2.6 ([4]) *Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro qualquer t. O normal afim $\xi(t)$ é dado por:*

$$\xi(t) = \kappa^{-\frac{2}{3}}\gamma_{tt} - \frac{1}{3}\kappa_t\kappa^{-\frac{5}{3}}\gamma_t,$$

onde $\kappa = [\gamma_t, \gamma_{tt}]$.

Exemplo 2.7 *Para uma curva suave $\gamma(t) = (t, f(t))$, tem se que:*

$$\gamma_t(t) = (1, f'(t)), \gamma_{tt}(t) = (0, f''(t)), \kappa(t) = f''(t), \kappa_t(t) = f'''(t).$$

Logo, o normal afim a γ em $\gamma(t)$ é:

$$\gamma_{ss}(t) = \left(-\frac{1}{3}(f''(t))^{-\frac{5}{3}} f'''(t), (f''(t))\frac{1}{3} - \frac{1}{3}f'(t)(f''(t))^{-\frac{5}{3}} f'''(t) \right)$$

A curvatura afim de uma curva plana γ parametrizada por um parâmetro qualquer é dada no próximo resultado:

Proposição 2.8 ([4]) *Seja γ uma curva plana suave sem pontos de inflexão parametrizada por um parâmetro arbitrário t. Escrevendo $\kappa = [\gamma_t, \gamma_{tt}]$ podemos concluir que a curvatura afim é dada por:*

$$\mu = \frac{1}{9}\left(3\kappa\kappa_{tt} - 5\kappa_t^2 + 9\kappa[\gamma_{tt}, \gamma_{ttt}]\right)\kappa^{-\frac{8}{3}}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Seja s o parâmetro comprimento de arco afim da curva γ. Sabemos que $s_t = \kappa^{\frac{1}{3}}$ e $\gamma_s = \gamma_t\kappa^{-\frac{1}{3}}$. Agora, calcule γ_{ss}, γ_{sss} e use o fato de que $\kappa_t = [\gamma_t, \gamma_{ttt}]$ para simplificar $\mu = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}]$. ■

Considere uma curva plana na forma de Monge sem pontos de inflexão euclideanos perto da origem, ou seja,

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}a_2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a_kt^k + g(t)t^{k+1}\right),$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$ e g é uma função suave. Usando o teorema anterior, a curvatura afim de γ em $\gamma(0)$ é

$$\mu(0) = \frac{3a_2a_4 - 5a_3^2}{9a_2^{\frac{8}{3}}}$$

Isto significa que a função curvatura afim é um invariante diferencial afim de ordem 4 da curva plana γ.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Já o normal afim, é um invariante afim de ordem 3 dado por:

$$\gamma_{ss}(0) = a_2^{-\frac{5}{3}} \left(-\frac{a_3}{3}, a_2^2 \right).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

3
Envelope de Retas Médias - ERM

O ERM já foi estudado por [4], [1], [2], [3]. Nestes trabalhos a equação da reta média está escrita de uma forma difícil de generalizar para o caso de superfícies. Por isso, vamos apresentar os mesmos resultados com uma outra abordagem.

Antes de iniciarmos o estudo do ERM, vamos relembrar a definição do que vem a ser o envelope de uma família:

Definição 3.1 *O envelope, ou discriminante, de uma família*

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$$

de n parâmetros, é o conjunto:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid \exists\ u \in \mathbb{R}^n,\ F(u,x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u,x) = 0, i = 1, \cdots, n \right\}.$$

Exemplo 3.1 *Considere a família a um parâmetro dada por* $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1$. *Observe que, quando* $F = 0$, *para cada* t *temos um círculo unitário centrado sobre o eixo* x_1. *O envelope desta família de círculos é dada por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0, -2(x_1 - t) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t, x_2 = \pm 1\}. \end{aligned}$$

Logo, o envelope dos círculos unitários centrados sobre o eixo x_1 *consiste do par de retas* $x_2 = \pm 1$.

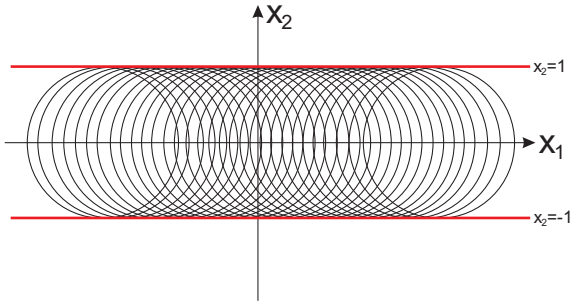


Figura 3.1: Envelope de círculos unitários

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Sabe-se que a evoluta de uma curva plana é formada pela interseção de retas normais infinitesimalmente próximas. O próximo exemplo elucida este fato no caso em que a curva é uma parábola:

Exemplo 3.2 *A família* $F(t, x_1, x_2) = -x_1 + t(1 - 2x_2) + 2t^3$ *formada por normais à parábola* $x_2 = x_1^2$ *tem como envelope:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + t(1 - 2x_2) + 2t^3 = 0,\ 1 - 2x_2 + 6t^2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(1 - 2x_2)^3 = -27x_1^2\}\,.\end{aligned}$$

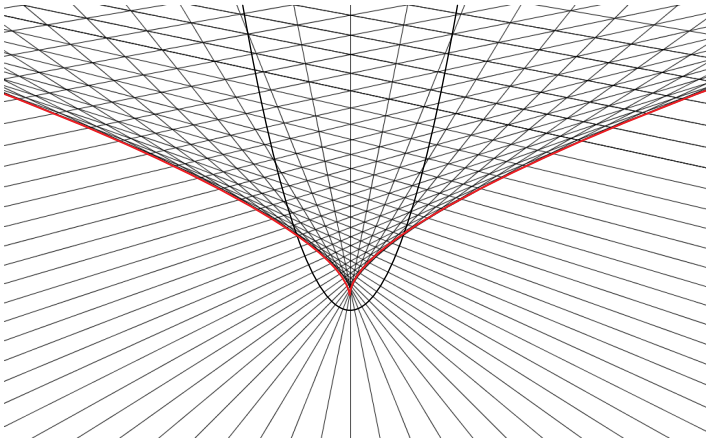


Figura 3.2: Envelope de normais à parábola (evoluta)

Seja γ uma curva convexa suave, simples e fechada, a qual denominaremos *oval*. Dados dois pontos $p_1 = \gamma(t_1)$ e $p_2 = \gamma(t_2)$ quaisquer de γ, temos as seguintes possibilidades para as tangentes nos pontos p_1 e p_2: não paralelas, paralelas não coincidentes e coincidentes.

Definição 3.2 *Dada uma curva oval* γ*, considere* $p_1, p_2 \in \gamma$*. A reta média de* $p_1 = \gamma(t_1)$ *e* $p_2 = \gamma(t_2)$ *é:*

(*i*) *a reta que liga o ponto de interseção das tangentes em* p_1, p_2 *ao ponto médio da corda formada por estes pontos, se* $t_1 \neq t_2$ *e as tangentes em* p_1 *e* p_2 *são concorrentes;*

(*ii*) *a única reta que passa pelo ponto médio da corda ligando* p_1 *e* p_2*, e é paralela às tangentes, se* $t_1 \neq t_2$ *e as tangentes em* p_1 *e* p_2 *são paralelas;*

(*iii*) *a reta normal afim a* γ *em* p_1*, se* $t_1 = t_2$*.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

3.0.1
Retas tangentes não paralelas

Seja R o ponto de interseção das retas tangentes nos pontos p_1 e p_2. Sejam γ_1 e γ_2 parametrizações locais em torno de p_1 e p_2, respectivamente. Denotaremos por M o ponto médio do segmento ligando os pontos $p_1 = \gamma_1(t)$ e $p_2 = \gamma_2(s)$, ou seja, $M = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$ e por $C = p_1 - p_2$ a corda ligando estes dois pontos.

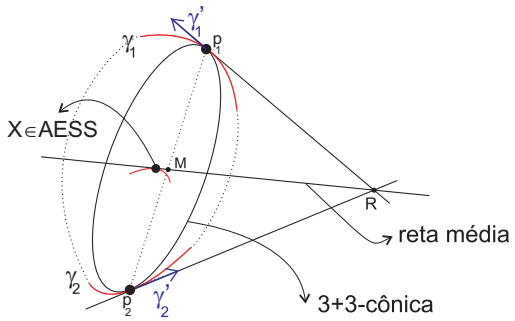


Figura 3.3: Reta Média

Definição 3.3 *Definimos os conormais ν_1 e ν_2 referentes a cada um dos pontos p_1 e p_2, respectivamente, por:*

$$\nu_1(\gamma_1'(t)) = 0 \quad e \quad \nu_1(\xi_1) = 1,$$

$$\nu_2(\gamma_2'(s)) = 0 \quad e \quad \nu_2(\xi_2) = 1,$$

onde ξ_1 e ξ_2 são os normais afins nos pontos p_1 e p_2, respectivamente.

Lema 3.4 *A equação da reta média é dada por:*

$$\nu_2(C)\nu_1(X - M) + \nu_1(C)\nu_2(X - M) = 0. \tag{3.1}$$

Demonstração: Seja ν o funcional que anula o vetor diretor da reta média. Então:

$$\nu = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2.$$

Note que:

$$\nu(M - R) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha\nu_1 + \beta\nu_2)\left(\frac{C}{2} + p_2 - R\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\frac{\nu_1(C)}{2} + \alpha\nu_1(p_2 - R) + \beta\frac{\nu_2(C)}{2} + \beta\nu_2(p_2 - R) = 0$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Ora, $\nu_2(p_2-R)=0$ pois p_2-R é tangente à γ_2 e, como $p_2-R=p_1-R-C$, temos que a última igualdade é equivalente a:

$$\alpha\frac{\nu_1(C)}{2}+\alpha\nu_1(p_1-R)-\alpha\nu_1(C)+\beta\frac{\nu_2(C)}{2}=0$$

Como p_1-R é tangente a γ_1 segue que $\nu_1(p_1-R)=0$. Portanto:

$$\nu(M-R)=0\Longleftrightarrow-\alpha\frac{\nu_1(C)}{2}+\beta\frac{\nu_2(C)}{2}=0.$$

Logo, ao tomar $\alpha=\nu_2(C)$ e $\beta=\nu_1(C)$, obtemos o resultado desejado.

■

De acordo com a definição 3.1, o envelope da família $F(t,s,X)=\nu_2(C)\nu_1(X-M)+\nu_1(C)\nu_2(X-M)$ de retas médias é o conjunto:

$$\mathcal{E}=\{X\in\mathbb{R}^2|\ \exists\ (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ F=F_t=F_s=0\}.$$

Usaremos o seguinte lema para provar a condição de existência da solução do envelope, e verificaremos a seguir que esta condição é equivalente a existir uma cônica fazendo um contato de pelo menos ordem 3 com a curva γ em no mínimo dois pontos distintos.

Lema 3.5 *As derivadas dos conormais ν_1 e ν_2 são dadas por:*

$$\nu_1'=\frac{\nu_1'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1+\frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2,$$

$$\nu_2'=\frac{\nu_2'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1+\frac{\nu_2'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2.$$

Demonstração: Faremos a demonstração apenas de uma das equações, a outra segue de forma análoga. Como ν_1 e ν_2 são linearmente independentes, podemos escrever:

$$\nu_1'=a\nu_1+b\nu_2.$$

Ao aplicar ν_1' ao vetor γ_1', obtemos:

$$\nu_1'(\gamma_1')=a\nu_1(\gamma_1')+b\nu_2(\gamma_1')\Rightarrow b=\frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')},$$

pois $\nu_1(\gamma_1')=0$.

Ao aplicar ν_1' ao vetor γ_2' e usar o fato de que $\nu_2(\gamma_2')=0$, obtemos:

$$\nu_1'(\gamma_2')=a\nu_1(\gamma_2')\Rightarrow a=\frac{\nu_1'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Portanto:

$$\nu_1' = \frac{\nu_1'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1 + \frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2.$$

■

Teorema 3.6 *A condição para que o par s, t determine um ponto do envelope das retas médias é que:*

$$\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C), \tag{3.2}$$

onde $\lambda = \left(\frac{\nu_1'(\gamma_1')\nu_1^2(\gamma_2')}{\nu_2'(\gamma_2')\nu_2^2(\gamma_1')}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Demonstração: Temos pelo lema 3.4 que a equação da reta média é dada por $\nu_2(C)\nu_1(X-M) + \nu_1(C)\nu_2(X-M) = 0$.

A derivada desta equação em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned}(\nu_2(\gamma_1')\nu_1 + \nu_2(C)\nu_1' + \nu_1'(C)\nu_2 + \nu_1(\gamma_1')\nu_2)\,(X-M) + \\ +(\nu_2(C)\nu_1 + \nu_1(C)\nu_2)\left(-\frac{\gamma_1'}{2}\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pelo lema 3.5, temos que:

$$\nu_1' = \frac{\nu_1'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1 + \frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2. \tag{3.4}$$

Ao substituir a equação 3.4 na equação 3.3, obtemos:

$$\nu_2(\gamma_1')\nu_1(X-M) + 2\frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2(C)\nu_2(X-M) = \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(\gamma_1'), \tag{3.5}$$

pois $\nu_1(\gamma_1') = 0$ e $\nu_2(C)\nu_1(X-M) + \nu_1(C)\nu_2(X-M) = 0$.

Por outro lado, se derivarmos a equação da reta média em relação a s, obtemos:

$$(\nu_2'(C)\nu_1 + \nu_1(-\gamma_2')\nu_2 + \nu_1(C)\nu_2')\,(X-M) + (\nu_2(C)\nu_1 + \nu_1(C)\nu_2)\left(-\frac{\gamma_2'}{2}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Novamente pelo lema 3.5, temos que:

$$(\nu_2)' = \frac{\nu_2'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1 + \frac{\nu_2'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2. \tag{3.7}$$

Ao substituir a equação 3.7 na equação 3.6, obtemos:

$$2\frac{\nu_2'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1(C)\nu_1(X-M) - \nu_1(\gamma_2')\nu_2(X-M) = \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(\gamma_2') \tag{3.8}$$

Daí, ao isolar $\nu_1(X-M)$ na equação 3.1 (da reta média) e substituir nas equações 3.5 e 3.8, obtemos respectivamente as equações:

$$\nu_2(X-M) = \frac{-\nu_2^2(C)\nu_1^2(\gamma_2')}{2\nu_2'(\gamma_2')\nu_1^2(C) + \nu_1^2(\gamma_2')\nu_2(C)}, \tag{3.9}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$\nu_2(X - M) = \frac{\nu_1(C)\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma_1')}{2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2^2(C) - \nu_2^2(\gamma_1')\nu_1(C)}. \tag{3.10}$$

Ao igualar as duas últimas equações obtemos a condição requerida no teorema. ■

Observação 3.7 *Se as curvas γ_1 e γ_2 estiverem parametrizadas pelo comprimento de arco afim, então $\lambda = 1$. A condição dada no teorema 3.6 é equivalente a:*

$$[\gamma_1' + \gamma_2', \gamma_1 - \gamma_2] = 0.$$

Proposição 3.8 *Seja γ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim. Existe uma cônica δ tendo no mínimo 3-pontos de contato com γ em dois pontos distintos $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$, nenhum dos quais pontos de inflexão, se, e somente se:*

$$[\gamma(s_1)' + \gamma(s_2)', \gamma(s_1) - \gamma(s_2)] = 0.$$

Demonstração: Veja [3] página 33. ■

Observações 3.9

(*i*) *À cônica que faz 3-contato com a curva em dois pontos distintos, chamaremos de $3+3-$cônica.*

(*ii*) *A propriedade da proposição 3.8 é a mesma dada no teorema 3.6. A diferença é que no teorema a curva não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco afim.*

Note que, a proposição 3.8 nos diz que a condição dada no teorema 3.6 para existência da solução do sistema $F = F_s = F_t = 0$ é que exista uma cônica que faça um 3-contato com a curva em pelo menos dois pontos distintos.

