Referências Bibliográficas

[1] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM, 2010.

[2] VELHO, L.; GOMES, J. ; DE FIGUEIREDO, L. H. **Implicit Objects in Computer Graphics**. Springer, 2013.

[3] LORENSEN, W. E. **Marching Cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm**. In: SIGGRAPH, p. 163–169, 1987.

[4] SEDERBERG, T. W. **Piecewise algebraic surface patches**. CAGD, 2(1):53–59, 1985.

[5] CARR, J. C.; BEATSON, R. K.; CHERRIE, J. B.; MITCHELL, T. J.; FRIGHT, W. R.; MCCALLUM, B. C. ; EVANS, T. R. **Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions**. In: SIGGRAPH, p. 67–76, 2001.

[6] OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; ALEXA, M.; TURK, G. ; SEIDEL, H.-P. **Multi-level partition of unity implicits**. In: SIGGRAPH, p. 463–470, 2003.

[7] MUNSHI, A.; GASTER, B.; MATTSON, T. G.; FUNG, J. ; GINSBURG, D. **OpenCL Programming Guide**. Addison-Wesley Professional, 2011.

[8] DE TOLEDO, R. **Interactive Visualization of Massive Data using Programmable Graphics Cards**. Tese de Doutorado, Universidade Henri Poincaré, 2007.

[9] MELLO, V. **Novos Métodos Simpliciais em Computação Gráfica**. Tese de Doutorado, IMPA, 2006.

[10] LOOP, C.; BLINN, J. F. **Real-time GPU rendering of piecewise algebraic surfaces**. ACM Transactions on Graphics, p. 664–670, 2006.

[11] DE BORR, C. **B-Form basics**. Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, 67:131–148, 1987.

[12] GOMES, T. **Modelagem e visualização de TriQuad**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.

[13] FOLEY, J. D. **Computer Graphics: Principles and Practice**. Addison-Wesley Professional, 1996.

[14] MAXIMO, A.; MARROQUIM, R. ; FARIAS, R. **Hardware-assisted projected tetrahedra**. In: EUROGRAPHICS, p. 903–912, 2010.

[15] GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos de Computação Gráfica**. IMPA, 2003.

[16] LAGE, M.; LEWINER, T.; LOPES, H. ; VELHO, L. **CHF: a scalable topological data structure for tetrahedral meshes**. In: SIBGRAPI, p. 349–356, 2005.

[17] PHONG, B. T. **Illumination for computed generated pictures**. Communications of the ACM, 1975.

[18] GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. **Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods**. Academic Press, 1991.

[19] TREFETHEN, L.; BAU III, D. **Numerical Linear Algebra**. SIAM, 1997.

[20] **ViennaCL**, 2015, http://viennacl.sourceforge.net. [Online; acessada em 26 de fevereiro de 2015].

[21] **GSL - GNU scientific library**, 2015, http://www.gnu.org/software/gsl. [Online; acessada em 26 de fevereiro de 2015].

[22] HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. **Methods of conjugate gradients for solving linear systems**. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1952.

[23] BARRE, A.; ARMAND, S. **Biomechanical toolkit: Open-source framework to visualize and process biomechanical data**. Computer methods and programs in biomedicine, p. 80–87, 2014.

[24] **Eigen**, 2015, http://eigen.tuxfamily.org. [Online; acessada em 12 de fevereiro de 2015].

[25] SAUNDERS, M. A. **Solution of sparse rectangular systems using lsqr and craig**. BIT, 1995.

[26] CIGNONI, P.; ROCCHINI, C. ; SCOPIGNO, R. **Metro: measuring error on simplified surfaces**. In: EUROGRAPHICS, p. 67–76, 2008.

A
Notação

p	Ponto qualquer.
p_i	i-ésima coordenada do ponto p ($p_1 = x, p_2 = y, ...$).
b	Vetor de coordenadas baricêntricas de p ou vetor solução do sistema.
b_i	Coordenada baricêntrica da coordenada i do ponto.
B	Matriz de coordenadas baricêntricas (transformação afim).
B_{ij}	Elemento da linha i e coluna j da matriz B.
A	Primeiro coeficiente da quádrica, matriz de transformação ou matriz com os coeficientes do lado esquerdo do sistema de equações.
x	Coordenada x do ponto ou vetor solução do sistema de equações.
$\hat{T}$	Triângulo.
T	Tetraedro.
$\mathbf{T}$	Translação.
T_i	i-ésimo tetraedro.
v_i	i-ésimo vértice de um polígono.
$(x_i, y_i, ...)$	Coordenadas do i-ésimo ponto ou vértice.
Q	Quádrica
Q_i	i-ésima quádrica
Q_{ijk}	Elemento da linha j coluna k da i-ésima quádrica
$A, B, ..., J$	Coeficientes da quádrica
$A_i, B_i, ..., J_i$	Coeficientes da i-ésima quádrica
M	Matriz M
m_{ij}	Elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de M
p_{in}	Primeiro ponto a intersectar o tetraedro.
p_{out}	Segundo ponto a intersectar o tetraedro.
Q_{in}	Quádrica no ponto p_{in}.
Q_{out}	Quádrica no ponto p_{out}.
p_t	Ponto relativo ao valor t no segmento ou reta $p(t)$
Q_t	Quádrica associada ao valor t pela interpolação de equação $Q(t)$.
n_p	Número de pontos de entrada do sistema.
n_s	Número de tetraedros da malha.

n_v	Numero de vértices da malha.
n_r	Número de restrições ou equações as quais o sistema deve atender.
n_c	Número de coeficientes que se deseja encontrar.
M	Matriz com os coeficientes da parte homogênea das equações.
U	Matriz coluna ou vetor com a parte não-homogênea do sistema.
X	Matriz coluna ou vetor solução do sistema.
M^*	Conjugada transposta da matriz M.
M^{-1}	Inversa da matriz M.
$M^\top$	Transposta da matriz M.
$p^\top$	Ponto ou vetor p transposto.
$A = \hat{Q}\hat{R}$	Fatoração QR reduzida.
$A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$	SVD reduzida.
t, s	Fatores de interpolação.
$r(t)$	Raio de equaçao $o + t\vec{v}$.
$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$	Equações das coordenadas do raio $r(t)$.
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$	Resolução da malha de tetraedros.

B
Mais Alguns Resultados

Os resultados aqui apresentados foram obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho e não passaram por nenhuma análise de qualidade. Por esse motivo, são apenas preliminares e podem sofrer melhorias consideráveis utilizando a teoria que apresentamos . São mais alguns exemplos de superfícies construídas com *TetraQuads*, todas reconstruídas utilizando o método LSQR para resolver o problema de mínimos quadrados. Os buracos que aparecem em algumas malhas de *TetraQuads* são resultado da remoção de tetraedros sem pontos da malha de entrada.

