

Cecilia Reis Englander Lustosa

**On some relations between Natural Deduction
and Sequent Calculus**

Tese de Doutorado

Thesis presented to the Programa de Pós Graduação em
Informática of the Departamento de Informática, PUC–Rio as
partial fulfillment of the requirements for the degree of Doutor

Advisor : Prof. Edward Hermann Haeusler
Co–Advisor: Prof. Gilles Dowek

Rio de Janeiro
July 2014

Cecilia Reis Englander Lustosa

**On some relations between Natural Deduction
and Sequent Calculus**

Thesis presented to the Programa de Pós Graduação em
Informática of the Departamento de Informática do Centro
Técnico Científico da PUC-Rio, as partial fulfillment of the
requirements for the degree of Doutor.

Prof. Edward Hermann Haeusler

Advisor

Departamento de Informática — PUC-Rio

Prof. Gilles Dowek

Co-Advisor

INRIA

Prof. Wagner de Campos Sanz

UFG

Prof. Jean-Baptiste Joinet

Université Jean Moulin Lyon 3

Prof. Geiza Maria Hamazaki da Silva

UNIRIO

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordinator of the Centro Técnico Científico da PUC-Rio

Rio de Janeiro, July 08th, 2014

All rights reserved.

Cecilia Reis Englander Lustosa

Cecilia Englander graduated in Mathematics from the Universidade Federal Fluminense (UFF – Rio de Janeiro, Brazil). She has both her master's thesis and her D.Sc. from the Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio – Rio de Janeiro, Brazil) in Informatics (Theory of Computation).

Bibliographic data

Lustosa, Cecilia Reis Englander

On some relations between Natural Deduction and Sequent Calculus / Cecilia Reis Englander Lustosa ; advisor: Edward Hermann Haeusler; co-advisor: Gilles Dowek. — 2014.
104 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Informática)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.
Inclui bibliografia

1. Informática – Teses. 2. Dedução Natural. 3. Cálculo de Sequentes. 4. Teoria da Prova. 5. Isomorfismo. 6. Prova geral da completude. 7. Lógica proposicional finito-valorada. I. Haeusler, Edward Hermann. II. Dowek, Gilles. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. IV. Título.

CDD: 004

Acknowledgments

To my advisor, Prof. Edward Hermann Haeusler, for all the learning, patience and friendship through these years. To Prof. Gilles Dowek who also advised me.

To professors Luiz Carlos Pereira and João Marcos for their valuable insights.

To my family, specially to my mother and to my husband.

To my colleagues at TecMF, specially to Bruno Lopes, who is always ready to help.

To the administrative staff of the DI at PUC-Rio.

To CNPq and CAPES (project CAPES/COFECUB Action Sh 690/10) for the financial support without which this work could not have been accomplished.

Abstract

Lustosa, Cecilia Reis Englander; Haeusler, Edward Hermann (advisor); Dowek, Gilles (co-advisor). **On some relations between Natural Deduction and Sequent Calculus**. Rio de Janeiro, 2014. 104p. D.Sc. Thesis — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Segerberg presented a general completeness proof for propositional logics. For this purpose, a Natural Deduction system was defined in a way that its rules were rules for an arbitrary boolean operator in a given propositional logic. Each of those rules corresponds to a row on the operator's truth-table. In the first part of this thesis we extend Segerberg's idea to finite-valued propositional logic and to non-deterministic logic. We maintain the idea of defining a deductive system whose rules correspond to rows of truth-tables, but instead of having n types of rules (one for each truth-value), we use a bivalent representation that makes use of the technique of separating formulas as defined by Carlos Caleiro and João Marcos. The system defined has so many rules it might be laborious to work with it. We believe that a sequent calculus system defined in a similar way would be more intuitive. Motivated by this observation, in the second part of this thesis we work out translations between Sequent Calculus and Natural Deduction, searching for a better bijective relationship than those already existing.

Keywords

Natural Deduction; Sequent Calculus; Proof Theory; Isomorphism; General completeness proof; Finite-valued propositional logic;

Resumo

Lustosa, Cecilia Reis Englander; Haeusler, Edward Hermann; Dowek, Gilles. **Algumas relações entre Cálculo de Sequentes e Dedução Natural**. Rio de Janeiro, 2014. 104p. Tese de Doutorado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Segeberg apresentou uma prova geral da completude para lógicas proposicionais. Para tal, um sistema de dedução foi definido de forma que suas regras sejam regras para um operador booleano arbitrário para uma dada lógica proposicional. Cada regra desse sistema corresponde a uma linha na tabela de verdade desse operador. Na primeira parte desse trabalho, mostramos uma extensão da ideia de Segerberg para lógicas proposicionais finito-valoradas e para lógicas não-determinísticas. Mantemos a ideia de definir um sistema de dedução cujas regras correspondam a linhas de tabelas verdade, mas ao invés de termos um tipo de regra para cada valor de verdade da lógica correspondente, usamos uma representação bivalente que usa a técnica de fórmulas separadoras definidas por Carlos Caleiro e João Marcos. O sistema definido possui tantas regras que pode ser difícil trabalhar com elas. Acreditamos que um sistema de cálculo de sequentes definido de forma análoga poderia ser mais intuitivo. Motivados por essa observação, a segunda parte dessa tese é dedicada à definição de uma tradução entre cálculo de sequentes e dedução natural, onde procuramos definir uma bijeção melhor do que as já existentes.

Palavras-chave

Dedução Natural; Cálculo de Sequentes; Teoria da Prova; Isomorfismo; Prova geral da completude; Lógica proposicional finito-valorada;

Contents

1	Introduction	8
2	Natural Deduction for finite-valued logics	10
2.1	Introduction	10
2.2	The system N_{mv}	12
2.3	Soundness and Completeness	14
2.4	Normalization	26
2.5	Some Further Results	31
2.6	Related Works	33
2.7	Conclusion	36
3	Natural Deduction for non-deterministic finite-valued logics	38
3.1	Introduction	38
3.2	Non-deterministic finite-valued basic system for single conclusion logic	38
3.3	Soundness and completeness	41
3.4	Conclusion	43
4	Correspondence between normal Natural Deduction and cut-free Sequent Calculus	44
4.1	Introduction	44
4.2	Motivation	44
4.3	Sequent Calculus and Natural Deduction	47
4.4	Definitions	53
4.5	Translation between normal derivations	56
4.6	Conclusion	70
5	Correspondence between Natural Deduction and Sequent Calculus	71
5.1	Definitions	71
5.2	Conversions in LJ	76
5.3	Conversions in ND	84
5.4	Translation	88
5.5	Conclusion	99
6	Conclusion	100
	Bibliography	103