Definição 3.10 *Dada uma curva plana convexa e fechada γ, o conjunto de simetria invariante afim - $AESS$, é o fecho do lugar geométrico dos centros das cônicas que têm no mínimo um 3-contato com a curva γ em dois ou mais pontos diferentes.*

Uma vez que a condição para a existência do conjunto $AESS$ de uma curva γ é a existência de uma $3+3$ cônica δ, podemos nos perguntar qual é o centro desta cônica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Para determinar o centro da cônica precisamos encontrar o valor de X que satisfaz o sistema $F = F_s = F_t = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} \nu_2(C)\nu_1(X-M) + \nu_1(C)\nu_2(X-M) = 0 \\ \nu_2(\gamma_1')\nu_1(X-M) + 2\dfrac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2(C)\nu_2(X-M) = \dfrac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(\gamma_1') \\ 2\dfrac{\nu_2'(\gamma_2')}{\nu_1(\gamma_2')}\nu_1(C)\nu_1(X-M) - \nu_1(\gamma_2')\nu_2(X-M) = \dfrac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(\gamma_2') \end{cases}$$

Teorema 3.11 *O centro de uma* $3+3$ *cônica é:*

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\lambda\nu_2(\gamma_1')\nu_2(C)}{2(2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1'))}\left(\gamma_1' + \frac{\lambda\nu_2(\gamma_1')}{\nu_1(\gamma_2')}\gamma_2'\right)\right).$$

Demonstração: Vimos no teorema 3.6 que a condição para que o sistema acima tenha solução é que $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$. Usando este fato, temos da primeira equação do sistema que $\nu_1(X-M) = \lambda\nu_2(X-M)$. Daí, substituindo na segunda equação do sistema, obtemos:

$$\nu_2(\gamma_1')\lambda\nu_2(X-M) + 2\frac{\nu_1'(\gamma_1')}{\nu_2(\gamma_1')}\nu_2(C)\nu_2(X-M) = -\frac{1}{2}\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma_1')$$

$$\Updownarrow$$

$$\nu_2(X-M) = -\frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma_1')}{2\left(2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1')\right)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\nu_2\left((X-M)(2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1')) + \frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma_1')}{2}\gamma_1'\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(X-M)(2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1')) + \frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma_1')}{2}\gamma_1' = \alpha\gamma_2'$$

Como $\nu_1(X-M) = \lambda\nu_2(X-M)$, podemos determinar α da última equação:

$$\alpha = -\frac{\lambda^2\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma_1')}{2\nu_1(\gamma_2')}.$$

Daí,

$$X - M = \frac{-\dfrac{1}{2}\nu_2(C)\nu_2(\gamma_1')\gamma_1' - \dfrac{\lambda^2\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma_1')}{2\nu_1(\gamma_1')}\gamma_2'}{2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1')}. \tag{3.11}$$

Logo, o centro da cônica que faz um 3-contato com γ em γ_1 e γ_2 é:

$$X = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\lambda\nu_2(\gamma_1')\nu_2(C)}{2(2\nu_1'(\gamma_1')\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma_1'))}\left(\gamma_1' + \frac{\lambda\nu_2(\gamma_1')}{\nu_1(\gamma_2')}\gamma_2'\right)\right). \tag{3.12}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

■

Observações 3.12

(*i*) *Caso as curvas estejam parametrizadas pelo comprimento de arco afim, então o centro da* $3+3$*-cônica se resume a:*

$$X = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\nu_2(\gamma_1')\nu_2(C)}{2(\nu_2^2(\gamma_1') - 2\nu_2(C))}\,(\gamma_1' - \gamma_2')\right).$$

(*ii*) *O envelope das retas médias é formado não só pelo conjunto* $AESS$*, mas também pelo conjunto* $MPTL$ *(Mid-Point Tangent Locus), que é o lugar geométrico dos pontos médios dos pontos onde a curva possui retas tangentes paralelas, e pela evoluta afim, que é dada pelo envelope das retas normais afins de uma curva. Vide seção 2.2.*

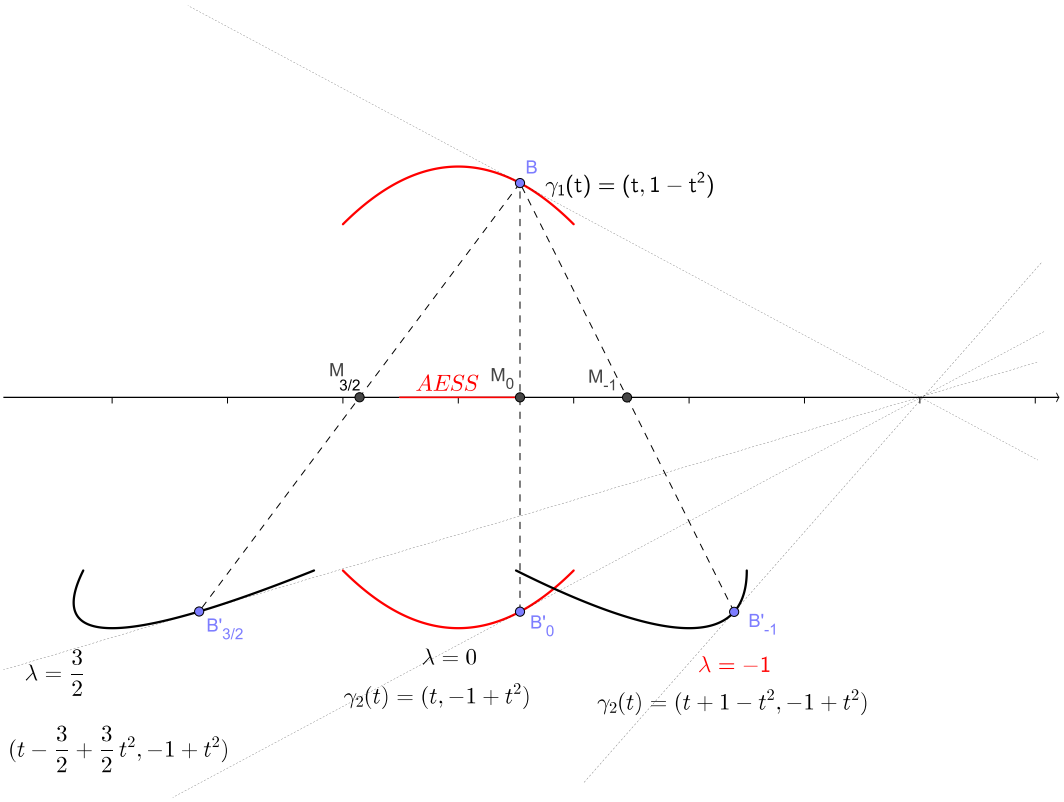
Teorema 3.13 *Suponha que o* $AESS$ *para dois arcos de um oval seja um segmento de reta* l*. Então um dos arcos é obtido do outro por uma reflexão afim em* l*.*

Demonstração: Veja [4]. ■

Exemplo 3.14 *Seja* $\gamma_1 : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma_1(t) = (t, 1-t^2)$ *e seja* $\gamma_2(t) = (u(t), v(t))$ *outra curva que junto com* γ_1 *tem o* $AESS$ *como um segmento de reta (pertencente ao eixo* x*). Então, pelo teorema anterior, a curva* γ_2 *é dada por (veja a figura 3.4):*

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA



$$A \cdot \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.4: $AESS$ como um segmento de reta

3.0.2 Estrutura local do $AESS$

Nesta seção vamos estudar sobre quais condições o $AESS$ de um par de curvas é suave. Para isso, ao invés de trabalharmos com a parametrização encontrada no teorema 3.6, trabalharemos com um modelo local. A seguir explicamos a construção de tal modelo.

Sejam p_1 e p_2 pontos sobre uma curva convexa fechada γ e X o ponto correspondente no $AESS$ de γ. Sejam γ_1 e γ_2 parametrizações em torno de p_1 e p_2, respectivamente.

Lema 3.15 *Podemos assumir por transformações afins que:*

$$\gamma_1(t) = \left(t, 1 + \frac{p}{c}t - \frac{(c+p^2)}{2c^2}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 + \cdots\right),$$

$$\gamma_2(s) = \left(s, -1 - \frac{p}{c}s + \frac{(c+p^2)}{2c^2}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 + \cdots\right),$$

onde $(p, 0)$, com $p \neq 0$, é o centro da cônica e $c \in \mathbb{R}$ tal que: se $c > 0$, então a cônica é uma elipse e, se $c < 0$, então a cônica é uma hipérbole.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Demonstração: Sabemos que X é centro de uma $3+3$-cônica. Por uma transformação afim, mais precisamente, um cisalhamento, podemos supor que a reta média para este par de pontos é ortogonal à corda p_1p_2. Dessa forma podemos introduzir um sistema de coordenadas onde o eixo x é a reta média e o eixo y a reta que contém os pontos p_1 e p_2. Assim, o centro X da cônica está sobre o eixo x. Podemos supor, a menos de uma contração, que $p_1 = (0,1)$ e que $p_2 = (0,-1)$.

Daí, a equação de uma cônica que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$, centrada em $(p,0)$, com $p \neq 0$ é:

$$ax^2 + cy^2 - 2apx - c = 0,$$

onde $a, c \in \mathbb{R}^*$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a = 1$. Assim, a cônica fica:

$$x^2 + cy^2 - 2px - c = 0 \Leftrightarrow (x-p)^2 + cy^2 = c + p^2.$$

Se $c > 0$, temos que a cônica é uma elipse e, se $c < 0$, então a cônica é uma hipérbole. Assim, podemos considerar, a menos de transformações afins, que $c = \pm 1$. Os casos $p = 0$ ou $c = 0$ serão desconsiderados, pois nestes casos a cônica se degenera em um par de retas.

Para que o contato com as curvas nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$ seja, pelo menos de ordem 3, segue que as curvas têm as formas:

$$\gamma_1(t) = \left(t, 1 + \frac{p}{c}t - \frac{(c+p^2)}{2c^2}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 + \cdots\right),$$

$$\gamma_2(s) = \left(s, -1 - \frac{p}{c}s + \frac{(c+p^2)}{2c^2}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 + \cdots\right),$$

onde $c = \pm 1$. ■

Nestas condições, temos o seguinte:

Teorema 3.16 *Se $p^2(p^3 + pc - 2p_3c^3)(p^3 + pc + 2q_3c^3) \neq 0$, onde $p \neq 0$ e $c = \pm 1$, então o AESS é suave.*

Demonstração: Defina a aplicação:

$$H: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,s,x,y) & \longmapsto & (F, F_t, F_s) \end{array},$$

onde F é a equação da reta média do par p_1 e p_2. Observe que os valores de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $H \equiv 0$ são exatamente aqueles que pertencem ao

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Envelope das Retas Médias. Note que a jacobiana de H é dada por:

$$J_H = \begin{pmatrix} F_t & F_s & F_x & F_y \\ F_{tt} & F_{ts} & F_{tx} & F_{ty} \\ F_{ts} & F_{ss} & F_{sx} & F_{sy} \end{pmatrix}$$

No ponto $(0, 0, p, 0)$:

$$J_H(0,0,p,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ \dfrac{3(p^2+c)p^2}{c^3} - 6p_3p & 0 & \dfrac{1}{c} & \dfrac{p}{c} \\ 0 & -\dfrac{3(p^2+c)p^2}{c^3} - 6q_3p & -\dfrac{1}{c} & \dfrac{p}{c} \end{pmatrix}$$

Observe que a condição para a suavidade de $H^{-1}(0)$ é que $p^2(p^3+pc-2p_3c^3)(p^3+pc+2q_3c^3) \neq 0$. Mas, como por hipótese $p \neq 0$, $p^3+pc-2p_3c^3 \neq 0$ e $p^3+pc+2q_3c^3 \neq 0$, segue que $H^{-1}(0)$ é suave.

Observe que o *AESS* corresponde a $\pi_2(H^{-1}(0))$, onde $\pi_2(t,s,x,y) = (x,y)$. Portanto este conjunto é suave se,

$$\ker(J_H(0,0,p,0)) \cap \ker(D\pi_2(0,0,p,0)) = \{0\},$$

e esta condição é equivalente ao determinante da matriz das segundas derivadas de F, com relação aos parâmetros s e t, ser não nulo, que é exatamente a asserção feita no teorema. ■

Observação 3.17

(*i*) *Caso* $p_3 = \dfrac{(p^2+c)p}{2c^3}$ *ou* $q_3 = -\dfrac{(p^2+c)p}{2c^3}$ *então a cônica faz* 3*-contato em um dos pontos e* 4*-contato no outro ponto. Denotaremos esta condição por* $3+4$*-cônica.*

(*ii*) *O caso* $p = 0$ *será estudado na seção 3.2.*

Teorema 3.18 *O AESS é um cúspide no centro de uma* $3+4$*-cônica.*

Demonstração: Considere as curvas dadas no lema 3.15. Suponha, s.p.g., que $c = 1$. Assim:

$$\gamma_1(t) = \left(t, 1 + pt - \frac{(1+p^2)}{2}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 + \cdots\right),$$

$$\gamma_2(s) = \left(s, -1 - ps + \frac{(1+p^2)}{2}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 + \cdots\right).$$

Seja F a equação da reta média para um par de pontos nessas curvas. Se escrevermos $F = k_{11}x+k_{12}y+k_{13}$, $Fs = k_{21}x+k_{22}y+k_{23}$, $Ft = k_{31}x+k_{32}y+k_{33}$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

então o envelope desta família tem solução se, e somente se, o determinante da matriz M abaixo é nulo:

$$M = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

Calculamos este determinante com uso do Maple e obtemos que $\det M = AB = 0$ onde A é a condição de paralelismo e B é dado por:

$$B = (p^3 + p - 2p_3)t - (p^3 + p + 2q_3)s + O_2(s,t).$$

Na origem a condição de paralelismo não ocorre, pois consideramos $p \neq 0$. Assim, o envelope da família de retas médias tem solução somente se $B = 0$.

Já provamos no teorema 3.16 que, se $p_3 \neq \dfrac{p^3+p}{2}$ e $q_3 \neq \dfrac{p^3+p}{2}$, então o $AESS$ é suave. Suponhamos agora que, na origem, o contato com a curva em p_2 seja de ordem 3 e em p_1 seja de ordem 4, ou seja, $p_3 = \dfrac{p^3+p}{2}$, mas $p_4 \neq -\dfrac{1+5a^4+6a^2}{8}$. Assim, $\dfrac{\partial B}{\partial s}(0,0) = p^3 + p + 2q_3 \neq 0$, e pelo teorema da função implícita, podemos escrever s como função de t. Explicitamente:

$$s = \frac{5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1}{p^3 + p + 2q_3}t^2 + O(3)$$

Ao substituirmos esta relação na solução do envelope, obtemos:

$$x = p + 3(5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1)pt^2 + O(3),$$

$$y = -\frac{1}{2}(5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1)t^3 + O(4).$$

Portanto, no centro de uma $3+4$ cônica o $AESS$ é uma cúspide. ■

3.1
Retas tangentes paralelas

3.1.1
Coincidentes

Nesta seção o objetivo é estudar um caso limite do ERM para curvas, ou seja, discutir o que ocorre com a reta média quando os pontos tendem um para o outro. Para isto considere um único segmento de curva e parametrize por:

$$\gamma_1(t_1) = (t_1, f(t_1)) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t_2) = (t_2, f(t_2)).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

O objetivo é discutir o caso limite quando $t_1 \to t_2$.

A equação da reta média é dada por:

$$N_1(C)N_2(X-M) + N_2(C)N_1(X-M) = 0, \tag{3.13}$$

onde $C = (t_1 - t_2, f(t_1) - f(t_2))$, $M = \left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}\right)$, $N_1(t_1) = (-f'(t_1), 1)$ e $N_2(t_2) = (-f'(t_2), 1)$.

Desta forma, temos que:

$$N_1(C) = -f'(t_1)(t_1 - t_2) + f(t_1) - f(t_2),$$

$$N_2(C) = -f'(t_2)(t_1 - t_2) + f(t_1) - f(t_2),$$

$$N_1(X-M) = -f'(t_1)\left(x - \frac{t_1+t_2}{2}\right) + y - \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2},$$

$$N_2(X-M) = -f'(t_2)\left(x - \frac{t_1+t_2}{2}\right) + y - \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}.$$

O coeficiente angular α da reta média é dado por:

$$\alpha = \frac{-(f'(t_1)+f'(t_2))(f(t_1)-f(t_2)) + 2f'(t_1)f'(t_2)(t_1-t_2)}{2(f(t_1)-f(t_2)) - (t_1-t_2)(f'(t_1)+f'(t_2))}.$$

O limite de α, quando $t_1 \to t_2$, nos dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Assim, ao usar a Regra de L'Hopital, três vezes seguidas, obtemos o coeficiente angular da reta média:

$$\begin{aligned}\lim_{t_1 \to t_2} \alpha &= \lim_{t_1 \to t_2} \frac{-(f'(t_1)+f'(t_2))(f(t_1)-f(t_2)) + 2f'(t_1)f'(t_2)(t_1-t_2)}{2(f(t_1)-f(t_2)) - (t_1-t_2)(f'(t_1)+f'(t_2))} \\ &= \frac{-f''(t_2)f'(t_2) + 3(f''(t_2))^2}{f'''(t_2)}.\end{aligned}$$

Mas esta é exatamente a direção da reta normal afim em t_2.

Logo, pode-se concluir o seguinte resultado:

Proposição 3.19 *Quando $t_1 \to t_2$ a reta média está na direção do normal afim à curva em t_2.*

Portanto, a evoluta afim de uma curva pertence ao ERM.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

3.1.2
Não Coincidentes

Nesta seção vamos estudar o caso em que as retas tangentes são paralelas e não coincidentes. Neste caso, conforme já observado anteriormente, a reta média consiste da reta que passa pelo ponto médio dos pontos onde as tangentes são paralelas, e que é paralela a estas tangentes.

Definição 3.20 *O Mid-Point Tangents Locus - $MPTL$ de uma curva suave γ é o lugar geométrico dos pontos médios de pontos γ que têm tangentes paralelas.*

Proposição 3.21 *O $MPTL$ genericamente tem uma cúspide ordinária no centro de uma $3+3$-cônica.*

Demonstração: Veja [3]. ■

Foi mostrado anteriormente que o $AESS$ tem uma cúspide quando temos tangentes paralelas nos pontos de contato de uma $3+3$ cônica, e aqui mostramos que o $MPTL$ tem um cúspide no centro de uma 3+3 cônica. Então, o $AESS$ e o $MPTL$ exibem cúspides nos pontos em que se encontram.