O primeiro exemplo foi obtido com o modelo *Bi-Torus* com 12286 vértices e 24576 triângulos (figura B.1). A figura B.2 traz o resultado da reconstrução em uma malha de resolução $8 \times 8 \times 8$ com 438 tetraedros. Utilizamos como restrições a redução dos altos coeficientes, superfícies de nível e o coeficiente J livre. O segundo exemplo utilizou o modelo *Torus* com 18252 vértices e 36504 triângulos (figura 5.8(f)) para obter o resultado da figura 5.8(f) em uma malha de resolução $5 \times 5 \times 5$ com 303 tetraedros utilizando as mesmas restrições.

A figura B.5 mostra a malha do modelo *Pig* com 12286 vértices e 77454 triângulos utilizado para reconstruir a superfície em uma malha de resolução $8 \times 8 \times 8$ com 424 tetraedros (figura B.6). Utilizamos as equações das normais, da redução dos altos coeficientes, das superfícies de nível e o coeficiente J livre para a reconstrução.

O modelo *Kangaroo* tem uma malha com 15107 vértices e 30210 triângulos (figura B.7) e foi utilizado como entrada para obter o resultado da figura B.8 em uma malha de resolução com $12 \times 12 \times 12$ e 508 tetraedros. As restrições utilizadas para o *fitting* foram: a equação da normal, a redução dos altos coeficientes, diferentes superfícies de nível e o coeficiente J livre.

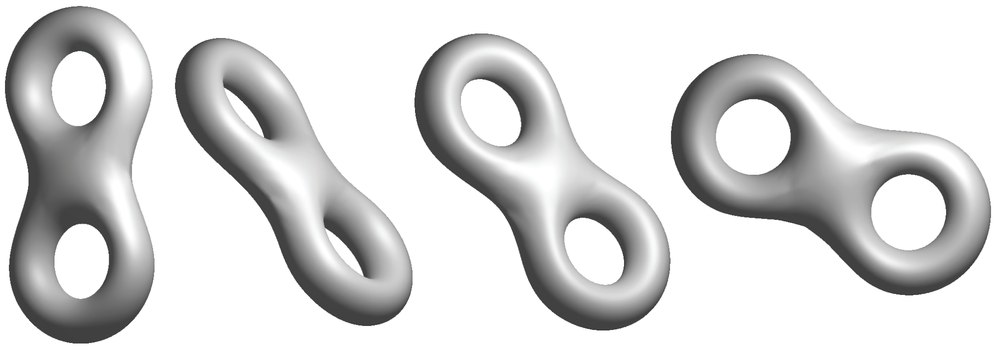

Figura B.1: Malha do modelo *Bi-Torus* com 12286 vértices e 24576 triângulos.

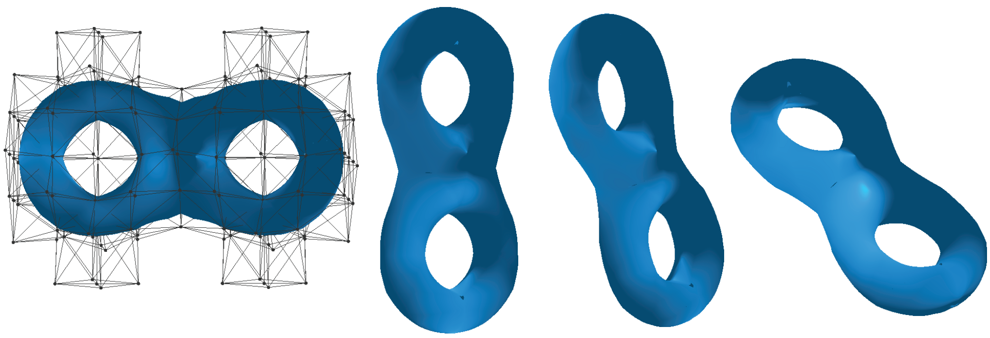

Figura B.2: Reconstrução por *TetraQuads* do modelo *Bi-Torus* com 438 tetraedros.

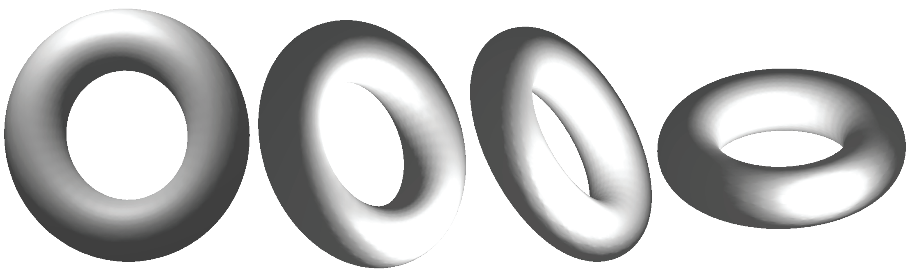

Figura B.3: Malha do modelo *Torus* com 18252 vértices e 36504 triângulos.

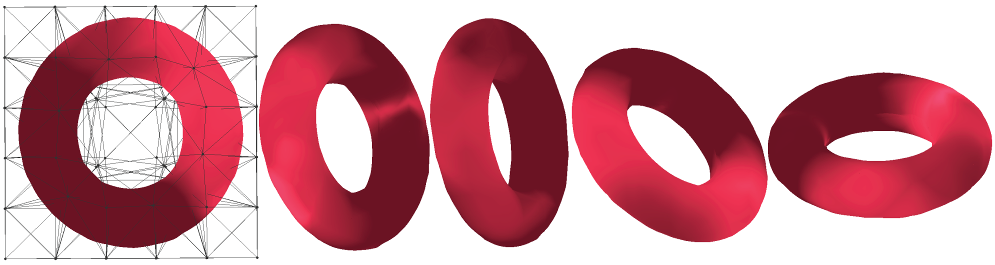

Figura B.4: Reconstrução por *TetraQuads* do modelo *Torus* com 303 tetraedros.

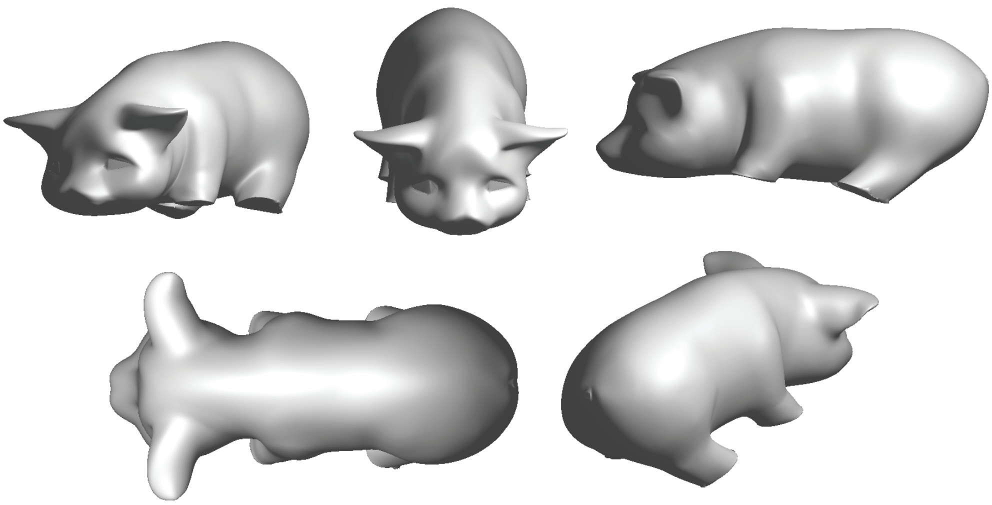

Figura B.5: Malha do modelo *Pig* com 38741 vértices e 77454 triângulos.