Exemplo 3.22 *Sejam $\gamma_1(t) = (t, 2t^2+t^3)$ e $\gamma_2(s) = (s, 2-2s^2-2s^3)$. Observe na figura abaixo que o AESS e o $MPTL$, deste par de curvas, exibem cúspides na origem.*

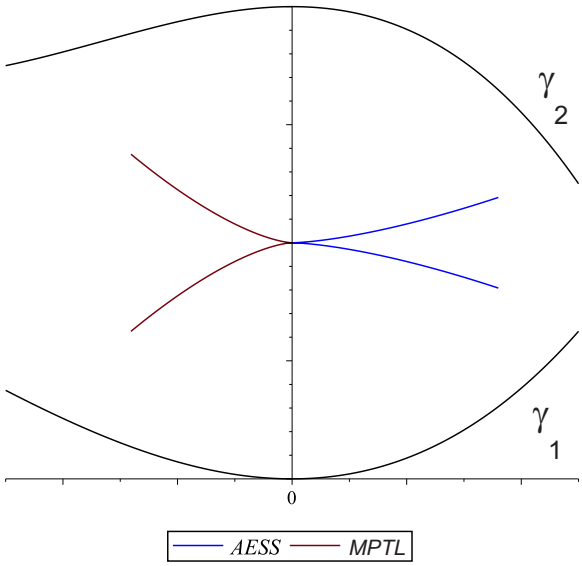


Figura 3.5: Comportamento local do $AESS \cup MPTL$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

3.2
Comportamento local do $MPTL \cup AESS$

Nesta seção estudaremos o comportamento local do $MPTL \cup AESS$. Para tanto, usaremos novamente o modelo local apresentado no lema 3.15. Aqui consideraremos que retas tangentes sejam paralelas na origem, ou seja, caso $p = 0$ no modelo. Assim, as curvas podem ser parametrizadas por:

$$\gamma_1(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{2} + p_3t^3 + p_4t^4 + \cdots\right),$$

$$\gamma_2(s) = \left(s, -1 + \frac{s^2}{2} + q_3s^3 + q_4s^4 + \cdots\right).$$

Seja F a equação da reta média para um par de pontos nessas curvas. Se escrevermos $F = k_{11}x+k_{12}y+k_{13}$, $Fs = k_{21}x+k_{22}y+k_{23}$, $Ft = k_{31}x+k_{32}y+k_{33}$, então o envelope desta família tem solução se, e somente se, o determinante da matriz M abaixo é nulo:

$$M = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

Calculamos este determinante com uso do Maple e obtemos:

$$\det M = -\frac{1}{32}AB = 0 \quad \text{onde,}$$

$$A = 3p_3t^2 - s - 4q_4s^3 - 5q_5s^4 - t + 4p_4t^3 + 5p_5t^4 - 3q_3s^2$$

e

$$B = 192q_3s + 192p_3t + O_2(s,t).$$

O caso $A = 0$ é exatamente a condição de paralelismo entre as curvas, portanto este fator está relacionado com o $MPTL$. Note que $\frac{\partial A}{\partial s}(0,0) \neq 0$ logo pelo teorema da função implícita, localmente s pode ser escrito como função de t. Pode-se verificar que:

$$s = -t + 3(p_3 - q_3)t^2 + [18q_3(p_3 - q_3) + 4(p_4 + q_4)]t^3 + \cdots$$

Ao substituir esta relação na solução do envelope, que também obtivemos com uso do Maple, obtemos:

$$x = \frac{3}{2}(p_3 - q_3)t^2 + O(3)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$y = (q_3 - p_3)t^3 + O(4),$$

o que comprova que no centro de uma $3+3$ cônica o $MPTL$ é uma cúspide.

Por outro lado, se $B = 0$, então temos duas possibilidades: $q_3 \neq 0$ ou $p_3 \neq 0$. O caso em que $p_3 = q_3 = 0$ desconsideramos, pois neste caso a cônica faria um contato $4+4$ com a curva.

Se considerarmos $q_3 \neq 0$, então $\dfrac{\partial B}{\partial s}(0,0) = 192q_3 \neq 0$. Assim, novamente pelo teorema da função implícita, podemos escrever s como função de t. E, se $p_3 \neq 0$, então escreveremos t como função de s. No caso em que $s = s(t)$, temos:

$$s = -\frac{p_3}{q_3}t + O(2).$$

Ao substituir esta relação na solução do envelope, obtemos:

$$x = \frac{3p_3}{2q_3}(p_3 - q_3)t^2 + O(3)$$

$$y = \frac{p_3}{2q_3^2}(q_3^2 - p_3^2)t^3 + O(4).$$

Assim, concluímos que no caso em que as retas tangentes são paralelas, $AESS$ possui uma cúspide.

O teorema 3.18 e a seção corrente nos dá uma nova prova para o seguinte resultado:

Proposição 3.23 *O $AESS$ de uma curva suave γ passando por $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$, onde nenhum destes pontos é de inflexão, exibe uma singularidade de tipo cúspide quando:*

(i) A cônica C tem 4-contato com γ em $\gamma(t_1)$ ou $\gamma(t_2)$.
(ii) As tangentes a γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ são paralelas.

Demonstração: Outra demonstração pode ser encontrada em [3]. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Parte II

Envelope de Planos Médios

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

4
Revisão: geometria afim de hipersuperfícies

Neste capítulo usamos como referência o livro [5]. Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para o ponto $x_0 \in M$ considere um campo transversal ξ. Sejam D a conexão canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathfrak{X}(M)$ o fibrado tangente da variedade M.

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi,$$

onde h é chamada de forma fundamental afim em M com respeito a ξ, e ∇ uma conexão afim em M.

Proposição 4.1 *A conexão D é de torção livre se, e somente se, a conexão afim ∇ é de torção livre e a forma fundamental afim h é simétrica.*

Demonstração: Note que:

$$D_X Y - D_Y X = (\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (h(X,Y) - h(Y,X))\,\xi.$$

Logo, como $D_X Y - D_Y X - [X,Y] = 0$, então $(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (h(X,Y) - h(Y,X))\,\xi = [X,Y]$, e portanto $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ e $h(X,Y) = h(Y,X)$. A volta é imediata. ■

Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos a *fórmula de Weingarten*:

$$D_X \xi = -SX + \tau(X)\xi,$$

onde S é um tensor de tipo $(1,1)$ e τ uma 1-forma chamada de forma conexão transversal.

Estamos interessados em conexões equiafins. Logo, fixemos um elemento de volume paralelo ω em $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos o elemento de volume induzido em M dado por:

$$\theta(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \omega(X_1, X_2, \cdots, X_n, \xi).$$

Estamos interessados que (∇, θ) seja uma estrutura equiafim, ou seja, que $\nabla\theta = 0$. Isto é dado no seguinte resultado:

Teorema 4.2

$$\nabla_X \theta = \tau(X)\theta, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Demonstração: Veja [5]. ■

Como consequência temos o seguinte:

Corolário 4.3

$$\nabla\theta = 0 \Longleftrightarrow \tau = 0,$$

isto é, $D_X\xi$ é tangente à M para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 4.4 *Se $D_X\xi$ é tangente à M para cada $X \in T_xM$ com $x \in M$, dizemos que o campo ξ é equiafim.*

Observação 4.5 *Para toda hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, podemos localmente encontrar um campo transversal equiafim. De fato, se colocarmos qualquer métrica euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$ e considerar o vetor normal unitário euclideano N, N é campo transversal equiafim.*

Ao mudar o campo vetorial transversal de uma imersão, a forma fundamental afim, a conexão induzida, a conexão transversal τ e o operador de forma afim, também sofrem alterações. Vejamos como isto ocorre no próximo resultado:

Proposição 4.6 *Suponhamos que o campo vetorial transversal ξ mude para*

$$\bar{\xi} = \phi\xi + Z,$$

onde Z é um campo tangente à M e ϕ uma função não-nula. Então:

$$\bar{h} = \frac{1}{\phi}h;$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{\phi}h(X,Y)Z;$$

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{1}{\phi}h(Z,*) + d|\log\phi|;$$

$$\bar{S} = \phi S - \nabla_* Z + \bar{\tau}(*)Z;$$

$h(Z,*), \nabla_* Z$ e $\bar{\tau}(*)Z$ são 1-formas que calculadas em X são $h(Z,X), \nabla_X Z$ e $\bar{\tau}(X)Z$, respectivamente.

Demonstração: Ver [5]. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Definição 4.7 *A equação* $\bar{h} = \dfrac{h}{\phi}$ *da proposição 4.6, diz que o posto da forma fundamental afim independe da escolha do campo transversal. Definimos o posto da imersão como sendo o posto de* h*. Em particular, se o posto de* h *é* n*, ou seja, se* h *é não degenerada, então* M *é não-degenerada.*

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície imersa, não degenerada, ou seja, dado um campo transversal ξ, a forma fundamental afim tem posto n.

Se escolhermos um campo transversal ξ, então obtemos em M, a forma fundamental afim h, a conexão induzida ∇ e o elemento de volume θ.

Teorema 4.8 (Blaschke) *Se* $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é uma hipersuperfície não degenerada, então existe um campo transversal tal que* (∇, θ) *tem estrutura equiafim (isto é* $\nabla\theta = 0$*) e* $\theta = \omega_h$ *é o elemento de volume da métrica não degenerada* h*. Tal campo é único, a menos de sinal.*

Demonstração: Ver [5], [6]. ■

A demonstração do teorema acima pode ser resumida nos seguintes passos:

1 Escolha um campo transversal ξ e calcule τ.

2 Determine a forma fundamental afim h associada a ξ e verifique que é não-degenerada.

3 Determine o elemento de volume θ para ξ.

4 Escolha uma base unimodular $\{X_1, \cdots, X_n\}$, ou seja, uma base tal que $\theta(X_1, \cdots, X_n) = 1$, e calcule $\det_\theta h = \det[h_{ij}]$.

5 Faça $\phi = |\det_\theta h|^{\frac{1}{n+2}}$ e $\bar{\xi} = \phi\xi + Z$ onde Z é determinado resolvendo

$$\tau + \frac{1}{\phi} h(Z, *) + d\log\phi = 0.$$

Vamos usar este método para calcular o normal afim de uma superfície dada pelo gráfico de uma função:

Exemplo 4.9 *Considere a imersão, parametrizada pelo gráfico de uma função* f*, ou seja:*

$$X(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

Começamos com a escolha $\xi = (0, 0, 1)$ *para campo transversal. Observe que:*

$$D_{X_1}\xi = D_{X_2}\xi = 0 \Rightarrow \tau = 0,$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

onde $X_1 = (1, 0, f_{x_1})$ *e* $X_2 = (0, 1, f_{x_2})$.

Temos ainda $D_{X_i}X_j = f_{ij}\xi$, *onde* $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. *Portanto:*

$$\nabla_{X_i}X_j = 0 \quad e \quad h(X_i, X_j) = f_{ij},$$

e a imersão é não degenerada se, e somente se, $\det[f_{ij}] \neq 0$. *Note que:*

$$\theta(X_1, X_2) = \det[X_1, X_2, \xi] = 1,$$

daí $\phi = |\det[f_{ij}]^{\frac{1}{4}}|$.

Finalmente, pode-se encontrar $Z = Z_1X_1 + Z_2X_2$ *tal que* $\bar{\xi} = \phi\xi + Z$ *é o normal afim resolvendo*

$$\begin{cases} \phi_1 + h_{11}Z_1 + h_{12}Z_2 = 0 \\ \phi_2 + h_{12}Z_1 + h_{22}Z_2 = 0 \end{cases}$$

Se, por exemplo, $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, *então* $X_1 = (1, 0, x_1), X_2 = (0, 1, x_2)$, *e escolhendo* $\xi = (0, 0, 1)$, *temos* $\tau = 0$, $\theta = 1$ *e,*

$$f_{11} = f_{22} = 1, f_{12} = f_{21} = 0,$$

logo $\nabla_{X_i}X_j = 0$, $h(X_1, X_1) = h(X_2, X_2) = 1$ *e* $h(X_1, X_2) = 0$. *E portanto* $\det_\theta h = 1, \phi = 1$ *e* $Z = (0, 0, 0)$. *O que diz que* $\xi = (0, 0, 1)$ *é o normal afim.*

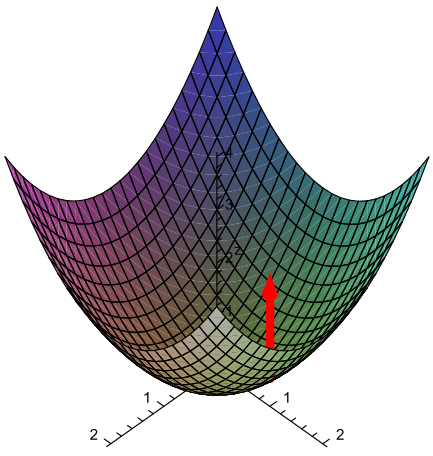


Figura 4.1: O normal afim ao gráfico de $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ em qualquer ponto aponta para cima.

Proposição 4.10 *Seja* S *uma superfície em* $\mathbb{R}^3$ *parametrizada por* $X : U \to \mathbb{R}^3$, *com campo normal afim* ξ. *A matriz da primeira forma fundamental afim* h *com respeito à base* $\{X_u, X_v, \xi\}$ *é dada por*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$\frac{1}{|LN-M^2|^{\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

onde $L=[X_u,X_v,X_{uu}], N=[X_u,X_v,X_{vv}], M=[X_u,X_v,X_{uv}]$.

Corolário 4.11 *Em pontos onde* $LN-M^2\neq 0$ *a forma fundamental afim pode ser expressa por*

$$\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{|LN-M^2|^{\frac{1}{4}}}.$$

Lema 4.12 *Considere no sistema cartesiano* x,y,z *a superfície não-degenerada dada pelo gráfico* $z=ax^2+bxy+cy^2+O(3)$. *Na origem o plano tangente é* $z=0$. *Os eixos* x *e* y *são ortogonais na métrica de Blaschke se, e somente se,* $b=0$.

Demonstração: A parametrização da superfície é

$$X(x,y)=(x,y,ax^2+bxy+cy^2+O(3)).$$

A métrica de Blaschke é dada por

$$ds^2=\frac{Ldx^2+2Mdxdy+Ndy^2}{|LN-M^2|^{\frac{1}{4}}},$$

onde $L=[X_x,X_y,X_{xx}], N=[X_x,X_y,X_{yy}], M=[X_x,X_y,X_{xy}]$. Assim, a métrica de Blaschke na origem é:

$$ds^2=\frac{2adx^2+2bdxdy+2cdy^2}{|4ac-b^2|^{\frac{1}{4}}}.$$

Como a métrica é não degenerada, segue que $4ac-b^2\neq 0$. Seja $X=(1,0,0)$ e $Y=(0,1,0)$, então

$$X=1X_x+0X_y \quad \text{e} \quad Y=0X_x+1X_y.$$

Note que $h(X,Y)=\dfrac{2b}{(4ac-b^2)^{\frac{1}{4}}}$, logo os eixos são ortogonais se, e somente se, $b=0$. ■

No que segue, apresentaremos uma propriedade que será muito explorada no próximo capítulo, a saber, a derivada da aplicação conormal. Seja $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície não degenerada com normal afim ξ. Seja $\mathbb{R}_{n+1}$ o espaço dual do espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para $x\in M$, seja ν_x o funcional linear de $\mathbb{R}_{n+1}$ tal que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$\nu_x(\xi) = 1 \quad \text{e} \quad \nu_x(X) = 0 \ \forall X \in T_xM.$$

A aplicação diferenciável $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}_{n+1} - \{0\}$ é chamada de *Aplicação Conormal*. Denotando por D a conexão canônica em $\mathbb{R}_{n+1}$, a aplicação conormal satisfaz a seguinte propriedade:

Proposição 4.13 *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hiper-superfície não-degenerada e ν a aplicação conormal como definida acima. A aplicação ν é uma imersão tal que*

$$D_Y\nu(\xi) = 0 \ \ e \ \ D_Y\nu(X) = -h(Y,X) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Demonstração: Ver demonstração em [5]. ■

Proposição 4.14 *Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ é um vetor qualquer do espaço, então*

$$D_Y\nu(X) = -h(Y, X^T), \quad Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde $X = X^T + \lambda\xi$ e X^T é a componente tangente do vetor X.

Demonstração: Observe que:

$$D_Y\nu(X) = D_Y\nu(X^T + \lambda\xi) = D_Y(X^T) + \lambda D_Y\nu(\xi) = -h(Y, X^T).$$

Na última igualdade usamos a proposição 4.13. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

5
Envelope de Planos Médios - EPM

Neste capítulo generalizamos o conjunto $AESS$ de curvas planas suaves convexas para superfícies. Apresentamos um conjunto de simetria afim para superfícies, ao qual denominamos de Superfície de Centros de $3+3$ Cônicas - $SC3C$. Esta superfície surge quando consideramos planos tangentes não paralelos em pontos distintos da superfície. Na proposição 5.4 apresentamos quais as condições para existência do conjunto $SC3C$. Em seguida, apresentamos condições de suavidade para este conjunto, veja teorema 5.13.