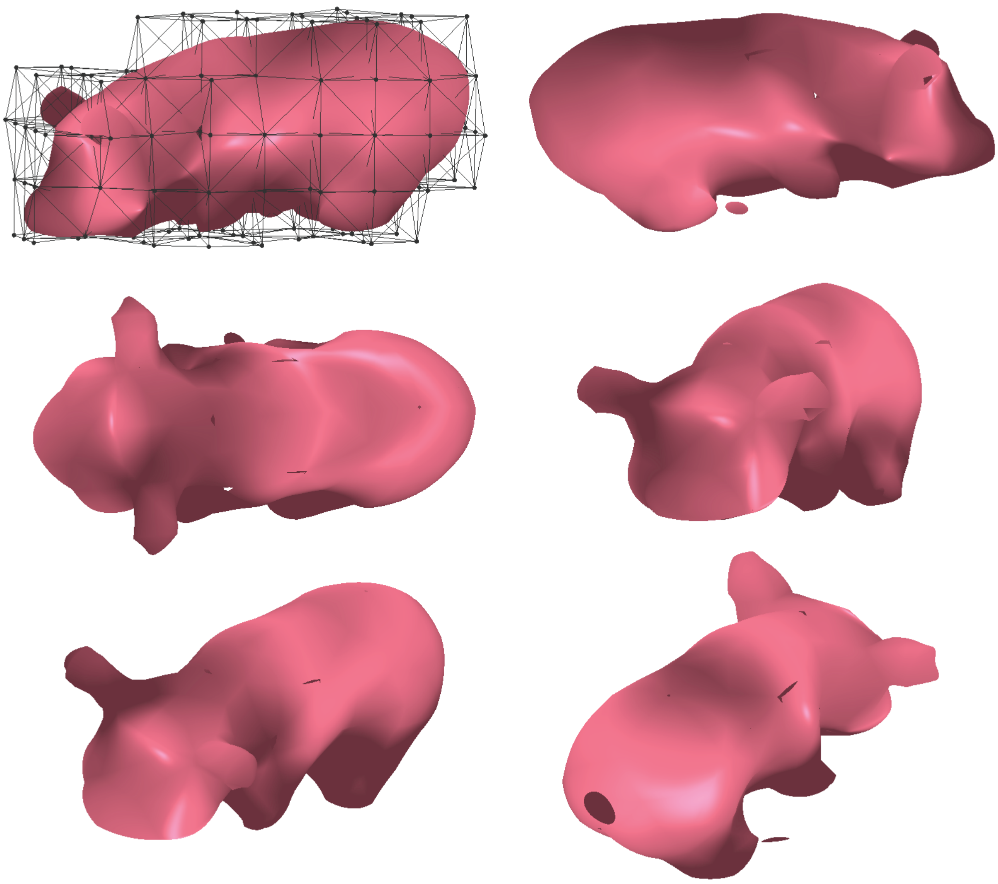

Figura B.6: Reconstrução por *TetraQuads* do modelo *Pig* com 424 tetraedros.

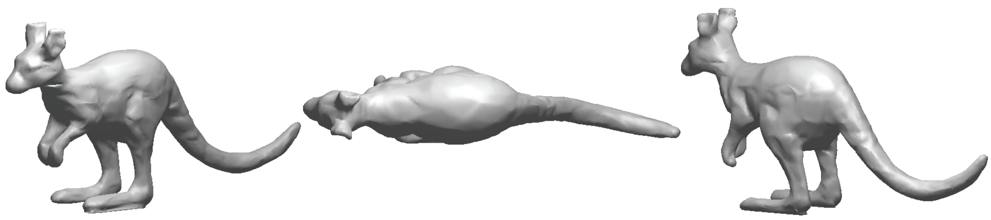

Figura B.7: Malha do modelo *Kangaroo* com 15107 vértices e 30210 triângulos.

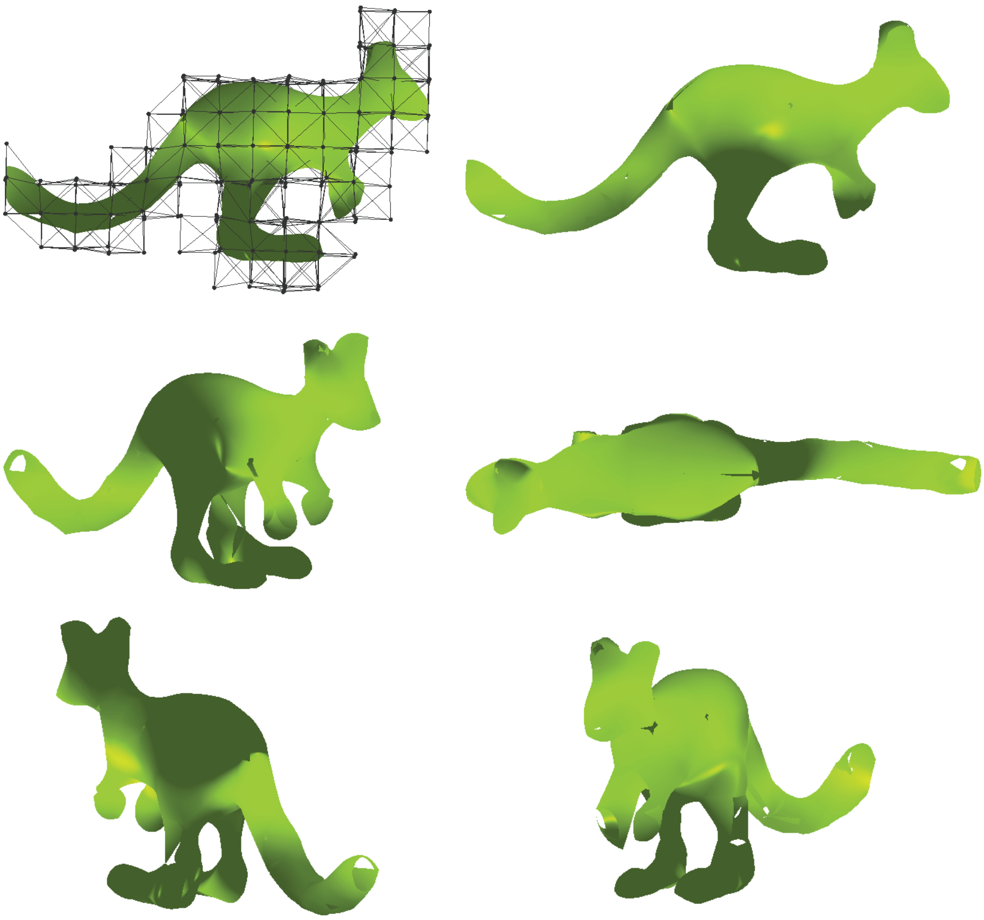

Figura B.8: Reconstrução por *TetraQuads* do modelo *Kangaroo* com 508 tetraedros.

C
Construindo as Matrizes

Para o leitor interessado em implementar o sistema de equações para *fitting* de pontos que vimos no capítulo 4, nas próximas linhas veremos as equações para preenchimento de cada um dos elementos das matrizes M e U. Em todos os casos, p_i representa o i-ésimo ponto de entrada de coordenadas (x_i, y_i, z_i), m_{ij} o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de M e u_i o i-ésimo elemento da matriz U.

C.1
Caso Básico

Estes são os elementos da matriz M definidos a partir da equação (4-2). As linhas abaixo representam a contribuição de um ponto de entrada p_i para o sistema.

$$
\begin{aligned}
m_{i\,1} &= x_i^2 z_i b_{13} + x_i^3 b_{11} + x_i^2 y_i b_{12} + x_i^2 b_{14} \\
m_{i\,2} &= 2x_i y_i z_i b_{13} + 2x_i y_i b_{14} + 2x_i y_i^2 b_{12} + 2x_i^2 y_i b_{11} \\
m_{i\,3} &= 2x_i^2 z_i b_{11} + 2x_i z_i b_{14} + 2x_i z_i^2 b_{13} + 2x_i y_i z_i b_{12} \\
m_{i\,4} &= 2x_i y_i b_{12} + 2x_i^2 b_{11} + 2x_i z_i b_{13} + 2x_i b_{14} \\
m_{i\,5} &= y_i^2 b_{14} + y_i^3 b_{12} + x_i y_i^2 b_{11} + y_i^2 z_i b_{13} \\
m_{i\,6} &= 2x_i y_i z_i b_{11} + 2y_i z_i b_{14} + 2y_i^2 z_i b_{12} + 2y_i z_i^2 b_{13} \\
m_{i\,7} &= 2y_i^2 b_{12} + 2x_i y_i b_{11} + 2y_i b_{14} + 2y_i z_i b_{13} \\
m_{i\,8} &= x_i z_i^2 b_{11} + y_i z_i^2 b_{12} + z_i^3 b_{13} + z_i^2 b_{14} \\
m_{i\,9} &= 2z_i b_{14} + 2y_i z_i b_{12} + 2z_i^2 b_{13} + 2x_i z_i b_{11} \\
m_{i\,10} &= x_i^2 b_{24} + x_i^2 z_i b_{23} + x_i^2 y_i b_{22} + x_i^3 b_{21} \\
m_{i\,11} &= 2x_i y_i z_i b_{23} + 2x_i y_i^2 b_{22} + 2x_i^2 y_i b_{21} + 2x_i y_i b_{24} \\
m_{i\,12} &= 2x_i y_i z_i b_{22} + 2x_i z_i^2 b_{23} + 2x_i z_i b_{24} + 2x_i^2 z_i b_{21} \\
m_{i\,13} &= 2x_i z_i b_{23} + 2x_i b_{24} + 2x_i^2 b_{21} + 2x_i y_i b_{22} \\
m_{i\,14} &= y_i^3 b_{22} + x_i y_i^2 b_{21} + y_i^2 b_{24} + y_i^2 z_i b_{23} \\
m_{i\,15} &= 2y_i z_i^2 b_{23} + 2x_i y_i z_i b_{21} + 2y_i^2 z_i b_{22} + 2y_i z_i b_{24} \\
m_{i\,16} &= 2y_i z_i b_{23} + 2y_i^2 b_{22} + 2y_i b_{24} + 2x_i y_i b_{21} \\
m_{i\,17} &= x_i z_i^2 b_{21} + z_i^2 b_{14} + y_i z_i^2 b_{22} + z_i^3 b_{23} \\
m_{i\,18} &= 2z_i^2 b_{23} + 2y_i z_i b_{22} + 2x_i z_i b_{21} + 2z_i b_{24} \\
m_{i\,19} &= x_i^2 b_{34} + x_i^2 y_i b_{32} + x_i^2 z_i b_{33} + x_i^3 b_{31} \\
m_{i\,20} &= 2x_i y_i b_{34} + 2x_i y_i z_i b_{33} + 2x_i y_i^2 b_{32} + 2x_i^2 y_i b_{31} \\
m_{i\,21} &= 2x_i^2 z_i b_{31} + 2x_i z_i^2 b_{33} + 2x_i y_i z_i b_{32} + 2x_i z_i b_{34}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
m_{i\,22} &= 2x_ib_{34} + 2x_iz_ib_{33} + 2x_i^2b_{31} + 2x_iy_ib_{32} \\
m_{i\,23} &= y_i^2b_{34} + y_i^2z_ib_{33} + x_iy_i^2b_{31} + y_i^3b_{32} \\
m_{i\,24} &= 2y_i^2z_ib_{32} + 2y_iz_ib_{34} + 2x_iy_iz_ib_{31} + 2y_iz_i^2b_{33} \\
m_{i\,25} &= 2y_i^2b_{32} + 2y_ib_{34} + 2y_iz_ib_{33} + 2x_iy_ib_{31} \\
m_{i\,26} &= z_i^3b_{33} + y_iz_i^2b_{32} + x_iz_i^2b_{31} + z_i^2b_{34} \\
m_{i\,27} &= 2z_ib_{34} + 2y_iz_ib_{32} + 2z_i^2b_{33} + 2x_iz_ib_{31} \\
m_{i\,28} &= x_i^3b_{41} + x_i^2z_ib_{43} + x_i^2b_{44} + x_i^2y_ib_{42} \\
m_{i\,29} &= 2x_iy_i^2b_{42} + 2x_iy_ib_{44} + 2x_i^2y_ib_{41} + 2x_iy_iz_ib_{43} \\
m_{i\,30} &= 2x_iz_ib_{44} + 2x_iz_i^2b_{43} + 2x_iy_iz_ib_{42} + 2x_i^2z_ib_{41} \\
m_{i\,31} &= 2x_iy_ib_{42} + 2x_iz_ib_{43} + 2x_ib_{44} + 2x_i^2b_{41} \\
m_{i\,32} &= y_i^2b_{44} + y_i^2z_ib_{43} + x_iy_i^2b_{41} + y_i^3b_{42} \\
m_{i\,33} &= 2y_i^2z_ib_{42} + 2x_iy_iz_ib_{41} + 2y_iz_ib_{44} + 2y_iz_i^2b_{43} \\
m_{i\,34} &= 2y_iz_ib_{43} + 2y_i^2b_{41} + 2y_ib_{44} + 2x_iy_ib_{41} \\
m_{i\,35} &= y_iz_i^2b_{42} + z_i^3b_{43} + x_iz_i^2b_{41} + z_i^2b_{44} \\
m_{i\,36} &= 2y_iz_ib_{42} + 2z_ib_{44} + 2z_i^2b_{43} + 2x_iz_ib_{41}
\end{aligned}$$