Seja S uma superfície convexa não-degenerada. Tomemos dois pontos $p_1, p_2 \in S$ e sejam S_1 e S_2 abertos em torno de p_1 e p_2, respectivamente e h_1 e h_2 as métricas de Blaschke de S_1 e S_2, respectivamente.

Os planos tangentes em p_1 e p_2 podem ser não paralelos, paralelos não coincidentes ou coincidentes. Vamos estudar cada caso separadamente.

Neste capítulo vamos considerar o caso em que $p_1 \neq p_2$ e os planos tangentes nesses pontos não são paralelos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

5.1
Superfície de Centros de $3+3$-Cônicas

Sejam ξ_1 e ξ_2 os vetores normais afins de S_1 e S_2. Denotaremos por h_1 e h_2 as métricas de Blaschke relativas aos campos transversais ξ_1 e ξ_2, respectivamente. Seja $\mathbb{R}_3$ o espaço dual de $\mathbb{R}^3$, o qual, visto como um espaço afim, chamaremos de espaço dual afim. Sejam ν_1 e ν_2 as aplicações conormais de S_1 e S_2, respectivamente, isto é, para cada $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$, temos:

$$\nu_1(\xi_1) = 1 \quad \text{e} \quad \nu_1(X) = 0, \ \forall \ X \in T_{p_1}S_1,$$

$$\nu_2(\xi_2) = 1 \quad \text{e} \quad \nu_2(X) = 0, \ \forall \ X \in T_{p_2}S_2.$$

Dados p_1 e p_2, considere a reta r de interseção dos planos tangentes em cada um destes pontos. Denotaremos por M o ponto médio dos pontos p_1 e p_2, ou seja, $M(p_1, p_2) = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$ e denotaremos por C a corda que liga os dois pontos, ou seja, $C(p_1, p_2) = p_1 - p_2$.

Chamaremos de **plano médio** o plano que contém a reta r e o ponto médio M. Seja:

$$\begin{array}{rccc} Z: & S_1 \times S_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (p_1, p_2) & \longmapsto & Z(p_1, p_2), \end{array}$$

um vetor diretor da reta r de interseção dos planos tangentes a p_1 e p_2, respectivamente.

Sejam:

$$\begin{array}{rccc} Y_i: & S_1 \times S_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (p_1, p_2) & \longmapsto & Y_i(p_1, p_2), \end{array}$$

com $i = 1, 2$, os vetores tangentes a S_1 e S_2, respectivamente, tais que $h_1(Y_1, Z) = 0$ e $h_2(Y_2, Z) = 0$.

O próximo resultado será fundamental na definição da equação do plano médio:

Lema 5.1 *Com as notações acima, o funcional dado por:*

$$\nu = \nu_2(C)\,\nu_1 + \nu_1(C)\,\nu_2,$$

anula qualquer vetor do plano médio.

Demonstração: Considere R um ponto qualquer da reta r de interseção dos planos tangentes. Observe que $M - R = \frac{C}{2} + p_1 - R$ e que $M - R = -\frac{C}{2} + p_2 - R$. Note que:

$$\begin{aligned} \nu(M-R) &= \nu_2(C)\,\nu_1(M-R) + \nu_1(C)\,\nu_2(M-R) \\ &= \nu_2(C)\,\nu_1\left(\frac{C}{2} + p_1 - R\right) + \nu_1(C)\,\nu_2\left(-\frac{C}{2} + p_2 - R\right) \\ &= \frac{\nu_2(C)\,\nu_1(C)}{2} - \frac{\nu_1(C)\,\nu_2(C)}{2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\nu_1(p_1 - R) = \nu_2(p_2 - R) = 0$. ■

Definição 5.2 *A equação do plano médio é dada por:*

$$F(p_1, p_2, X) = 0, \tag{5.1}$$

onde $F(p_1, p_2, X) = (\nu_2(C)\nu_1 + \nu_1(C)\nu_2)(X - M)$.

Estamos interessados no estudo do envelope da família de planos médios. Se denotamos por $\mathcal{E}$, então o envelope da família

$$\begin{array}{rccc} F: & S_1 \times S_2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p_1, p_2, X) & \longmapsto & (\nu_2(C)\nu_1 + \nu_1(C)\nu_2)(X - M) \end{array}$$

dos planos médios da superfície convexa S, é dado por:

$$\mathcal{E} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 | \exists\ (p_1, p_2) \in S_1 \times S_2; F = F_{p_1} = F_{p_2} = 0 \right\}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

A escolha de campos ortogonais à direção da reta de interseção dos planos será de extrema importância na demonstração do resultado principal deste capítulo.

Lema 5.3 *Se* $h_1(Y_1, Z) = 0$ *e* $h_2(Y_2, Z) = 0$, *então*

$$D_{Y_1}\nu_1 = (\nu_1)_{Y_1} = a\nu_1 + b\nu_2 \quad e \quad D_{Y_2}\nu_2 = (\nu_2)_{Y_2} = \bar{a}\nu_1 + \bar{b}\nu_2,$$

onde $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ *são dados por:*

$$\begin{aligned} a &= -\frac{h_1(Y_1, X_2)}{\nu_1(X_2)}, \ \ \forall\ X_2 \in T_{p_2}S_2, \\ b &= -\frac{h_1(Y_1, X_1)}{\nu_2(X_1)}, \ \ \forall\ X_1 \in T_{p_1}S_1, \\ \bar{a} &= -\frac{h_2(Y_2, X_2)}{\nu_1(X_2)} \ \ \forall\ X_2 \in T_{p_2}S_2, \\ \bar{b} &= -\frac{h_2(Y_2, X_1)}{\nu_2(X_1)} \ \ \forall\ X_1 \in T_{p_1}S_1. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\{\nu_1, \nu_2, \zeta\}$ uma base do dual $\mathbb{R}_3$. Assim, o funcional $h_1(Y_1, *)$ é uma combinação linear dos vetores da base, ou seja:

$$h_1(Y_1, *) = a\nu_1 + b\nu_2 + c\zeta.$$

Por hipótese, $h_1(Y_1, Z) = 0$, portanto $c = 0$. Pela proposição 4.13 temos $D_{Y_1}\nu_1(X) = -h_1(Y_1, X)$, para todo $X \in T_{p_1}S_1$, logo $D_{Y_1}\nu_1 = a\nu_1 + b\nu_2$. Analogamente se prova que $D_{Y_2}\nu_2 = (\nu_2)_{Y_2} = \bar{a}\nu_1 + \bar{b}\nu_2$.

Aplicando $(\nu_1)_{Y_1}$ a qualquer vetor tangente a S_1, obtemos:

$$(\nu_1)_{Y_1}(X_1) = a\nu_1(X_1) + b\nu_2(X_1) = b\nu_2(X_1) \Longrightarrow b = \frac{(\nu_1)_{Y_1}(X_1)}{\nu_2(X_1)}, \ \ \forall\ X_1 \in T_{p_1}S_1,$$

pois $\nu_1(X_1) = 0, \ \forall X_1 \in T_{p_1}S_1$. Temos pelo lema 4.13, $(\nu_1)_{Y_1}(X) = -h_1(Y_1, X)$, logo:

$$b = -\frac{h_1(Y_1, X_1)}{\nu_2(X_1)}.$$

Aplicando agora $(\nu_1)_{Y_1}$ a um vetor genérico X_2 de $T_{p_2}S_2$, obtemos:

$$(\nu_1)_{Y_1}(X_2) = a\nu_1(X_2) + b\nu_2(X_2) = a\nu_1(X_2) \Longrightarrow a = \frac{(\nu_1)_{Y_1}(X_2)}{\nu_1(X_2)}, \ \ \forall\ X_2 \in T_pS_2,$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

pois $\nu_2(X_2) = 0, \quad \forall \quad X_2 \in T_{p_2}S_2$. Usando novamente o lema 4.13, obtemos:

$$a = -\frac{h_1(Y_1, X_2)}{\nu_1(X_2)}.$$

De forma análoga determina-se $\bar{a}$ e $\bar{b}$. ■

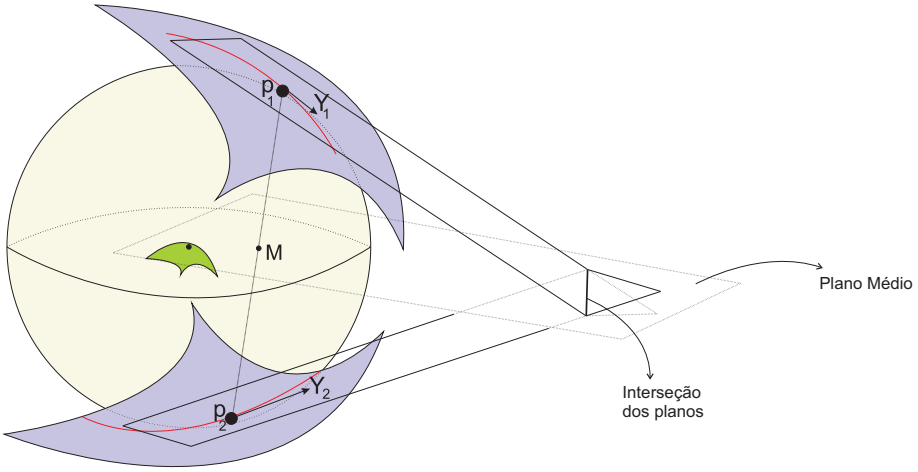


Figura 5.1: A geometria da $SC3C$

O objetivo desta seção é resolver o EPM, ou seja, determinar o valor de X que satisfaz $F = F_{p_1} = F_{p_2} = 0$. Como Y_i e Z são ortogonais nas métricas h_i, segue que os conjuntos $\{Y_i, Z\}$ são bases de $T_{p_i}S_i$, com $i = 1, 2$. Assim, determinar o EPM resume-se em determinar o valor de X no seguinte sistema:

$$\begin{cases} F(p_1, p_2, X) = 0 \\ F_{p_1}(p_1, p_2, X)(Y_1) = 0 \\ F_{p_2}(p_1, p_2, X)(Y_2) = 0 \\ F_{p_1}(p_1, p_2, X)(Z) = 0 \\ F_{p_2}(p_1, p_2, X)(Z) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

A notação $F_{p_1}(p_1, p_2, X)(W)$ corresponde à derivada parcial de F com relação a p_i, na direção $W \in T_{p_1}S_1$, mantendo p_2 e X fixos.

Para não carregar a notação, omitiremos o ponto onde as derivadas estão sendo consideradas. Por exemplo, representaremos a derivada $F_{p_i}(p_1, p_2, X)(Y)$ apenas por $F_{p_i}(Y)$.

Por uma questão de clareza, separamos o resultado principal nas duas próximas proposições.

Proposição 5.4 *As três primeiras equações do sistema 5.2 têm solução se,e somente se,*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C), \qquad onde \quad \lambda = \left(\frac{\nu_1^2(Y_2)}{\nu_2^2(Y_1)}\frac{h_1(Y_1,Y_1)}{h_2(Y_2,Y_2)}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.3}$$

Demonstração:

Note que $C_{p_1} \cdot Y_1 = Y_1$ e que $M_{p_1} \cdot Y_1 = \dfrac{Y_1}{2}$, onde o subscrito é a derivada parcial com relação à p_1.

Como $\nu_1(Y_1) = \nu_2(Y_2) = 0$, segue que a derivada $F_{p_1}(Y_1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F_{p_1}(Y_1) &= (d\nu_1(p_1)\cdot Y_1)(C)\nu_2(X-M) + \nu_2(Y_1)\nu_1(X-M) + \\ &\quad + \nu_2(C)(d\nu_1(p_1)\cdot Y_1)(X-M), \end{aligned}$$

onde $d\nu_1(p_1)\cdot Y_1$ é a derivada da aplicação conormal ν_1 no ponto p_1 na direção Y_1.

Pelo lema 5.3, obtemos:

$$F_{p_1}(Y_1) = (2b\nu_2(C)\nu_2 + \nu_2(Y_1)\nu_1)(X-M) - \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(Y_1) + aF. \tag{5.4}$$

Analogamente, obtemos:

$$F_{p_2}(Y_2) = (2\bar{a}\nu_1(C)\nu_1 - \nu_1(Y_2)\nu_2)(X-M) - \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(Y_2) + \bar{b}F. \tag{5.5}$$

E, como $F = 0$ segue que:

$$F_{p_1}(Y_1) = (2b\nu_2(C)\nu_2 + \nu_2(Y_1)\nu_1)(X-M) - \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(Y_1), \tag{5.6}$$

$$F_{p_2}(Y_2) = (2\bar{a}\nu_1(C)\nu_1 - \nu_1(Y_2)\nu_2)(X-M) - \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(Y_2). \tag{5.7}$$

Ao isolar $\nu_1(X-M)$ na equação $F = 0$ e substituir nas equações $F_{p_1}(Y_1) = 0$ e $F_{p_2}(Y_2) = 0$, obtemos:

$$\left(-\frac{\nu_2(Y_1)\nu_1(C)\nu_2}{\nu_2(C)} + 2b\nu_2(C)\nu_2\right)(X-M) = \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(Y_1) \tag{5.8}$$

$$\left(-\frac{2\bar{a}\nu_1^2(C)\nu_2}{\nu_2(C)} - \nu_1(Y_2)\nu_2\right)(X-M) = \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(Y_2) \tag{5.9}$$

Ao isolar $\nu_2(X-M)$ na equação 5.8, substituir na equação 5.9 e fazer as simplificações necessárias, obtemos:

$$b\nu_2^3(C)\nu_1(Y_2) = -\bar{a}\nu_1^3(C)\nu_2(Y_1). \tag{5.10}$$

Daí, $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, onde $\lambda = \left(\dfrac{\nu_1^2(Y_2)}{\nu_2^2(Y_1)}\dfrac{h_1(Y_1,Y_1)}{h_2(Y_2,Y_2)}\right)\dfrac{1}{3}$, o que prova o teorema. ■

Lema 5.5 *Se $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, então:*

$$C = A\left(Y_1 - \frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Y_2\right) + \alpha Z$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

e

$$X - M = B\left(Y_1 + \frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Y_2\right) + \beta Z,$$

onde $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* Z *é um vetor diretor da reta de interseção dos planos tangentes em* p_1 *e* p_2*, e* $B = -\dfrac{\lambda A}{2(\lambda + 2Ab)}$.

Demonstração: Note que a corda pode ser escrita como uma combinação de Y_1, Y_2 e Z, ou seja:

$$C = AY_1 + \zeta Y_2 + \alpha Z.$$

Logo, $\nu_1(C) = \zeta\nu_1(Y_2)$ e $\nu_2(C) = A\nu_2(Y_1)$.

Como $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, segue que $\zeta = \dfrac{-\lambda\nu_2(Y_1)A}{\nu_1(Y_2)}$, o que prova a primeira equação do lema.

Por outro lado, como $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, segue da equação do plano médio que $\nu_1(X - M) = \lambda\nu_2(X - M)$.

Daí, ao escrever $X - M$ como combinação de Y_1, Y_2 e Z, ou seja, $X - M = BY_1 + \delta Y_2 + \beta Z$, obtemos $\nu_1(X - M) = \delta\nu_1(Y_2)$ e $\nu_2(X - M) = B\nu_2(Y_1)$ e, portanto $\delta = \dfrac{\lambda\nu_2(Y_1)B}{\nu_1(Y_2)}$.

Da equação 5.8 temos:

$$\nu_2(X - M) = \frac{-\lambda\nu_2(C)\nu_2(Y_1)}{2(\lambda\nu_2(Y_1) + 2b\nu_2(C))}.$$

Logo, $B = -\dfrac{\lambda\nu_2(C)}{2(\lambda\nu_2(Y_1) + 2b\nu_2(C))} = -\dfrac{\lambda A}{2(\lambda + 2Ab)}$. ■

No próximo resultado, mostraremos que α e β no lema anterior são nulos se as duas últimas equações do sistema 5.2 forem satisfeitas.

Proposição 5.6 *O envelope da família* F *de planos médios tem solução se, e somente se:*

$$\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C) \quad e \quad C, Y_1 \text{ e } Y_2 \text{ são coplanares.}$$

Além disso, o ponto do envelope correspondente a esse par de pontos na superfície é dado por:

$$X - M = B\left(Y_1 + \frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Y_2\right), \tag{5.11}$$

onde $B = -\dfrac{\lambda\nu_2(C)}{2(\lambda\nu_2(Y_1) + 2b\nu_2(C))}$.

Demonstração: Para provar que $\alpha = \beta = 0$, usaremos as duas últimas equações do sistema 5.2, ou seja, que $F_{p_i} \cdot Z = 0, i = 1, 2$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

A derivada $F_{p_1}(Z)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F_{p_1}(Z) &= \left((d\nu_1(p_1)\cdot Z)(C) + \nu_1(C_{p_1}\cdot Z)\right)\nu_2(X-M)+ \\ &\quad +\nu_1(C)\nu_2(-M_{p_1}\cdot Z) + \nu_2(C_{p_1}\cdot Z)\nu_1(X-M)+ \\ &\quad +\nu_2(C)\left((d\nu_1(p_1)\cdot Z)(X-M) + \nu_1(-M_{p_1}\cdot Z)\right). \end{aligned}$$

Da proposição 4.14, temos $(d\nu_1(p_1)\cdot Z)(C) = -h_1(Z, C^T)$ e $(d\nu_1(p_1)\cdot Z)(X-M) = -h_1(Z,(X-M)^T)$.