Por fim, considerando $J = -1$, a parte não-homogênea da equação representada pelo i-ésimo elemento da matriz U.

$$\begin{aligned}
u_i &= (b_{11} + b_{21} + b_{31} + b_{41})x + (b_{12} + b_{22} + b_{32} + b_{42})y + (b_{13} + b_{23} + b_{33} + b_{43})z \\
&+ b_{14} + b_{24} + b_{34} + b_{44}S
\end{aligned}$$

C.2 Normais

Como vimos, para o caso de inclusão das normais no sistema de equações utilizamos o fato delas serem paralelas ao gradiente da superfície (equação (4-5)). Abaixo estão representadas as três linhas que equivalem à inclusão das coordenadas do vetor normal no i-ésimo ponto de entrada p_i. Estamos considerando apenas o caso básico ($F = 0$) e inclusão das normais para a ordem das linhas.

$$\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+1]\,1} &= -x^2n_yb_{24} + x^2n_zb_{23} \\
m_{[2(i-1)+1]\,2} &= -2xyn_yb_{24} + (x(2zb_{24} + 4yb_{23} + 2b_{25}) + 2x^2b_{22})n_z \\
m_{[2(i-1)+1]\,3} &= 2b_{12}zxn_z - ((2b_{14} + 4b_{13}z + 2b_{12}y)x + 2x^2b_{11})n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,4} &= 2b_{12}xn_z - 2b13xn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,5} &= ((2b_{14} + 2b_{13}z)y + 3y^2b_{12} + 2yb_{11}x)n_z - b_{13}y^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,6} &= (2zb_{14} + 2z^2b_{13} + 4zb_{12}y + 2zb_{11}x)n_z \\
&- ((2b_{14} + 4b_{13}z)y + 2y^2b_{12} + 2yb_{11}x)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,7} &= (2b_{14} + 4b_{12}y + 2b_{13}z + 2b_{11}x)n_z - 2b_{13}yn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,8} &= b_{12}z^2n_z - (2zb_{12}y + 2zb_{12} + 3z^2b_{13} + 2zb_{11}x)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\,9} &= 2b_{12}zn_z - (4b_{13}z + 2b_{12}y + 2b_{14} + 2b_{11}x)n_y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+1]\ 10} &= b_{22}x^2n_z - b_{23}x^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 11} &= ((4b_{22}y + 2b_{23}z + 2b_{24})x + 2x^2b_{21})n_z - 2b_{23}yxn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 12} &= 2b_{22}zxn_z - ((2b_{22}y + 4b_{23}z + 2b_{24})x + 2x^2b_{21})n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 13} &= 2b_{22}xn_z - 2b_{23}xn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 14} &= ((2b_{23}z + 2b_{24})y + 2yb_{21}x + 3y^2b_{22})n_z - b_{23}y^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 15} &= (4zb_{22}y + 2zb_{24} + 2zb_{21}x + 2z^2b_{23})n_z - \\
&\quad -(2y^2b_{22} + 2yb_{21}x + (2b_{24} + 4b_{23}z)y)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 16} &= (2b_{21}x + 2b_{24} + 4b_{22}y + 2b_{23}z)n_z - 2b_{23}yn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 17} &= b_{22}z^2n_z - (2zb_{21}x + 2zb_{24} + 2zb_{22}y + 3z^2b_{23})n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 18} &= 2b_{22}zn_z - (2b_{21}x + 2b_{24} + 2b_{22}y + 4b_{23}z)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 19} &= b_{32}x^2n_z - b_{33}x^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 20} &= ((4b_{32}y + 2b_{33}z + 2b_{34})x + 2x^2b_{31})n_z - 2b_{33}yxn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 21} &= 2b_{32}zxn_z - (2x^2b_{31} + (4b_{33}z + 2b_{34} + 2b_{32}y)x)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 22} &= 2b_{32}xn_z - 2b_{33}xn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 23} &= ((2b_{34} + 2b_{33}z)y + 3y^2b_{32} + 2yb_{31}x)n_z - b_{33}y^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 24} &= (2z^2b_{33} + 4zb_{32}y + 2zb_{34} + 2zb_{31}x)n_z \\
&- (2y^2b_{32} + 2yb_{31}x + (4b_{33}z + 2b_{34})y)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 25} &= (2b_{31}x + 2b_{34} + 4b_{32}y + 2b_{33}z)n_z - 2b_{33}yn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 26} &= b_{32}z^2n_z - (3z^2b_{33} + 2zb_{31}x + 2zb_{32}y + 2zb_{33})n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 27} &= 2b_{32}zn_z - (2b_{34} + 4b_{33}z + 2b_{31}x + 2b_{32}y)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 28} &= b_{42}x^2n_z - b_{43}x^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 29} &= (2x^2b_{41} + (4b_{42}y + 2b_{43}z + 2b_{44})x)n_z - 2b_{43}yxn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 30} &= 2b_{42}zxn_z - (2x^2b_{41} + (2b_{42}y + 2b_{44} + 4b_{43}z)x)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 31} &= 2b_{42}xn_z - 2b_{43}xn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 32} &= (2yb_{41}x + 3y^2b_{42} + (2b_{43}z + 2b_{44})y)n_z - b_{43}y^2n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 33} &= (2zb_{44} + 2z^2b_{43} + 2zb_{41}x + 4zb_{42}y)n_z \\
&- (2yb_{41}x + 2y^2b_{42} + (4b_{43}z + 2b_{44})y)n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 34} &= (2b_{41}x + 2b_{44} + 4b_{42}y + 2b_{43}z)n_z - 2b_{43}yn_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 35} &= z^2n_zb_{53} - (3z^2b_{54} + 2yzb_{53} + 2zb_{55} + 2zn_yb_{52})n_y \\
m_{[2(i-1)+1]\ 36} &= 2zn_zb_{53} - (2yb_{53} + 2b_{55} + 2xb52 + 4zb_{54})n_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+2]\ 1} &= -(3x^2b_{11} + (2b_{12}y + 2b_{24} + 2b_{13}z)x)n_z + b_{13}x^2n_x \\
m_{[2(i-1)+2]\ 2} &= -((2b_{14} + 2b_{13}z)y + 2y^2b_{12} + 4yb_{11}x)n_z + 2b_{13}yxn_x \\
m_{[2(i-1)+2]\ 3} &= ((2b_{14} + 4b_{13}z + 2b_{12}y)x + 2x^2b_{11})n_x \\
&- (2zb_{14} + 2zb_{12}y + 4zb_{11}x + 2z^2b_{13})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 4} &= 2b_{13}xn_x - (2b_{12}y + 2b_{14} + 2b_{13}z + 4b_{11}x)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 5} &= b_{13}y^2n_x - b_{11}y^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 6} &= ((2b_{14} + 4b_{13}z)y + 2y^2b_{12} + 2yb_{11}x)n_x - 2b_{11}zyn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 7} &= 2b_{13}yn_x - 2b_{11}yn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 8} &= (2zb_{12}y + 2zb_{14} + 3z^2b_{13} + 2zb_{11}x)n_x - b_{11}z^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 9} &= (4b_{13}z + 2b_{12}y + 2b_{14} + 2b_{11}x)n_x - 2b_{11}zn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 10} &= b_{13}x^2n_x - ((2b_{22}y + 2b_{24} + 2b_{23}z)x + 3x^2b_{21})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 11} &= 2b_{23}yxn_x - (2y^2b_{22} + 4yb_{21}x + (2b_{23}z + 2b_{24})y)n_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+2]\ 12} &= ((2b_{22}y + 4b_{23}z + 2b_{24})x + 2x^2b_{21})n_x \\
&- (2zb_{24} + 2zb_{22}y + 4zb_{21}x + 2z^2b_{23})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 13} &= 2b_{23}xn_x - (4b_{21}x + 2b_{23}z + 2b_{22}y + 2b_{24})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 14} &= b_{23}y^2n_x - b_{21}y^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 15} &= (2y^2b_{22} + 2yb_{21}x + (2b_{24} + 4b_{23}z)y)n_x - 2b_{21}zyn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 16} &= 2b_{23}yn_x - 2b_{21}yn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 17} &= (2zb_{21}x + 2zb_{24} + 2zb_{22}y + 3z^2b_{23})n_x - b_{21}z^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 18} &= (2b_{21}x + 2b_{14} + 2b_{22}y + 4b_{23}z)n_x - 2b_{21}zn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 19} &= b_{33}x^2n_x - ((2b_{34} + 2b_{32}y + 2b_{33}z)x + 3x^2b_{31})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 20} &= 2b_{33}yxn_x - (4yb_{31}x + (2b_{34} + 2b_{33}z)y + 2y^2b_{32})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 21} &= (2x^2b_{31} + (4b_{33}z + 2b_{34} + 2b_{32}y)x)n_x \\
&- (2z^2b_{33} + 2zb_{34} + 4zb_{31}x + 2zb_{32}y)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 22} &= 2b_{33}xn_x - (4b_{31}x + 2b_{34} + 2b_{33}z + 2b_{32}y)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 23} &= b_{33}y^2n_x - b_{31}y^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 24} &= (2y^2b_{32} + 2yb_{31}x + (4b_{33}z + 2b_{34})y)n_x - 2b_{31}zyn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 25} &= 2b_{33}yn_x - 2b_{31}yn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 26} &= (3z^2b_{33} + 2zb_{31}x + 2zb_{32}y + 2zb_{34})n_x - b_{31}z^2n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 27} &= (2b_{34} + 4b_{33}z + 2b_{31}x + 2b_{32}y)n_x - 2b_{31}zn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 28} &= b_{43}x^2n_x - (3x^2b_{41} + (2b_{44} + 2b_{43}z + 2b_{42}y)x)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 29} &= 2b_{43}yxn_x - ((2b_{43}z + 2b_{44})y + 4yb_{41}x + 2y^2b_{42})n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 30} &= (2x^2b_{41} + (2b_{42}y + 2b_{44} + 4b_{43}z)x)n_x \\
&- (2z^2b_{43} + 4zb_{41}x + 2zb_{44} + 2zb_{42}y)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 31} &= 2b_{43}xn_x - (2b_{44} + 2b_{43}z + 2b_{42}y + 4b_{41}x)n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 32} &= b_{43}y^2n_x - y^2b_{41}n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 33} &= (2yb_{41}x + 2y^2b_{42} + (4b_{43}z + 2b_{44})y)n_x - 2zb_{41}yn_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 34} &= 2b_{43}yn_x - 2yb_{41}n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 35} &= (3z^2b_{43} + 2zb_{42}y + 2zb_{44} + 2zb_{41}x)n_x - z^2b_{41}n_z \\
m_{[2(i-1)+2]\ 36} &= (2b_{42}y + 2b_{44} + 2b_{41}x + 4b_{43}z)n_x - 2zb_{41}n_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+3\ 1} &= -b_{21}x^2n_x + (3x^2b_{11} + (2b_{21}y + 2b_{24} + 2b_{21}z)x)n_y \\
m_{[2(i-1)+3\ 2} &= -((2b_{13}z + 4b_{12}y + 2b_{14})x + 2x^2b_{11})n_x \\
&+ ((2b_{14} + 2b_{13}z)y + 2y^2b_{12} + 4yb_{11}x)n_y \\
m_{[2(i-1)+3\ 3} &= (2zb_{14} + 2zb_{12}y + 4zb_{11}x + 2z^2b_{13})n_y - 2b_{12}zxn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 4} &= (2b_{12}y + 2b_{14} + 2b_{13}z + 4b_{11}x)n_y - 2b_{12}xn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 5} &= b_{11}y^2n_y - ((2b_{14} + 2b_{13}z)y + 3y^2b_{12} + 2yb_{11}x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 6} &= 2b_{11}zyn_y - (2zb_{14} + 2z^2b_{13} + 4zb_{12}y + 2zb_{11}x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 7} &= 2b_{11}yn_y - (2b_{14} + 4b_{12}y + 2b_{13}z + 2b_{11}x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 8} &= b_{11}z^2n_y - b_{12}z^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 9} &= 2b_{11}zn_y - 2b_{12}zn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 10} &= ((2b_{22}y + 2b_{14} + 2b_{13}z)x + 3x^2b_{21})n_y - b_{22}x^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 11} &= (2y^2b_{22} + 4yb_{21}x + (2b_{23}z + 2b_{24})y)n_y \\
&- ((4b_{22}y + 2b_{23}z + 2b_{24})x + 2x^2b_{21})n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 12} &= (2zb_{24} + 2zb_{22}y + 4zb_{21}x + 2z^2b_{23})n_y - 2b_{22}zxn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 13} &= (4b_{21}x + 2b_{23}z + 2b_{22}y + 2b_{24})n_y - 2b_{22}xn_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{[2(i-1)+3\ 14} &= b_{21}y^2n_y - ((2b_{23}z + 2b_{24})y + 2yb_{21}x + 3y^2b_{22})n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 15} &= 2b_{21}zyn_y - (4zb_{22}y + 2zb_{24} + 2zb_{21}x + 2z^2b_{23})n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 16} &= 2b_{21}yn_y - (2b_{21}x + 2b_{24} + 4b_{22}y + 2b_{23}z)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 17} &= b_{21}z^2n_y - b_{22}z^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 18} &= 2b_{21}zn_y - 2b_{22}zn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 19} &= ((2b_{24} + 2b_{32}y + 2b_{33}z)x + 3x^2b_{31})n_y - b_{32}x^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 20} &= (4yb_{31}x + (2b_{34} + 2b_{33}z)y + 2y^2b_{32})n_y \\
&- ((4b_{32}y + 2b_{33}z + 2b_{34})x + 2x^2b_{31})n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 21} &= (2z^2b_{33} + 2zb_{34} + 4zb_{31}x + 2zb_{32}y)n_y - 2b_{32}zxn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 22} &= (4b_{31}x + 2b_{34} + 2b_{33}z + 2b_{32}y)n_y - 2b_{32}xn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 23} &= b_{31}y^2n_y - ((2b_{34} + 2b_{33}z)y + 3y^2b_{32} + 2yb_{31}x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 24} &= 2b_{31}zyn_y - (2z^2b_{33} + 4zb_{32}y + 2zb_{34} + 2zb_{31}x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 25} &= 2b_{31}yn_y - (2b_{31}x + 2b_{34} + 4b_{32}y + 2b_{33}z)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 26} &= b_{31}z^2n_y - b_{32}z^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 27} &= 2b_{31}zn_y - 2b_{32}zn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 28} &= (3x^2b_{41} + (2b_{44} + 2b_{43}z + 2b_{42}y)x)n_y - b_{42}x^2n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 29} &= ((2b_{43}z + 2b_{44})y + 4yb_{41}x + 2y^2b_{42})n_y - (2x^2b_{41} \\
&+ (4b_{42}y + 2b_{43}z + 2b_{44})x)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 30} &= (2z^2b_{43} + 4zb_{41}x + 2zb_{44} + 2zb_{42}y)n_y - 2b_{42}zxn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 31} &= (2b_{44} + 2b_{43}z + 2b_{42}y + 4b_{41}x)n_y - 2b_{42}xn_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 32} &= y^2b_{41}n_y - (2yb_{41}x + 3y^2b_{42} + (2b_{43}z + 2b_{44})y)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 33} &= 2zb_{41}yn_y - (2zb_{44} + 2z^2b_{43} + 2zb_{41}x + 4zb_{42}y)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 34} &= 2yb_{41}n_y - (2b_{41}x + 2b_{44} + 4b_{42}y + 2b_{43}z)n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 35} &= z^2b_{41}n_y - z^2b_{42}n_x \\
m_{[2(i-1)+3\ 36} &= 2zb_{41}n_y - 2b_{42}zn_x
\end{aligned}
$$