Daí:

$$F_{p_1}(Z) = -h_1(Z,C^T)\nu_2(X-M) - \nu_2(C)h_1(Z,(X-M)^T)$$

Pelo lema 5.5, C^T e $(X-M)^T$ são dados por:

$$C^T = A\left(Y_1 - \frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Y_2\right) + \alpha Z \quad \text{e}$$

$$(X-M)^T = B\left(Y_1 + \frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Y_2\right) + \beta Z.$$

Assim:

$$\begin{aligned} F_{p_1}(Z) &= \left(-\frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Ah_1(Z,Y_2^T) + \alpha h_1(Z,Z)\right)B\nu_2(Y_1)+ \\ &\quad +A\nu_2(Y_1)\left(\frac{\lambda\nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)}Bh_1(Z,Y_2^T) + \beta h_1(Z,Z)\right) \\ &= h_1(Z,Z)\nu_2(Y_1)(\alpha B + \beta A). \end{aligned} \tag{5.12}$$

De maneira análoga se calcula $F_{p_2}Z = \lambda h_2(Z,Z)\nu_2(Y_1)(-\alpha B + \beta A)$.

Como as métricas são positivas definidas, e A, B, $\nu_2(Y_1)$ e λ são não nulos, pois os planos tangentes são concorrentes, segue das equações $F_{p_1}Z = F_{p_2}Z = 0$ que $\alpha = \beta = 0$. ■

Portanto, a corda C e os campos Y_1 e Y_2 são coplanares. Isto significa que toda a geometria do envelope dos planos médios ocorre no plano gerado por Y_1 e Y_2.

5.1.1 *SC3C* - Definição e regularidade

Dada uma superfície convexa não-degenerada S, definimos:

Definição 5.1 *A Superfície de Centros de* $3+3$*-Cônicas - SC3C é o fecho do lugar geométrico dos centros das cônicas que têm pelo menos contato de ordem* 3 *com a superfície* S*, em dois ou mais pontos diferentes, em direções ortogonais à interseção dos planos tangentes na métrica de Blaschke de* S*.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

No que segue, provaremos que em pontos com planos tangentes concorrentes, o EPM é equivalente a $SC3C$. Mostremos primeiro que o EPM está contido na $SC3C$:

Proposição 5.7 $EPM \subset SC3C$

Demonstração: Seja $x \in EPM$, então pelo teorema 5.6, Y_1, Y_2 e C são coplanares e x pertence ao plano π gerado por estes vetores, e $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, onde $\lambda = \left(\frac{\nu_1^2(Y_2)}{\nu_2^2(Y_1)}\frac{h_1(Y_1,Y_1)}{h_2(Y_2,Y_2)}\right)^{\frac{1}{3}}$. Assim, estamos nas mesmas condições do caso de curvas planas. Daí, pela proposição 3.8 existe uma cônica que faz contato de pelo menos ordem 3 com as curvas obtidas pela interseção de π com as superfícies S_1 e S_2, em no mínimo dois pontos distintos. Portanto $x \in SC3C$. ■

Para estudar a estrutura local do $AESS$, apresentamos no lema 3.15, um modelo local para as curvas. Aqui também apresentaremos um modelo local de superfícies para estudar a regularidade da $SC3C$ e também provar a recíproca do teorema 5.6, ou seja, que se X é centro de uma $3+3$-cônica com a superfície em direções privilegiadas, então $X \in EPM$.

Seja X um ponto da $SC3C$ de uma superfície S associado ao par p_1 e p_2 em S. Sejam S_1 e S_2 parametrizações em torno de p_1 e p_2, respectivamente.

Lema 5.8 *Podemos assumir por transformações afins que as parametrizações locais de S_1 e S_2 são:*

$$X_1(u_1,v_1) = \left(u_1, v_1, 1 + \frac{p}{c}u_1 - \frac{(p^2+c)}{2c^2}u_1^2 + f_{0,2}v_1^2 + \sum_{i=0}^{3} f_{3-i,i}u_1^{3-i}v_1^i + O(4)\right),$$

$$X_2(u_2,v_2) = \left(u_2, v_2, -1 - \frac{p}{c}u_2 + \frac{(p^2+c)}{2c^2}u_2^2 + g_{0,2}v_2^2 + \sum_{i=0}^{3} g_{3-i,i}iu_2^{3-i}v_2^i + O(4)\right),$$

respectivamente, onde $(p,0,0)$ é o centro da cônica e $c \in \mathbb{R}$ tal que: $c > 0$, então a cônica é uma elipse e, se $c < 0$, então a cônica é uma hipérbole.

Demonstração: Seja X um ponto na $SC3C$ associado ao par $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$. Sabemos que X é centro de uma cônica que faz contato de ordem 3 com a superfície em p_1 e p_2 em direções ortogonais à interseção dos planos tangentes destes pontos. Colocando um sistema de coordenadas adequado e fazendo transformações afins, podemos supor que a cônica que faz um $3+3$-contato com os pedaços de superfícies S_1 e S_2 nas direções Y_1 e Y_2, esteja centrada em $(p,0,0)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

De fato, por um cisalhamento podemos considerar que o plano médio seja ortogonal à corda formada pelos pontos p_1 e p_2. Considere o eixo z como sendo a reta que contém os pontos p_1 e p_2, e seja o ponto médio a origem do sistema de coordenadas. Desta forma, o plano médio é o plano $z = 0$. O eixo x será a reta que contém o centro da $3 + 3$-cônica e a origem.

Por um cisalhamento no plano $z = 0$, podemos fazer com que a reta de interseção dos planos tangentes a S_1 e a S_2 nos pontos p_1 e p_2 fique ortogonal ao eixo x. Desta forma, o eixo y é exatamente a reta de interseção dos planos tangentes.

Note que com esta construção, Y_1 e Y_2 pertencem ao plano $y = 0$ (pois Y_1, Y_2 e C são coplanares) e, como são ortogonais, nas métricas de Blaschke, à direção Z da reta de interseção, isto implica que as parametrizações não possuem termos mistos, veja lema 4.12.

Por fim, via transformações afins, concluímos que as parametrizações de S_1 e S_2 podem ser escritas como proposto no lema. ■

Observação 5.9 *A ideia para encontrar as parametrizações é a mesma utilizada no lema 3.15.*

Agora, vamos provar que cada ponto da $SC3C$ está contido no EPM:

Corolário 5.10 $SC3C \subset EPM$.

Demonstração: Seguindo as ideais do lema anterior, temos que provar que $(p, 0, 0) \in EPM$. Na origem, o sistema $F = F_{u_1} = F_{v_1} = F_{u_2} = F_{v_2} = 0$ é dado por:

$$\begin{cases} -2z = 0 \\ x + pz - p = 0 \\ 2f_{0,2}y = 0 \\ x - pz - p = 0 \\ 2g_{0,2}y = 0 \end{cases}$$

Claramente o ponto $(p, 0, 0)$ satisfaz o sistema acima. ■

Sejam $\bar{\nu_i} = f_i\nu_i$ funcionais lineares arbitrários que anulam os planos tangentes de S_i em p_i, onde f_i são funções não nulas e $i = 1, 2$. Defina a métrica:

$$\bar{h_i}(X, Y) = -\left(D_X\bar{\nu_i}\right)(Y),$$

para $X, Y \in T_{p_i}S_i$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Note que $\bar{h_i} = f_i h_i$, pois:

$$\begin{aligned}
\bar{h_i}(X,Y) &= -\left(D_X \bar{\nu_i}\right)(Y) \\
&= -\left(D_X f_i \nu_i\right)(Y) \\
&= -\left(X(f_i)\nu_i + f_i D_X \nu_i\right)(Y) \\
&= -X(f_i)\nu_i(Y) - f_i h_i(X,Y) \\
&= -f_i h_i(X,Y)
\end{aligned}$$

Considere $\bar{F}(p_1, p_2, \bar{X}) = \bar{\nu_1}(C)\bar{\nu_2}(\bar{X} - M) + \bar{\nu_2}(C)\bar{\nu_1}(\bar{X} - M) = 0$ a equação do plano médio. Então temos o seguinte:

Corolário 5.11 *O envelope de $\bar{F}$ coincide com o envelope de F.*

Demonstração: Para estes novos funcionais, o teorema 5.6 diz que o ponto do envelope dos planos médios é dado por:

$$\bar{X} - M = \bar{B}\left(Y_1 + \frac{\bar{\lambda}\bar{\nu_2}(Y_1)}{\bar{\nu_1}(Y_2)} Y_2\right),$$

onde $\bar{B} = -\dfrac{\bar{\lambda}\bar{\nu_2}(C)}{2(\bar{\lambda}\bar{\nu_2}(Y_1) + 2\bar{b}\bar{\nu_2}(C))}$ e $\bar{b} = -\dfrac{\bar{h_1}(Y_1, Y_1)}{\bar{\nu_2}(Y_1)}$.

Como $\bar{\nu_i} = f_i \nu_i$, segue que $\bar{\lambda} = \dfrac{f_1}{f_2}\lambda, \bar{b} = \dfrac{f_1}{f_2} b$ e $\bar{B} = B$. De fato:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \left(\frac{\bar{h_1}(Y_1, Y_1)\bar{\nu_1}^2(Y_2)}{\bar{h_2}(Y_2, Y_2)\bar{\nu_2}^2(Y_1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{f_1 h_1(Y_1, Y_1) f_1^2 \nu_1^2(Y_2)}{f_2 h_2(Y_2, Y_2) f_2^2 \nu_2^2(Y_1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{f_1}{f_2}\lambda,
\end{aligned}$$

os outros seguem de forma análoga.

Logo, o ponto do envelope é dado por

$$\begin{aligned}
\bar{X} - M &= \bar{B}\left(Y_1 + \frac{\bar{\lambda}\bar{\nu_2}(Y_1)}{\bar{\nu_1}(Y_2)} Y_2\right) \\
&= B\left(Y_1 + \frac{\dfrac{f_1}{f_2}\lambda f_2 \nu_2(Y_1)}{f_1 \nu_1(Y_2)} Y_2\right) \\
&= B\left(Y_1 + \frac{\lambda \nu_2(Y_1)}{\nu_1(Y_2)} Y_2\right) \\
&= X - M.
\end{aligned}$$

■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Observação 5.12 *O corolário 5.11 nos permite, por exemplo, definir o plano médio na forma:*

$$N_1(C)N_2(X-M)+N_2(C)N_1(X-M)=0,$$

onde N_i são quaisquer funcionais lineares que anulam o tangente a S_i em p_i.

No que segue, passamos a estudar a regularidade da $SC3C$.

Seja $F(u_1,v_1,u_2,v_2,x,y,z)=0$ a equação do plano médio de p_1 e p_2 S_1. Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & (u_1,v_1,u_2,v_2,X) & \longmapsto & H(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=(F,F_{u_1},F_{v_1},F_{u_2},F_{v_2}) \end{array}$$

Observe que os valores de X para os quais $H\equiv 0$ são exatamente aqueles que pertencem ao EPM. Note que, se $0\in\mathbb{R}^5$ é valor regular da aplicação H, então $H^{-1}(0)$ é uma variedade bidimensional de $\mathbb{R}^7$. Queremos determinar qual(is) a(s) condição(ões) para a $SC3C$ de S ser suave, ou seja, para que $\pi_2(H^{-1}(0))$ seja suave, onde $\pi_2(u_1,v_1,u_2,v_2,x,y,z)=(x,y,z)$.

A Jacobiana da aplicação H é:

$$J_H=\left(\begin{array}{cccc|ccc} F_{u_1} & F_{v_1} & F_{u_2} & F_{v_2} & F_x & F_y & F_z \\ \hline & & & & F_{u_1x} & F_{u_1y} & F_{u_1z} \\ & & & & F_{v_1x} & F_{v_1y} & F_{v_1z} \\ & J_2H & & & F_{u_2x} & F_{u_2y} & F_{u_2z} \\ & & & & F_{v_2x} & F_{v_2y} & F_{v_2z} \end{array}\right),$$

onde J_2H é a matriz das segundas derivadas de F com relação aos parâmetros u_1,v_1,u_2,v_2, ou seja:

$$J_2H=\begin{pmatrix} F_{u_1u_1} & F_{u_1v_1} & F_{u_1u_2} & F_{u_1v_2} \\ F_{v_1u_1} & F_{v_1v_1} & F_{v_1u_2} & F_{v_1v_2} \\ F_{u_2u_1} & F_{u_2v_1} & F_{u_2u_2} & F_{u_2v_2} \\ F_{v_2u_1} & F_{v_2v_1} & F_{v_2u_2} & F_{v_2v_2} \end{pmatrix}.$$

No nosso modelo, temos que J_2H no ponto $(0,0,0,0,p,0,0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 3p^2+3p^4-6pf_{3,0} & -2pf_{2,1} & 0 & 0 \\ -2pf_{2,1} & -2f_{0,2}p^2-2f_{2,1}p & 0 & (f_{0,2}+g_{0,2})(p^2+1) \\ 0 & 0 & -3p^4-3p^2-6pg_{3,0} & -2pg_{2,1} \\ 0 & (f_{0,2}+g_{0,2})(p^2+1) & -2pg_{2,1} & -2g_{0,2}p^2-2pg_{1,2} \end{pmatrix}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Denotaremos o $\det(J_2H(0,0,0,0,p,0,0))$ por Δ.

Teorema 5.13 *Considere as superfícies apresentadas no lema 5.8. Se $\Delta \neq 0$, então SC3C é suave.*

Demonstração:

No ponto $(0,0,0,0,p,0,0)$ a jacobiana é dada por:

$$J_H(0,0,0,0,p,0,0) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & & & & 1 & 0 & p \\ & & & & 0 & -2p_0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c|}{J_2H(0,0,0,0,p,0,0)} & -1 & 0 & p \\ & & & & 0 & -2q_0 & 0 \end{array}\right).$$

Observe que a matriz acima tem posto máximo, pois a matriz quadrada selecionada na matriz acima tem determinante não nulo por hipótese ($\Delta \neq 0$), e a primeira linha é linearmente independente com a demais. Assim, $H^{-1}(0,0,0,0,0)$ é uma variedade bidimensional em $\mathbb{R}^4$.

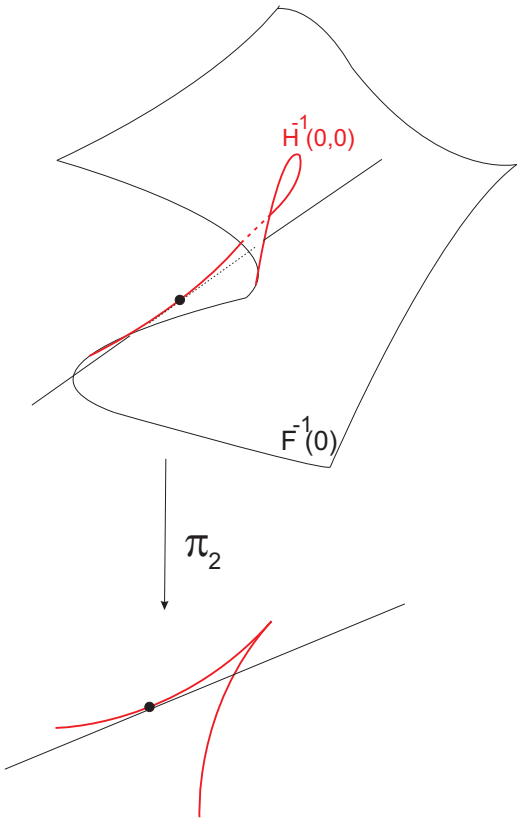


Figura 5.2: A condição de suavidade para $\pi_2(H^{-1}(0))$ é que o tangente não seja vertical.

Observe ainda que a *SC3C* corresponde a $\pi_2(H^{-1}(0,0,0,0,0))$, e este conjunto é suave se $\ker(DH) \cap \ker(d\pi_2) = \{0\}$. A condição de suavidade ocorre

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

quando o determinante da matriz selecionada for não-nulo, que é justamente a condição dada no teorema.

■

Observação 5.14 *Sabemos do teorema 3.13 que se o AESS de um par de curvas é um segmento de reta, então existe uma reflexão afim que leva uma curva na outra. Este fato não é verdadeiro para a SC3C. Ou seja, se o SC3C de um par de superfícies contém parte de um plano, então não necessariamente existe uma reflexão afim que leva um "pedaço" de superfície no outro. O exemplo a seguir elucida esta observação.*

Exemplo 5.15 *Considere $\gamma_1(t) = (t, 0, f(t))$ uma curva suave convexa. Sabemos do teorema 3.13 que o AESS de $\gamma_1(t)$ e de*

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \lambda f(t) \\ 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}$$

onde λ é uma constante, é um segmento de reta.