Por fim, a parte não-homogênea das equações.

$$
\begin{aligned}
u_{4n+1} &= (b_{13} + b_{23} + b_{33} + b_{43})ny - (b_{12} + b_{22} + b_{32} + b_{42})nz \\
u_{4n+2} &= -(b_{13} + b_{23} + b_{33} + b_{43})nx + (b_{11} + b_{21} + b_{31} + b_{41})nz \\
u_{4n+3} &= (b_{12} + b_{22} + b_{32} + b_{42})nx - (b_{21} + b_{11} + b_{31} + b_{41})ny
\end{aligned}
$$

C.3
Reduzir altos coeficientes

Dez novas linhas são incluídas por tetraedro ao sistema com a inclusão dessa restrição. Se estivermos levando em consideração o i-ésimo tetraedro da malha, os elementos das linhas da matriz que o representam estão descritos abaixo.

$$
\begin{array}{lllllllll}
m_{i\ 1} & = & b_{11} & m_{i+3\ 20} & = & 2b_{32} & m_{i+6\ 5} & = & b_{12} \\
m_{i\ 10} & = & b_{21} & m_{i+3\ 23} & = & b_{31} & m_{i+6\ 14} & = & b_{22} \\
m_{i\ 19} & = & b_{31} & m_{i+3\ 29} & = & 2b_{42} & m_{i+6\ 23} & = & b_{32} \\
m_{i\ 28} & = & b_{41} & m_{i+3\ 32} & = & b_{41} & m_{i+6\ 32} & = & b_{42}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
m_{i+1\,1} & = b_{12} & m_{i+4\,2} & = 2b_{13} & m_{i+7\,5} & = b_{13} \\
m_{i+1\,2} & = 2b_{11} & m_{i+4\,3} & = 2b_{12} & m_{i+7\,6} & = 2b_{12} \\
m_{i+1\,10} & = b_{22} & m_{i+4\,6} & = 2b_{11} & m_{i+7\,14} & = b_{23} \\
m_{i+1\,11} & = 2b_{21} & m_{i+4\,11} & = 2b_{23} & m_{i+7\,15} & = 2b_{22} \\
m_{i+1\,19} & = b_{31} & m_{i+4\,12} & = 2b_{22} & m_{i+7\,23} & = b_{33} \\
m_{i+1\,20} & = 2b_{31} & m_{i+4\,15} & = 2b_{21} & m_{i+7\,24} & = 2b_{32} \\
m_{i+1\,28} & = b_{42} & m_{i+4\,20} & = 2b_{33} & m_{i+7\,32} & = b_{43} \\
m_{i+1\,29} & = 2b_{41} & m_{i+4\,21} & = 2b_{32} & m_{i+7\,33} & = 2b_{42} \\
m_{i+2\,1} & = b_{13} & m_{i+4\,24} & = 2b_{31} & m_{i+8\,6} & = 2b_{12} \\
m_{i+2\,3} & = 2b_{11} & m_{i+4\,29} & = 2b_{43} & m_{i+8\,8} & = b_{12} \\
m_{i+2\,10} & = b_{23} & m_{i+4\,30} & = 2b_{42} & m_{i+8\,15} & = 2b_{23} \\
m_{i+2\,12} & = 2b_{21} & m_{i+4\,33} & = 2b_{41} & m_{i+8\,16} & = b_{22} \\
m_{i+2\,19} & = b_{33} & m_{i+5\,3} & = 2b_{13} & m_{i+8\,24} & = 2b_{33} \\
m_{i+2\,21} & = 2b_{31} & m_{i+5\,8} & = b_{11} & m_{i+8\,26} & = b_{32} \\
m_{i+2\,28} & = b_{43} & m_{I+5\,12} & = 2b_{23} & m_{i+8\,33} & = 2b_{43} \\
m_{i+2\,30} & = 2b_{41} & m_{i+5\,17} & = 2b_{21} & m_{i+8\,35} & = b_{42} \\
m_{i+3\,2} & = 2b_{12} & m_{i+5\,21} & = b_{21} & m_{i+9\,8} & = b_{13} \\
m_{i+3\,5} & = b_{11} & m_{i+5\,26} & = b_{31} & m_{i+9\,17} & = b_{23} \\
m_{i+3\,11} & = 2b_{22} & m_{i+5\,30} & = 2b_{43} & m_{i+9\,26} & = b_{33} \\
m_{i+3\,14} & = b_{21} & m_{i+5\,35} & = b_{41} & m_{i+9\,35} & = b_{43}
\end{array}
$$