Considere as superfícies obtidas pela rotação de γ_1 e γ_2 em torno do eixo z, ou seja:

$$X(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, f(t))$$

e

$$Y(t, \theta) = ((t - \lambda f(t))\cos\theta, (t - \lambda f(t))\sin\theta, -f(t)).$$

A interseção dos planos tangentes nos pontos $p_1 = X(t, \theta)$ e $p_2 = Y(t, \theta)$ tem como direção o vetor $Z = (-tf'(t - \lambda f)(2 - \lambda f')\sin\theta, tf'(t - \lambda f)(2 - \lambda f')\cos\theta, 0)$.

Observe que os vetores $Y_1 = X_t, Y_2 = Y_t$ são ortogonais na métrica euclideana a Z, e este está contido no plano $z = 0$. Assim, o plano médio é o plano $z = 0$ para quaisquer p_1 e p_2, portanto a SC3C deste par de superfícies está contida no plano $z = 0$. Mas, não existe uma reflexão afim que leva uma superfície na outra.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

6
EPM : planos tangentes paralelos não coincidentes

Neste capítulo estudamos um dos casos limites do plano médio, a saber, o caso em que os planos tangentes passam a ser paralelos e não coincidentes. Neste caso, o envelope de planos médios dá origem ao conjunto Mid-Parallel Tangents Surface - $MPTS$.

6.1
Planos tangentes paralelos não coincidentes

Considere duas superfícies convexas não degeneradas S_1 e S_2, parametrizadas por:

$$X_1(u_1, v_1) = (u_1, v_1, f(u_1, v_1)) \quad \text{e} \quad X_2(u_2, v_2) = (u_2, v_2, g(u_2, v_2)),$$

onde $f(u_1, v_1) = \sum_{i=0}^{2} f_{2-i,i} u_1^{2-i} v_1^i + O(3)$ e $g(u_2, v_2) = k + \sum_{i=0}^{2} g_{2-i,i} u_2^{2-i} v_2^i + O(3)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Sejam $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$ pontos em que os planos tangentes são paralelos e não coincidentes. Neste caso, o plano médio será o plano passando pelo ponto médio dos pontos p_1 e p_2, paralelo aos planos tangentes em p_1 e p_2.

Definição 6.1 *O Mid-Parallel Tangents Surface - $MPTS$ é o conjunto dos pontos médios dos pontos $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$ nos quais os planos tangentes são paralelos.*

Uma parametrização para o $MPTS$ é dada por:

$$M(u_1, v_1, u_2, v_2) = \left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{f(u_1, v_1) + g(u_2, v_2)}{2} \right),$$

onde $f_{u_1} = g_{u_2}$ e $f_{v_1} = g_{v_2}$.

Proposição 6.2 (Warder, [1]) *O plano tangente em qualquer ponto suave do $MPTS$ é paralelo aos planos tangentes a S_1 e a S_2 nos pontos que deram origem a aquele ponto. Logo, o $MPTS$ é formado como um envelope de planos paralelos a planos tangentes a S_1 e S_2.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Demonstração: O plano tangente a $MPTS$ é a imagem de um vetor genérico de $\mathbb{R}^4$ sobre a matriz jacobiana de M, isto é:

$$T_pM = JM(\mathbb{R}^4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{f_{u_1}}{2} & \frac{f_{v_1}}{2} & \frac{g_{u_2}}{2} & \frac{g_{v_2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

A condição de paralelismo nos dá que $f_{u_1} = g_{u_2}$ e $f_{v_1} = g_{v_2}$, logo o vetor genérico do plano tangente pode ser escrito por:

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}(1, 0, f_{u_1}) + \frac{\beta+\delta}{2}(0, 1, f_{v_1}) \text{ ou}$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}(1, 0, g_{u_2}) + \frac{\beta+\delta}{2}(0, 1, f_{v_2}).$$

Assim, este vetor claramente é paralelo ao plano tangente a S_1 em $(u_1, v_1, f(u_1, v_1))$ enquanto o segundo é paralelo ao plano tangente a S_2 em $(u_2, v_2, g(u_2, v_2))$. Logo, o tangente ao $MPTS$ é paralelo aos planos tangentes nos pontos que geraram o ponto do $MPTS$ e como qualquer superfície suave é o envelope de seus planos tangentes concluímos o resultado. ■

No que segue, daremos condições para que o $MPTS$ seja suave. Para outra demonstração deste fato veja [1].

Teorema 6.3 *O $MPTS$ é suave em um ponto w se* $\det[Hessf + Hessg] \neq 0$, *onde as hessianas são calculadas nos pontos que têm w como ponto médio.*

Demonstração:

A condição de paralelismo entre os planos tangentes é dada por:

$$f_{u_1}(u_1, v_1) = g_{u_2}(u_2, v_2) \quad \text{e} \quad f_{v_1}(u_1, v_1) = g_{v_2}(u_2, v_2),$$

onde o sub-escrito nas funções corresponde às derivadas parciais. Escreva $u_2 = h^1(u_1, v_1)$ e $v_2 = h^2(u_1, v_1)$, ou seja:

$$u_2 = h^1_{10}u_1 + h^1_{01}v_1 + h^1_{20}u_1^2 + h^1_{11}u_1v_1 + h^1_{02}v_1^2 + \cdots$$

$$v_2 = h^2_{10}u_1 + h^2_{01}v_1 + h^2_{20}u_1^2 + h^2_{11}u_1v_1 + h^2_{02}v_1^2 + \cdots.$$

Daí, pode-se obter todos os coeficientes de h^1 e h^2. Os coeficientes dos termos lineares são dados por:

$$\begin{pmatrix} 2g_{2,0} & g_{1,1} \\ g_{1,1} & 2g_{0,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1_{10} & h^2_{10} \\ h^1_{01} & h^2_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f_{2,0} & f_{1,1} \\ f_{1,1} & 2f_{0,2} \end{pmatrix}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$H = B^{-1}A,$$

onde $H = \begin{pmatrix} h^1_{10} & h^1_{01} \\ h^2_{10} & h^2_{01} \end{pmatrix}$, $B = Hess\ g$ e $A = Hess\ f$. Os termos $h^1_{10}, h^2_{10}, h^1_{01}$ e h^2_{01} são dados explicitamente por:

$$h^1_{10} = \frac{4b_{02}a_{20} - a_{11}b_{11}}{4b_{20}b_{02} - b^2_{11}} \quad h^2_{10} = \frac{2b_{20}a_{11} - 2a_{20}b_{11}}{4b_{20}b_{02} - b^2_{11}}$$
$$h^1_{01} = \frac{2b_{02}a_{11} - 2a_{02}b_{11}}{4b_{20}b_{02} - b^2_{11}} \quad h^2_{01} = \frac{4b_{20}a_{02} - a_{11}b_{11}}{4b_{20}b_{02} - b^2_{11}}$$

Desta forma, podemos parametrizar o $MPTS$ pelos parâmetros u_1, v_1. Denotaremos o $MPTS$ por $M(u_1, v_1)$, onde:

$$\begin{aligned} M(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2, v_1 + v_2, f(u_1, v_1) + g(u_2, v_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u_1 + h^1_{10}u_1 + h^1_{01}v_1 + \cdots, v_1 + h^2_{10}u_1 + h^2_{01}v_1 + \cdots, f + g\right) \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana de M na origem é:

$$J_M(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + h^1_{10} & h^1_{01} \\ h^2_{10} & 1 + h^2_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o $MPTS$ é suave na origem desde que:

$$\det \begin{pmatrix} 1 + h^1_{10} & h^2_{10} \\ h^1_{01} & 1 + h^2_{01} \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \det(I + H) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B^{-1}B + B^{-1}A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A + B) \neq 0,$$

pois $\det\ B \neq 0$. E, portanto fica provada a asserção feita.

■

A seguinte proposição fornece condições para que o $MPTS$ seja difeomorfo a uma aresta cuspidal.

Proposição 6.4 (Warder, [1]) *O $MPTS$ é difeomorfo a uma aresta cuspidal se $f_{0,2} + g_{0,2} \neq 0$, $\zeta = 0$ e $\eta \neq 0$, onde*

$$\zeta = g^2_{1,1} - 4(f_{2,0} + g_{2,0})(f_{0,2} - g_{0,2})$$

e

$$\eta = f_{0,3} - g_{0,3} - \left(\frac{f_{1,2} - g_{1,2}}{2(f_{0,2} + g_{0,2})}\right) g_{1,1} + \left(\frac{f_{2,1} - g_{2,1}}{4(f_{0,2} + g_{0,2})^2}\right) g^2_{1,1} -$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$-\left(\frac{f_{3,0}-g_{3,0}}{8(f_{0,2}+g_{0,2})^3}\right)g_{1,1}^3.$$

No que segue estamos interessados em estudar o comportamento do $MPTS$ nos pontos onde se encontra com a $SC3C$. Provaremos no próximo resultado que, genericamente, nos pontos onde o $MPTS$ e a $SC3C$ se encontram, o $MPTS$ é uma aresta cuspidal.

Teorema 6.5 *Seja $x_0 \in MPTS \cap SC3C$. Se $f_{0,3}-g_{0,3}\neq 0$ e $f_{0,2}+g_{0,2}\neq 0$, então existe uma vizinhança de x_0, na qual o $MPTS$ é uma aresta cuspidal.*

Demonstração: Seja $x_0 \in MPTS \cap SC3C$. Como $x_0 \in SC3C \cap MPTS$, segue que x_0 é um ponto limite da $SC3C$. Portanto x_0 é centro de uma cônica que faz um $3+3$-contato com S_1 e S_2 nas direções $Y_1 \in T_{p_1}S_1$ e $Y_2 \in T_{p_2}S_2$ as quais são ortogonais, nas respectivas métricas de Blaschke, a uma direção Z. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_0=(0,0,0)$, $p_1=(0,0,1)$, $p_2=(0,0,-1), Y_1=(1,0,0)$ e que $Z=(0,1,0)$. Assim, como os eixos são ortogonais na métrica de Blaschke, segue do lema 4.12 que $f_{1,1}=0$.

Como $x_0 \in SC3C$, segue do teorema 5.4 que Y_1, C e Y_2 são coplanares. Portanto $Y_2=(1,0,0)$, o que implica, novamente pelo lema 4.12 que $g_{1,1}=0$. Como x_0 é centro de uma $3+3$ cônica, segue que $f_{2,0}+g_{2,0}=0$.

Assuma que $f_{2,0}=1$ e $g_{2,0}=-1$. Daí, as superfícies S_1 e S_2 são dadas pelos seguintes gráficos:

$$f(u,v)=-1+u^2+f_{0,2}v^2+\sum_{i=0}^{3}f_{3-i,i}u^{3-i}v^i+O(4)$$

e

$$g(s,t)=1-s^2+g_{0,2}t^2+\sum_{i=0}^{3}g_{3-i,i}s^{3-i}t^i+O(4).$$

Pelo lema 6.4, concluímos que no centro de uma $3+3$ cônica o $MPTS$ é uma aresta cuspidal, pois $\zeta=0$ e $\eta=f_{0,3}-g_{0,3}\neq 0$. ■

Observação 6.6 *Outra forma de verificar que o $MPTS$ na vizinhança do centro de uma $3+3$ cônica é uma aresta cuspidal é explicitar a parametrização do $MPTS$. As condições de paralelismo nos dizem que podemos escrever u_2 e v_2 como funções de u_1 e v_1, isto segue do teorema da função implícita. Assim, podemos escrever:*

$$u_2=h_{10}^1u_1+h_{01}^1v_1+h_{20}^1u_1^2+h_{11}^1u_1v_1+h_{02}^1v_1^2+\cdots$$

$$v_2=h_{10}^2u_1+h_{01}^2v_1+h_{20}^2u_1^2+h_{11}^2u_1v_1+h_{02}^2v_1^2+\cdots.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Daí, através das relações de paralelismo, obtemos todos os coeficientes de h^1 *e* h^2*. Por exemplo:*

$$h^1_{10} = -1, h^1_{01} = h^2_{10} = 0, h^2_{01} = \frac{f_{0,2}}{g_{0,2}},$$

$$h^1_{20} = -\frac{3(f_{3,0} - g_{30})}{2} \qquad h^1_{11} = -\frac{f_{2,1}g_{0,2} + g_{2,1}f_{0,2}}{g_{0,2}}$$

$$h^1_{02} = -\frac{f_{1,2}g^2_{0,2} - g_{1,2}f^2_{0,2}}{2g^2_{0,2}} \qquad h^2_{20} = \frac{f_{2,1} - g_{2,1}}{2g_{0,2}}$$

$$h^2_{11} = \frac{f_{1,2}g_{0,2} + g_{1,2}f_{0,2}}{g^2_{0,2}} \qquad h^2_{02} = \frac{3f_{0,3}g^2_{0,2} - 3g_{0,3}f^2_{0,2}}{2g^3_{02}}.$$

Desta forma, podemos parametrizar o $MPTS$ *pelos parâmetros* u_1, v_1*. Assim:*

$$\begin{aligned} M(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2, v_1 + v_2, f(u_1, v_1) + g(u_2, v_2)\right) \\ &= \left(M_1(u_1, v_1), M_2(u_1, v_1), M_3(u_1, v_1)\right), \end{aligned}$$

onde:

$$M_1 = \frac{-f_{2,1}g_{0,2} - g_{2,1}f_{0,2}}{2g_{0,2}}u_1v_1 - \frac{(f_{1,2}g^2_{0,2} - g_{1,2}f^2_{0,2})}{4g^2_{0,2}}v_1^2 - \frac{3}{4}(f_{3,0} - g_{3,0})u_1^2 + O(3),$$

$$M_2(u_1, v_1) = \frac{f_{0,2} + g_{0,2}}{2g_{0,2}}v_1 + O(2)$$

$$M_3(u_1, v_1) = f_{0,2}\frac{f_{0,2} + g_{0,2}}{2g_{0,2}}v_1^2 - (f_{3,0} - g_{3,0})u_1^3 + O(3).$$

Portanto, fica claro que, se $f_{3,0} - g_{3,0} \neq 0$*, então o* $MPTS$ *é uma aresta cuspidal.*

Ao considerar, por exemplo, $f_{0,2} = 1, g_{0,2} = -2, f_{3,0} = 1, g_{3,0} = -2$ *e os demais coeficientes nulos, obtemos que a parametrização do* $MPTS$ *fica:*

$$M(u_1, v_1) = \left(-\frac{9u_1^2}{4} + O(3), \frac{v_1}{4} + O(2), \frac{v_1^2}{4} - 3u_1^3 + O(4)\right),$$

veja figura abaixo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

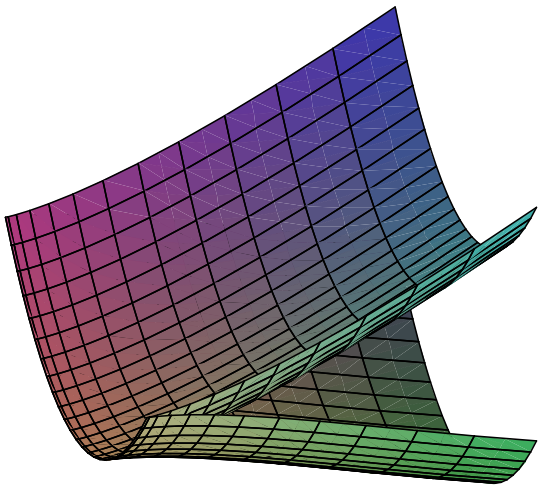


Figura 6.1: Comportamento do $MPTS$ na vizinhança do centro de uma $3+3$ cônica

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

7
Envelope dos Planos Médios: planos tangentes coincidentes

Neste capítulo apresentamos o outro caso limite do plano médio, ou seja, o caso em que os planos tangentes passam a ser coincidentes. Conseguimos relacionar o estudo com tópicos clássicos da geometria diferencial afim, como por exemplo, plano de Transon, quádrica de Moutard, cone de B. Su, etc. Provamos, no decorrer deste capítulo, que quando um ponto tende ao outro, o plano médio coincide com o plano de Transon de uma determinada tangente. Além disso, provamos que o conjunto solução do EPM é a Evoluta de Curvas Médias - ECM, conjunto apresentado pela primeira vez neste trabalho. Finalizamos com um resultado que fornece condições de suavidade para a ECM.

7.0.1
Preliminares

Alguns resultados clássicos como o Teorema da Função Implícita e o lema de Euler para funções homogêneas, serão muito utilizados nos teoremas desta seção.

Definição 7.1 *Uma função f é homogênea de grau k se, para todo $t > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$f(tx) = t^k f(x).$$

Lema 7.2 (de Euler) *Seja f uma função homogênea de grau k, de classe C^1. Então:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x).$$

Considere, no plano xyz, uma superfície regular S na vizinhança de um de seus pontos, digamos a origem. Assuma que o plano tangente neste ponto seja $z = 0$. Então a superfície pode ser escrita na forma:

$$z = f(x, y) = \sum_{i=0}^{2} f_{2-i,i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^{3} f_{3-i,i} x^{3-i} y^i + O(4)$$

Considere um ponto em S e T uma tangente neste ponto:

Teorema 7.3 (Transon, 1841, [7]) *As normais afins das seções planares que contém T formam um plano.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

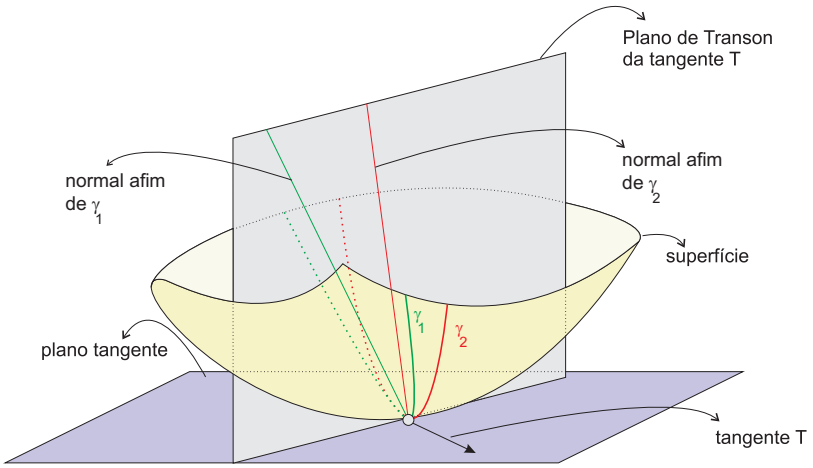


Figura 7.1: O plano de Transon da tangente T contém a normal afim de qualquer seção planar que contém T

Definição 7.4 *Ao plano do teorema 7.3 chamaremos de* **plano de Transon** *da tangente T.*

Dada uma tangente (ξ, η) na origem de S, a fórmula explícita para o plano de Transon, obtida em [8], é dada por:

$$A(\xi,\eta)x + B(\xi,\eta)y + C(\xi,\eta)z = 0, \tag{7.1}$$

onde

$$A(\xi,\eta) = (2f_{2,0}\xi + f_{1,1}\eta)(f_{2,0}\xi^2 + f_{1,1}\xi\eta + f_{0,1}\eta^2),$$

$$B(\xi,\eta) = (f_{1,1}\xi + 2f_{0,2}\eta)(f_{2,0}\xi^2 + f_{1,1}\xi\eta + f_{0,1}\eta^2),$$

$$C(\xi,\eta) = f_{3,0}\xi^3 + f_{2,1}\xi^2\eta + f_{1,2}\xi\eta^2 + f_{0,3}\eta^3.$$

O livro [9] também explicita uma fórmula para o plano de Transon de uma tangente.

Considere o sistema de todos os planos de Transon das tangentes T na origem, ou seja, o envelope dos planos de Transon. Este envelope tem como solução um cone passando pela origem, o qual é conhecido como Cone de B. Su. Isto significa que dois planos de Transon arbitrariamente próximos se interceptam em uma reta de direção N, a qual pertence ao cone de B. Su. Uma parametrização do cone de B. Su, encontrada em [8], é dada por:

$$\begin{aligned} x &= -2(-2f_{0,3}\eta^3\xi + 2f_{2,1}\eta^3\xi + 3f_{3,0}\eta^2\xi^2 - f_{1,2}\eta^2\xi^2 + f_{3,0}\xi^4 + f_{1,2}\eta^4) \\ y &= -2(f_{0,3}\eta^4 + 3\xi^2 f_{0,3}\eta^2 - f_{2,1}\xi^2\eta^2 - 2\eta f_{3,0}\xi^3 + 2\xi^3 f_{1,2}\eta + \xi^4 f_{2,1}) \\ z &= 2\xi^2\eta^2 + \xi^4 + \eta^4. \end{aligned} \tag{7.2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Definição 7.5 *À seção plana obtida pela interseção do plano gerado por N e T com a superfície S chamaremos de* **curva média** *associada à tangente T.*

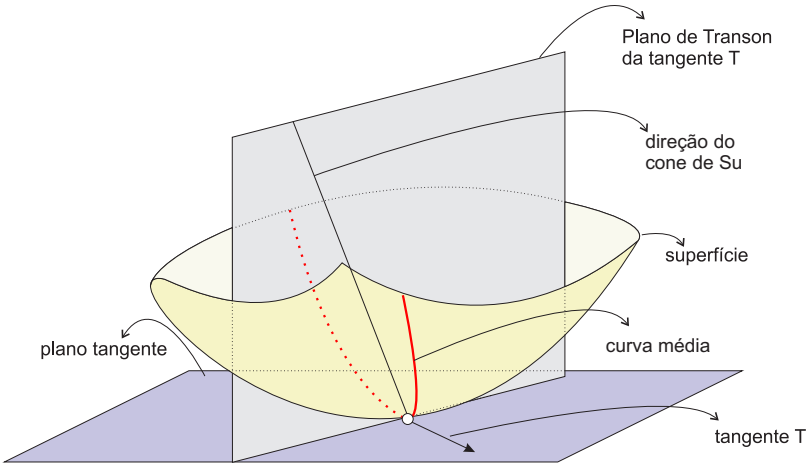


Figura 7.2: A curva média tem normal afim na direção do cone de B.Su

Teorema 7.6 (Moutard, 1880, [10]) *As cônicas osculadoras de todas as seções planares que contêm a tangente T formam uma quádrica.*

Juntamente com o plano de Transon de uma tangente T pode-se definir a quádrica de Moutard:

Definição 7.7 *A* **quádrica de Moutard** *da tangente T é a quádrica dada no teorema 7.6*

Exemplo 7.8 *Considere a superfície*

$$X(s,t) = \left(s, t, \frac{s^2+t^2}{2} + \frac{\sigma}{6}\left(s^3 - 3st^2\right) + s^4\right).$$

A quádrica de Moutard da tangente $\{(s,0,0); s \in \mathbb{R}\}$ tem equação implícita dada por:

$$0 = \frac{z}{8} - \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & \frac{\sigma}{48} \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{\sigma}{48} & 0 & \frac{18-\sigma^2}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \left(\frac{18-\sigma^2}{36}\right) z^2 + \left(\frac{\sigma x - 3}{24}\right) z = 0,$$

veja [8], pag 11.

O centro desta quádrica é $\left(-\frac{3\sigma}{72-5\sigma^2}, 0, \frac{9}{72-5\sigma^2}\right)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Proposição 7.9 *O centro da quádrica de Moutard de uma tangente T é um ponto da evoluta afim da curva média associada a esta tangente.*

Demonstração: Consideremos que $T = (1, 0)$, isto sempre é possível fazer via transformação afim.

Vamos explicitar a curva média associada à tangente T.

Observe que a direção N do cone de B. Su relacionada à tangente $T = (1, 0)$ é $N(1, 0) = (-2f_{3,0}, -2f_{2,1}, 1)$, veja equações 7.2.

O plano gerado por T e N é dado por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -2f_{3,0} & -2f_{2,1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + 2f_{2,1}z = 0.$$

A curva média associada à tangente T é obtida pela interseção deste plano com a superfície, ou seja:

$$\begin{cases} y + 2f_{2,1}z = 0 \\ z = f(x, y). \end{cases}$$

Ao substituir a primeira equação na segunda, obtemos a curva média implicitamente:

$$F(x, z) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{2}x^2 - 2f_{2,1}^2z^2 - f_{3,0}x^3 + 2f_{2,1}^2x^2z - 4f_{1,2}f_{2,1}^2xz^2 + 8f_{0,3}f_{2,1}^3z^3 - \\ -f_{4,0}x^4 + 2f_{3,1}f_{2,1}x^3z - 4f_{2,2}f_{2,1}^2x^2z^2 + 8f_{1,3}f_{2,1}^3xz^3 - 16f_{0,4}f_{2,1}^4z^4 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Note que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0, 0) = 1 \neq 0$ assim podemos escrever $z = \phi(x)$. É fácil verificar que:

$$z = \frac{1}{2}x^2 + f_{3,0}x^3 + \left(f_{4,0} - \frac{f_{2,1}^2}{2}\right)x^4 + \cdots$$

Da proposição 2.8, obtemos que a curvatura afim da curva média, na origem, é dada por:

$$\mu_\gamma(0) = -4(5f_{3,0}^2 - 2f_{4,0} + f_{2,1}^2).$$

Logo, o ponto da evoluta afim da curva média é $(0, 0, 0) + \dfrac{1}{\mu_\gamma(0)}N(1, 0)$, ou seja:

$$\left(\frac{f_{3,0}}{2(5f_{3,0}^2 - 2f_{4,0} + f_{2,1}^2)}, \frac{f_{2,1}}{2(5f_{3,0}^2 - 2f_{4,0} + f_{2,1}^2)}, -\frac{1}{4(5f_{3,0}^2 - 2f_{4,0} + f_{2,1}^2)}\right),$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

que é exatamente o centro da quádrica de Moutard da tangente $T = (1, 0)$ na origem. ■

7.0.2
Evoluta de Curvas Médias - ECM

Considere uma superfície S na vizinhança de um de seus pontos, por exemplo a origem. Suponha que o plano tangente na origem seja $z = 0$. Queremos estudar o Envelope dos Planos Médios - EPM no caso em que os pontos sobre esta superfície tendem a um único ponto.

Localmente, a menos de transformações afins, a superfície S pode se escrita como:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \sum_{i=0}^{3} f_{3-i,i} x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^{4} f_{4-i,i} x^{4-i} y^i + O(5). \qquad (7.3)$$

Considere p_1 e p_2 pontos sobre esta superfície. As parametrizações em torno desses pontos são dadas por:

$$X_1(u_1, v_1) = (u_1, v_1, f(u_1, v_1)) \quad \text{e} \quad X_2(u_2, v_2) = (u_2, v_2, f(u_2, v_2)).$$

A equação do plano médio para este par de pontos é dada por:

$$F(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0,$$

onde $F(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = N_1(C)N_2(X - M) + N_2(C)N_1(X - M)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, C$ é a corda que liga os pontos p_1 e p_2, M é ponto médio de p_1 e p_2 e $N_i(x, y, z)$, com $i = 1, 2$, são funcionais lineares que anulam os planos tangentes à superfície nos pontos p_1 e p_2, respectivamente. Aqui, usaremos os seguintes funcionais:

$$N_i(x, y, z) = \langle N_i, (x, y, z) \rangle ,$$

onde $<, >$ é o produto interno usual, N_i são os normais euclideanos a S_i em p_i. Isto pode ser feito conforme explicação dada no corolário 5.11 e observação 5.12.

Explicitamente, a equação do plano médio para o par p_1 e p_2 é dada por:

$$F(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = \left\{ \frac{1}{4}(u_1 - u_2) \left[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \right] + O(4) \right\} x +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4}(v_1 - v_2) \left[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \right] + O(4) \right\} y +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[f_{3,0}(u_1 - u_2)^3 + f_{2,1}(u_1 - u_2)^2 (v_1 - v_2) \right] z +$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$+\frac{1}{2}\left[f_{1,2}(u_1-u_2)(v_1-v_2)^2+f_{0,3}(v_1-v_2)^3+O(4)\right]z=0.$$

No próximo resultado, provaremos que ao fazer p_1 e p_2 tenderem a um ponto, digamos a origem, então o plano médio é o plano de Transon de uma tangente à superfície no ponto limite.

Lema 7.10 *Fixe $u_2=v_2=0$ e assuma $\frac{v_1}{u_1}=\lambda\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Então o limite dos planos médios quando (u_1,v_1) tende a $(0,0)$ é o plano de Transon da tangente $(1,\lambda)$ na origem.*

Demonstração: A equação do plano médio para este par de pontos é:

$$\left(\frac{u_1}{4}(u_1^2+v_1^2)+O(4)\right)x+\left(\frac{v_1}{4}(u_1^2+v_1^2)+O(4)\right)y+$$

$$+\left(\frac{1}{2}(f_{3,0}u_1^3+f_{2,1}u_1^2v_1+f_{1,2}u_1v_1^2+f_{0,3}v_1^3)+O(4)\right)z=O(4)$$

Como queremos fazer (u_1,v_1) tender a $(0,0)$, temos que u_1 ou v_1 é não nulo, digamos que seja $u_1\neq 0$. Assim, podemos fatorar u_1^3 na equação e esta fica:

$$\left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{v_1^2}{u_1^2}\right)+\frac{O(4)}{u_1^3}\right)x+\left(\frac{1}{4}\frac{v_1}{u_1}\left(1+\frac{v_1^2}{u_1^2}\right)+\frac{O(4)}{u_1^3}\right)y+$$

$$+\left(\frac{1}{2}(f_{3,0}+f_{2,1}\frac{v_1}{u_1}+f_{1,2}\frac{v_1^2}{u_1^2}+f_{0,3}\frac{v_1^3}{u_1^3})+\frac{O(4)}{u_1^3}\right)z=\frac{O(4)}{u_1^3}$$

Passando ao limite, quando u_1, v_1 tendem a zero, temos $\frac{O(4)}{u_1^3}\to 0$ pois $\frac{v_1}{u_1}=\lambda$. Logo o plano médio tende ao seguinte plano:

$$\frac{1}{4}\left(1+\lambda^2\right)x+\frac{1}{4}\lambda\left(1+\lambda^2\right)y+$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{3,0}+f_{2,1}\lambda+f_{1,2}\lambda^2+f_{0,3}\lambda^3\right)z=0,$$

que é o plano de Transon da tangente $(1,\lambda)$ na origem. ■

O envelope dos planos médios consiste do seguinte sistema:

$$\begin{cases} F(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=0 \\ F_{u_1}(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=0 \\ F_{v_1}(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=0 \\ F_{u_2}(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=0 \\ F_{v_2}(u_1,v_1,u_2,v_2,X)=0 \end{cases},$$

Este sistema é equivalente ao sistema:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

$$\begin{cases} F(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0 \\ F_{v_1}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) - F_{v_2}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0 \\ F_{u_1}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) - F_{u_2}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0 \\ F_{u_1}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) + F_{u_2}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0 \\ F_{v_1}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) + F_{v_2}(u_1, v_1, u_2, v_2, X) = 0 \end{cases}, \tag{7.4}$$

Proposição 7.11 *Fixe* $u_2 = v_2 = 0$ *e assuma* $\dfrac{v_1}{u_1} = \lambda \in \mathbb{R} \cup \infty$. *Então, no limite, a matriz ampliada do sistema 7.4 fica:*

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2}{2} & \frac{\lambda(1+\lambda^2)}{2} & f_{3,0} + f_{2,1}\lambda + f_{1,2}\lambda^2 + f_{0,3}\lambda^3 & 0 \\ \lambda & \frac{1+3\lambda^2}{2} & f_{2,1} + 2f_{1,2}\lambda + 3f_{0,3}\lambda^2 & 0 \\ \frac{3+\lambda^2}{2} & \lambda & 3f_{3,0} + 2f_{2,1}\lambda + f_{1,2}\lambda^2 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} \end{pmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} L_{41} &= \frac{f_{3,0}}{2}(5+3\lambda^2) + \frac{f_{2,1}}{2}(2\lambda+\lambda^3) - \frac{f_{0,3}}{2}\lambda^3 \\ L_{42} &= 3\frac{f_{3,0}}{2}\lambda + \frac{f_{2,1}}{2}(1+3\lambda^2) + \frac{f_{1,2}}{2}(\lambda+2\lambda^3) \\ L_{43} &= 2f_{4,0} + 3\frac{f_{3,1}}{2}\lambda + f_{2,2}\lambda^2 + \frac{f_{1,3}}{2}\lambda^3 \\ L_{44} &= \frac{1+\lambda^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{51} &= \frac{f_{3,0}}{2}(5+3\lambda^2) + \frac{f_{2,1}}{2}(2\lambda+\lambda^3) - \frac{f_{0,3}}{2}\lambda^3 \\ L_{52} &= 3\frac{f_{3,0}}{2}\lambda + \frac{f_{2,1}}{2}(1+3\lambda^2) + \frac{f_{1,2}}{2}(\lambda+2\lambda^3) \\ L_{53} &= 2f_{4,0} + 3\frac{f_{3,1}}{2}\lambda + f_{2,2}\lambda^2 + \frac{f_{1,3}}{2}\lambda^3 \\ L_{54} &= \frac{1+\lambda^2}{4} \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração segue de modo análogo ao raciocínio utilizado no lema 7.10 para todas as linhas do sistema. ■

A fim de usarmos a mesma notação de [8], escreveremos $(1, \lambda) = (\xi, \eta)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Assim, a matriz $E(\lambda) = E(\xi, \eta)$ fica:

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi(\xi^2+\eta^2)}{2} & \frac{\eta(\xi^2+\eta^2)}{2} & (f_{3,0}\xi^3 + f_{2,1}\xi^2\eta + f_{1,2}\xi\eta^2 + f_{0,3}\eta^3) & 0 \\ \xi\eta & \frac{\xi^2+3\eta^2}{2} & (f_{2,1}\xi^2 + 2f_{1,2}\xi\eta + 3f_{0,3}\eta^2) & 0 \\ \frac{3\xi^2+\eta^2}{2} & \xi\eta & (3f_{3,0}\xi^2 + 2f_{2,1}\xi\eta + f_{1,2}\eta^2) & 0 \\ L_{41}(\xi,\eta) & L_{42}(\xi,\eta) & L_{43}(\xi,\eta) & L_{44}(\xi,\eta) \\ L_{51}(\xi,\eta) & L_{52}(\xi,\eta) & L_{53}(\xi,\eta) & L_{54}(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Nomearemos as linhas do sistema cuja matriz ampliada é $E(\xi, \eta)$ por $L1, L2, L3, L4$ e $L5$ e denotaremos a função da linha $L1$ por $L1(\xi, \eta)$. Note que $L2$ e $L3$ são dadas por $L1_\eta$ e $L1_\xi$, respectivamente.