C.4 Coeficiente J

Incluir o coeficiente J no sistema provoca uma alteração na equação do caso básico. Os elementos da linha referentes ao ponto p_i ficam agora definidos abaixo.

$$
\begin{aligned}
m_{i\,1} &= x^2yb_{12} + x^3b_{11} + x^2zb_{13} + x^2b_{14} \\
m_{i\,2} &= 2xyzb_{13} + 2x^2yb_{11} + 2xyb_{14} + 2xy^2b_{12} \\
m_{i\,3} &= 2xzb_{14} + 2xyzb_{12} + 2x^2zb_{11} + 2xz^2b_{13} \\
m_{i\,4} &= 2xyb_{12} + 2xzb_{13} + 2xb_{14} + 2x^2b_{11} \\
m_{i\,5} &= y^2b_{14} + y^3b_{12} + y^2zb_{13} + xy^2b_{11} \\
m_{i\,6} &= 2y^2zb_{12} + 2xyzb_{11} + 2yzb_{14} + 2yz^2b_{13} \\
m_{i\,7} &= 2yzb_{13} + 2xyb_{11} + 2yb_{14} + 2y^2b_{12} \\
m_{i\,8} &= z^3b_{13} + xz^2b_{11} + z^2b_{14} + yz^2b_{12} \\
m_{i\,9} &= 2yzb_{12} + 2xzb_{11} + 2z^2b_{13} + 2zb_{14} \\
m_{i\,10} &= xb_{11} + yb_{12} + zb_{13} + b_{14} \\
m_{i\,11} &= x^2b_{24} + x^2yb_{22} + x^3b_{21} + x^2zb_{23} \\
m_{i\,12} &= 2xy^2b_{22} + 2xyzb_{23} + 2xyb_{24} + 2x^2yb_{21} \\
m_{i\,13} &= 2xyzb_{22} + 2x^2zb_{21} + 2xzb_{24} + 2xz^2b_{23} \\
m_{i\,14} &= 2xb_{24} + 2x^2b_{21} + 2xzb_{23} + 2xyb_{22} \\
m_{i\,15} &= y^3b_{2,2} + xy^2b_{21} + y^2b_{24} + y^2zb_{23} \\
m_{i\,16} &= 2y^2zb_{22} + 2xyzb_{21} + 2yz^2b_{23} + 2yzb_{24}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{i\,17} &= 2y^2b_{22} + 2xyb_{21} + 2yb_{24} + 2yzb_{23} \\
m_{i\,18} &= xz^2b_{21} + z^2b_{24} + z^3b_{23} + yz^2b_{22} \\
m_{i\,19} &= 2yzb_{22} + 2z^2b_{23} + 2zb_{24} + 2xzb_{21} \\
m_{i\,20} &= xb_{21} + yb_{22} + zb_{23} + b_{24} \\
m_{i\,21} &= x^2zb_{33} + x^2yb_{32} + x^2b_{34} + x^3b_{31} \\
m_{i\,22} &= 2xyb_{34} + 2xy^2b_{32} + 2xyzb_{33} + 2x^2yb_{31} \\
m_{i\,23} &= 2xz^2b_{33} + 2xzb_{34} + 2x^2zb_{31} + 2xyzb_{32} \\
m_{i\,24} &= 2xyb_{32} + 2xzb_{33} + 2x^2b_{31} + 2xb_{44} \\
m_{i\,25} &= xy^2b_{31} + y^3b_{32} + y^2b_{34} + y^2zb_{33} \\
m_{i\,26} &= 2yz^2b_{33} + 2y^2zb_{32} + 2yzb_{34} + 2xyzb_{31} \\
m_{i\,27} &= 2xyb_{31} + 2yb_{34} + 2yzb_{33} + 2y^2b_{32} \\
m_{i\,28} &= z^2b_{34} + z^3b_{33} + yz^2b_{32} + xz^2b_{31} \\
m_{i\,29} &= 2zb_{34} + 2yzb_{32} + 2xzb_{31} + 2z^2b_{33} \\
m_{i\,30} &= xb_{31} + yb_{32} + zb_{33} + b_{34} \\
m_{i\,31} &= x^2zb_{43} + x^3b_{41} + x^2yb_{42} + x^2b_{44} \\
m_{i\,32} &= 2xy^2b_{42} + 2xyb_{44} + 2xyzb_{43} + 2x^2yb_{41} \\
m_{i\,33} &= 2xzb_{44} + 2xyzb_{42} + 2x^2zb_{41} + 2xz^2b_{43} \\
m_{i\,34} &= 2x^2b_{41} + 2xyb_{42} + 2xb_{44} + 2xzb_{43} \\
m_{i\,35} &= xy^2b_{41} + y^2zb_{41} + y^3b_{42} + y^2b_{44} \\
m_{i\,36} &= 2yz^2b_{43} + 2yzb_{44} + 2y^2zb_{42} + 2xyzb_{41} \\
m_{i\,37} &= 2yb_{44} + 2y^2b_{42} + 2yzb_{43} + 2xyb_{41} \\
m_{i\,38} &= z^2b_{44} + xz^2b_{41} + z^3b_{43} + 4 = yz^2b_{42} \\
m_{i\,39} &= 2z^2b_{43} + 2yzb_{42} + 2zb_{44} + 2xzb_{41} \\
m_{i\,40} &= xb_{41} + yb_{42} + zb_{43} + b_{44}
\end{aligned}
$$

C.5
Diferentes Superfícies de Nível

Essa restrição adiciona duas novas linhas ao sistema para cada ponto de entrada. As equações permanecem as mesmas das seções C.1 e C.4, para o caso básico com o coeficiente J fixo e para o caso com a inclusão do coeficiente J como incógnita. Mudanças acontecem apenas na posição dos pontos como descritos na seção 4.6 formando dois novos conjuntos de pontos de entrada com $F = -1$ na equação formada com os pontos movidos na direção contrária a da normal e $F = 1$ para os pontos movidos na direção da normal.