Lema 7.12 *$L1, L2$ e $L3$ geram uma direção N dada pela interseção do plano de Transon da tangente (ξ, η) com o cone de B. Su na origem.*

Demonstração: Observe que as três primeiras linhas $L1, L2$ e $L3$ do sistema acima são l.d., assim $L3$ pode ser desconsiderada. Isto se deve ao fato de que a função $L1$ ser uma função homogênea de grau 3, e portanto pelo lema de Euler 7.2, segue que $3L1 = \eta L1_\eta + \xi L1_\xi$.

Ao considerar $(\xi, \eta) = (1, 0)$, o sistema formado por $L1$ e $L2$ é dado por:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}f_{3,0}z &= 0 \\ \frac{1}{2}y + f_{2,1}z &= 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é:

$$x = -2f_{0,3}z$$

$$y = -2f_{2,1}z.$$

Note que a direção $N = (-2f_{0,3}, -2f_{2,1}, 1)$ da reta solução é exatamente a direção do cone de B. Su na origem da tangente $(1, 0)$, [8]. ■

Assim, para cada $T = (\xi, \eta)$ existe uma direção $N = N(\xi, \eta)$ do cone de B. Su na origem da superfície dada. Na verdade, esta direção coincide com a direção do normal afim da curva média associada à tangente T, ou seja, da curva interseção do plano gerado por (ξ, η) e por N.

Lema 7.13 *$L1, L2, L3$ e $L4$ geram o centro da quádrica de Moutard da tangente $T = (\xi, \eta)$.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Demonstração: A menos de uma transformação afim, podemos supor que a tangente (ξ, η) seja $(1, 0)$, claramente os coeficientes f_{ij} serão levados em outros coeficientes g_{ij}, mas por conveniência trabalharemos com os mesmos coeficientes. Ao considerar $\xi = 1, \eta = 0$ no sistema formado pelas linhas $L1, L2$ e $L4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}f_{3,0}z &= 0 \\ \frac{1}{2}y + f_{2,1}z &= 0 \\ \frac{5}{2}f_{3,0}x + \frac{f_{2,1}}{2}y + 2f_{4,0}z &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Cuja solução é dada por:

$$x = \frac{f_{3,0}}{2(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})},$$

$$y = \frac{f_{2,1}}{2(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})},$$

$$z = -\frac{1}{4(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})}.$$

Este é o centro da quádrica de Moutard da tangente $T = (1, 0, 0)$ na origem, [8]. ■

Proposição 7.14 *No caso em que os planos tangentes são coincidentes, o EPM admite solução apenas para no máximo seis tangentes.*

Demonstração: A condição sobre ξ, η para que o sistema $L1 = L2 = L3 = L4 = L5 = 0$ tenha solução pode ser encontrada da seguinte maneira: encontra-se a solução do sistema formado pelas linhas $L1, L2$ e $L4$, em seguida substitui na linha $L5$. Isto é equivalente a calcular o determinante da matriz 4×4 formada pelas linhas $L1, L2, L4$ e $L5$, e igualar a zero. Seja D este determinante, então:

$$D(0, \xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2 \cdot q(\xi, \eta) = 0,$$

onde:

$$\begin{aligned} q(\xi,\eta) = {} & (f_{1,3} - 2f_{2,1}f_{1,2} - 2f_{1,2}f_{0,3})\eta^6 + (2f_{2,1}f_{1,2} - f_{3,1} + 2f_{3,0}f_{2,1})\xi^6 + \\ & + (-4f_{2,1}^2 - 6f_{1,2}f_{3,0} + 2f_{0,3}f_{2,1} - 4f_{0,4} + 2f_{2,2} + 6f_{0,3}^2 + 2f_{1,2}^2)\xi\eta^5 + \\ & + (-9f_{3,0}f_{2,1} + 5f_{2,1}f_{1,2} - f_{1,3} + \tfrac{3}{2}f_{3,1} + 6f_{0,3}f_{3,0} - 4f_{1,2}f_{0,3})2\xi^2\eta^4 + \\ & + (2f_{3,1} + 18f_{1,2}f_{0,3} - 12f_{0,3}f_{3,0} - 3f_{1,3} + 8f_{3,0}f_{2,1} - 10f_{2,1}f_{1,2})\eta^2\xi^4 + \\ & + (-9f_{3,0}^2 - 8f_{0,3}f_{2,1} - 3f_{1,2}^2 + 2f_{4,0} + 9f_{0,3}^2 + 8f_{1,2}f_{3,0} + 3f_{2,1}^2)2\xi^3\eta^3 - \\ & - 4f_{0,4}\xi^3\eta^3 + (-2f_{2,2} - 6f_{3,0}^2 + 4f_{4,0} - 2f_{2,1}^2 - 2f_{1,2}f_{3,0})\xi^5\eta + \\ & + (6f_{0,3}f_{2,1} + 4f_{1,2}^2)\xi^5\eta, \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

é um polinômio de grau 6 em ξ e η. Os cálculos foram feitos com o software Maple.

Desta forma, existem no máximo seis direções reais que fornecem solução do envelope dos planos médios. ■

Uma vez escolhida a tangente (ξ, η) que satisfaz o sistema associado à matriz $E(\xi, \eta)$ tal que $D(0, \xi, \eta) = 0$, podemos encontrar a solução deste sistema.

Definição 7.15 *Ao conjunto solução do envelope de planos médios no caso limite denominaremos de Evoluta de Curvas Médias - ECM.*

O determinante D de $L1, L2, L4$ e $L5$ pode ser definido pela aplicação:

$$\begin{array}{rccc} D: & S \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p, \xi, \eta) & \longmapsto & D(p, \xi, \eta), \end{array}$$

Observação 7.16 *A notação (ξ, η) indica apenas uma direção e portanto está em S^1 que é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}$. A notação $D(p, \xi, \eta)$ significa que estamos considerando a tangente (ξ, η) no ponto $p \in S$.*

No próximo resultado provaremos que, se (ξ, η) é uma tangente que gera uma solução do EPM, então, genericamente, $(\xi, \eta) = (\xi, \eta)(u, v)$ é um campo diferenciável numa vizinhança da origem.

Observe que:

$$D_\xi(0, \xi, \eta) = 4\xi(\xi^2 + \eta^2)q(\xi, \eta) + (\xi^2 + \eta^2)^2 q_\xi(\xi, \eta),$$

$$D_\eta(0, \xi, \eta) = 4\eta(\xi^2 + \eta^2)q(\xi, \eta) + (\xi^2 + \eta^2)^2 q_\eta(\xi, \eta).$$

Logo, se considerarmos que $(\xi, \eta) = (1, 0)$, então $D(0, 1, 0) = 0$, o que implica $q(1, 0) = 2f_{3,0}f_{2,1} - f_{3,1} + 2f_{1,2}f_{2,1} = 0$. Daí, como $q(\xi, \eta)$ é uma função homogênea de grau 6, segue que $6q = \xi q_\xi + \eta q_\eta$, temos que $q_\xi(1, 0) = 0$. Logo $D_\xi(0, 1, 0) = 0$.

Desta forma, para provarmos que a tangente varia diferenciavelmente com o ponto da superfície, temos que supor que $D_\eta(0, 1, 0) \neq 0$.

Proposição 7.17 *Se $D_\eta(0, 1, 0) \neq 0$, então $(\xi, \eta) = (\xi, \eta)(p)$, $p \in S$ é um campo diferenciável.*

Demonstração: Como

$$D_\eta(0, 1, 0) = \left(4f_{4,0} - 2f_{3,0}f_{1,2} - 6f_{3,0}^2 + f_{2,1}f_{0,3} - 2f_{2,1}^2 + 4f_{1,2}^2 - 2f_{2,2}\right)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

é não nulo, e esta é uma condição genérica, segue do teorema da função implícita, que existem vizinhanças U e V de $0 \in S$ e $(1,0) \in T_pS$ tais que para quaisquer $p \in U$, existe um único $(\xi,\eta)(p) \in V$ com $D(p,(\xi,\eta)(p)) = 0$. Além disso, a aplicação $p \longmapsto (\xi,\eta)(p)$ é diferenciável. Isto é, a tangente varia diferenciavelmente com a origem. ■

Seja:

$$\Theta(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial z} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial z} \\ \frac{\partial L_4}{\partial x} & \frac{\partial L_4}{\partial y} & \frac{\partial L_4}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Quando $(\xi,\eta) = (1,0)$:

$$\Theta(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & f_{2,1} \\ \frac{3}{2} & 0 & 3f_{3,0} \\ \frac{5f_{3,0}}{2} & \frac{f_{2,1}}{2} & 2f_{4,0} \end{pmatrix}.$$

Proposição 7.18 *Seja (ξ,η) tal que $D(p,\xi,\eta) = 0$ e seja $X = (x,y,z)$ solução de $L1, L2, L3$ e $L4$. Se $\det(\Theta(\xi,\eta)) \neq 0$, então X é diferenciável em u_1, v_1.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $(\xi,\eta) = (1,0)$. Defina:

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u_1, v_1, x, y, z) & \longmapsto & (L2, L3, L4)\,(u_1, v_1, x, y, z) \end{array}.$$

Note que $H(1,0,x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$, pois $X = (x_0,y_0,z_0)$ é solução de $L2, L3$ e $L4$ associada a tangente $(1,0)$. Além disso, a matriz Jacobiana de H no ponto $(1,0,x_0,y_0,z_0)$, dada por:

$$J_H(1,0,x_0,y_0,z_0) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial L_2}{\partial u_1} & \frac{\partial L_2}{\partial v_1} & \\ \frac{\partial L_3}{\partial u_1} & \frac{\partial L_3}{\partial v_1} & \Theta(1,0) \\ \frac{\partial L_4}{\partial u_1} & \frac{\partial L_4}{\partial v_1} & \end{array}\right),$$

tem posto máximo, pois $\Theta(1,0)$ é não singular, uma vez que $\det(\Theta(1,0)) = \frac{3f_{2,1}^2 + 15f_{3,0}^2 - 6f_{4,0}}{4} \neq 0$ por hipótese. Então, pelo teorema da função implícita, segue que existem vizinhanças A de $(1,0)$ e B de (x_0,y_0,z_0) tais que para todo $(u_1,v_1) \in A$, existe uma única aplicação diferenciável $X = g(u_1,v_1)$ em B com $H(u_1,v_1,g(u_1,v_1)) = (0,0,0)$. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

O próximo resultado nos dá condições para que a evoluta de curvas médias associada à tangente $T = (1, 0)$ na origem da superfície dada pelo gráfico:

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \sum_{i=0}^{3} f_{3-i,i}x^{3-i}y^i + \sum_{i=0}^{4} f_{4-i,i}x^{4-i}y^i + \cdots$$

seja suave.

No próximo resultado, assumimos que os resultados 7.17 e 7.18 sejam satisfeitos.

Teorema 7.19 *Fixemos λ e consideremos a função $(u, v) \longmapsto D(u, v, \lambda)$. Suponha que $(0, 0)$ não é ponto crítico desta função. Se*

$$\begin{array}{ll} (i) & f_{3,0} - f_{1,2} \neq 0, \\ (ii) & \mu'_\gamma(0) = 8f_{3,0}^2 - 3(2f_{4,0} - f_{2,1}^2) \neq 0, \end{array}$$

onde μ'_γ é a derivada da curvatura afim da curva média γ, então a Evoluta de Curvas Médias - ECM da superfície S com respeito à tangente $T = (1, 0)$ na origem é suave e o plano tangente é o plano de Transon de T.

Demonstração:

Seja X uma parametrização da ECM da superfície S com respeito ao campo (ξ, η).

Afirmação 1: X_W pertence ao plano de Transon da tangente T para qualquer $W \in T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$.

De fato, como X pertence ao EPM segue que $L1(X) = 0$. Ao derivar esta equação em uma direção W qualquer, obtemos:

$$L1_\lambda(X)\lambda_W + L1(X_W) = 0 \Rightarrow L1(X_W) = 0, \ \forall\ W \in T_{(0,0)}\mathbb{R}^2.$$

Logo, X_W pertence ao plano de Transon da tangente T para qualquer W.

Afirmação 2: Para $W = T$, X_W pertence ao cone de B. Su.

Sabemos que X é ponto da evoluta afim da curva média. Como T é tangente à curva média, temos X_T na direção do normal afim desta curva. Logo, X_T pertence ao cone de B. Su de T.

A hipótese $\mu'_\gamma(0) \neq 0$, implica $X_T \neq 0$.

Afirmação 3: Para algum W, X_T e X_W são l.i. De fato, temos $L1_\lambda(X) = 0$ pois X pertence ao EPM. Ao derivar em uma direção W, obtemos:

$$L1_{\lambda\lambda}(X)\lambda_W + L1_\lambda(X_W) = 0 \tag{7.5}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Na origem, temos:

$$L1_{\lambda\lambda}(0,0,x,y,z) = x + 2f_{1,2}z = \frac{f_{3,0} - f_{1,2}}{4(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})} \neq 0,$$

onde (x, y, z) é o centro da quádrica de Moutard da tangente T e cujas coordenadas são dadas por:

$$x = \frac{f_{3,0}}{2(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})}, y = \frac{f_{2,1}}{2(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})},$$

$$z = -\frac{1}{4(5f_{3,0}^2 + f_{2,1}^2 - 2f_{4,0})}.$$

Como $(0,0)$ não é ponto crítico de $(u,v) \longmapsto D(u,v,\lambda)$, segue que $D_W(0,0,\lambda(0,00) \neq 0$, para algum W.

Ao derivar $D(u,v,\lambda(u,v)) = 0$ na direção W tal que $D_W(0,0,\lambda(0,0)) \neq 0$, obtemos:

$$D_W + D_\lambda \lambda_W = 0.$$

Assim, $\lambda_W(0,0) \neq 0$, pois caso contrário $D_W(0,0,\lambda(0,0)) = 0$. Logo, da equação 7.5, obtemos $L1_\lambda(X_W) \neq 0$ para algum W. O que implica $X_W \neq 0$ e X_W não pertence ao cone de B. Su.

Daí, X_T e X_W são linearmente independentes, pois ambos estão no plano de Transon, X_T é não nulo e está na direção do cone de B. Su e X_W para algum W é não nulo e não pertence ao cone de B. Su.

Portanto, a ECM é suave e as afirmações 1, 2 e 3 provam que o plano de Transon é tangente à ECM. ■

Exemplo 7.20 *Considere a superfície S dada pelo gráfico abaixo:*

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2 + x^3.$$

O plano de Transon da tangente (ξ, η) na origem é dado por:

$$(2\xi + \eta)(\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2)x + 2(\xi + \eta)(\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2)y + \frac{\xi^3}{2}z = 0.$$

A condição para existência da solução do EPM é:

$$D(0,\xi,\eta) = -12\xi^4(\xi + \eta)(5\xi^2 + 12\xi\eta + 6\eta^2)(\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2)^2 = 0.$$

Note que $D\left(0, \frac{-6+\sqrt{6}}{5}, 1\right) = 0$. *Além disso,* $(0,0)$ *não é ponto crítico de* D, *pois* $\nabla D(0,0) = (-0.1512, 0)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

O gráfico de S juntamente com a ECM da tangente $\left(\frac{-6+\sqrt{6}}{5}, 1\right)$ na origem são dados por:

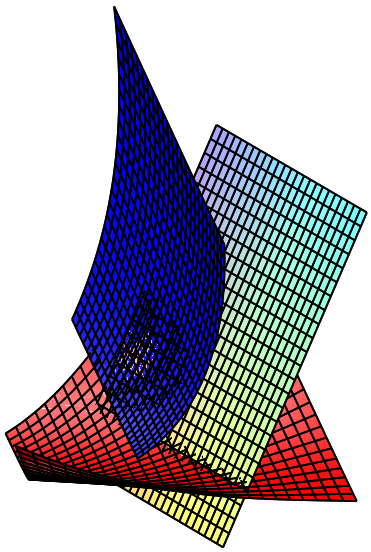


Figura 7.3: O plano tangente à Evoluta de Curvas Médias é o plano de Transon

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA

Referências Bibliográficas

[1] J. P. Warder, *Symmetries of Curves and Surfaces.* Ph.D. Thesis, University of Liverpool, 2009.

[2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities.* Second Edition, Cambridge University Press, 1992.

[3] P. A. Holtom, *Affine-Invariant Symmetry Sets.* Ph.D. Thesis, University of Liverpool, 2000.

[4] P. J. Giblin and G. Sapiro, *Affine Invariant Distances, Envelopes and Symmetry Sets.* Computer Peripherals Laboratory HPL-96-93 June, 1996.

[5] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1994.

[6] W. Blaschke, *Vorlesungen uber Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie.* Springer, 1923.

[7] A. Transon, *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces.* Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 191-208.

[8] B. Jüttler, *Osculating Paraboloids of Second and Third Order.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 66 (1996), 317-335

[9] Su Buchin, *Affine Differential Geometry.* Gordon and Breach, 1983.

[10] T. Moutard, *Sur le contact des coniques et des surfaces.* Comptes rendus 91, 1880, 1055-1058.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912377/CA