



**Allyson Ney Teodosio Cabral**

## **Reconstrução de Superfícies Utilizando Tetraquads**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador : Prof. Thomas Lewiner  
Co-Orientador: Prof. Rodrigo Penteadó Ribeiro de Toledo

Rio de Janeiro  
Março de 2015



**Allyson Ney Teodosio Cabral**

## **Reconstrução de Superfícies Utilizando Tetraquads**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Thomas Lewiner**

Orientador

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Rodrigo Penteado Ribeiro de Toledo**

Co-Orientador

Instituto de Matemática - UFRJ

**Prof. Waldemar Celes Filho**

Departamento de Informática - PUC-Rio

**Prof. Pedro Mário Cruz e Silva**

Instituto Tecgraf - PUC-Rio

**Prof. Luis Mariano Peñaranda**

Departamento de Ciência da Computação - UFRJ

**Prof. Vinícius Moreira Mello**

Departamento de Matemática - UFBA

**Prof. Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

**Prof. Ricardo Guerra Marroquim**

COPPE - UFRJ

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de Março de 2015

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Allyson Ney Teodosio Cabral**

Graduou-se em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Alagoas em 2007 e em Sistemas de Informação pelo Instituto Federal de Alagoas em 2008. Recebeu o grau de mestre em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas em 2010 sob a supervisão do professor Vinícius Mello onde trabalhou em um sistema para visualização de curvaturas em superfícies. Atualmente ocupa o cargo de pesquisador no Instituto Tecgraf da PUC-Rio.

#### Ficha Catalográfica

Cabral, Allyson.

Reconstrução de Superfícies Utilizando Tetraquads / Allyson Ney Teodosio Cabral; orientador: Thomas Lewiner; co-orientador: Rodrigo Penteado Ribeiro de Toledo. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2015.

v., 103 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Tetraquad. 3. Triquad. 4. Tetraedro. 5. Cúbicas. 6. Quádricas. 7. Reconstrução de Superfícies. 8. Modelagem. 9. GPU. I. Lewiner, Thomas.. II. Toledo, Rodrigo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Dedico este trabalho aos meus pais pelos ensinamentos, pelo incentivo durante toda a minha vida e por acreditarem sempre nos meus sonhos. Aos familiares que contribuíram para que este momento se tornasse realidade. Meu eterno agradecimento pelo amor e pela base que vocês deram para me tornar o ser humano que sou hoje.

Aos amigos da PUC Clarrisa, Yuri Ki, Allan, Rômulo e Tiago Novello, foi um prazer compartilhar tantos momentos importantes com vocês. Um agradecimento especial ao Thiago Elias que entrou nesse barco junto comigo acreditando no tema e contribuindo com este trabalho. Aos amigos do projeto V3o2 com os quais aprendi muito e que foram tão pacientes durante a proximidade da defesa. Aos amigos Marcelo e Chrystiano que cresceram junto comigo longe de casa, o apartamento da Gávea deixou saudades.

À Renata e ao João, amigos que levo para a vida inteira, pelas inúmeras conversas e conselhos dos quais sou imensamente grato. Meus grandes companheiros de doutorado. Aos amigos de longa data, Fabiane e Michel, pelo carinho que sempre tiveram comigo, pelas correções e sugestões para o texto. À Scarlett que esteve presente em grande parte dessa caminhada e cuja amizade é um dos maiores presentes que eu ganhei durante o doutorado. Ao Pedro Seixas pelas ajudas durante a escrita do texto, confecção de imagens, pela apresentação linda que me ajudou a construir, mas principalmente pelo carinho e apoio nos momentos em que parecia impossível me ajudando a respirar fundo e seguir em frente, uma das pessoas mais especiais que cruzaram o meu caminho.

Ao meu orientador e amigo Thomas com quem compartilho muitas das conquistas nos últimos anos, pela generosidade, por me ajudar a ser um profissional e uma pessoa melhor. À Débora que junto com o Thomas tornou meus primeiros meses no Rio muito mais leves e alegres. Pelo acolhimento e carinho de vocês, minha imensa gratidão. Ao meu co-orientador Rodrigo, por ter confiado suas ideias, por toda paciência, troca de experiências e suporte. Aos meus orientadores de graduação e mestrado Adelaïson e Vinícius pelos ensinamentos, amizade e apoio durante todos esses anos.

Aos professores Pedro Mário, Luiz Velho, Luis Peñaranda, Waldemar Celles e Ricardo Marroquim pelas valorosas contribuições para este trabalho.

À Fundação Padre Leonel Franca, ao Instituto Tecgraf, à PUC-Rio/VRAC, à Capes e à FAPERJ.

A todos que ajudaram a tornar este trabalho possível.

## Resumo

Cabral, Allyson.; Lewiner, Thomas.; Toledo, Rodrigo. **Reconstrução de Superfícies Utilizando Tetraquads**. Rio de Janeiro, 2015. 103p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A reconstrução de superfícies é um problema que recebe bastante atenção em Computação Gráfica dada a importância de suas aplicações. Uma solução comum é representar essas superfícies por malhas triangulares. Neste trabalho é proposta uma estrutura de tetraedros com cúbicas definidas em seu interior que são utilizadas para aproximar a superfície. Essas cúbicas, chamadas de *TetraQuads*, são superfícies implícitas de grau 3 definidas como interpolação de quádricas posicionadas nos vértices dos tetraedros. Esses elementos foram idealizados de forma que seja rápido o processamento para visualização dessa estrutura pelo *hardware* gráfico. Os objetos definidos dessa maneira carregam mais informações do ponto de vista da geometria diferencial que uma malha triangular. Por esse motivo, têm uma modelagem mais complexa a ser resolvida. Esse problema é discutido ao apresentar os passos para reconstrução de superfícies por *TetraQuads* a partir de nuvens de pontos.

## Palavras-chave

Tetraquad; Triquad; Tetraedro; Cúbicas; Quádricas; Reconstrução de Superfícies; Modelagem; GPU.

## Abstract

Cabral, Allyson.; Lewiner, Thomas. (advisor); Toledo, Rodrigo. **Surface Reconstruction Using Tetraquads**. Rio de Janeiro, 2015. 103p. PhD Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Surface reconstruction is a problem that receives a lot of attention in Computer Graphics due to the importance and the number of its applications. A common solution is to represent these surfaces through triangular meshes. This work introduces an alternative structure of tetrahedrons with cubics defined in its interior, which are used to approximate the surface. Those cubics, called *TetraQuads*, are third-degree implicit surfaces defined as an interpolation of quadrics positioned at the tetrahedrons vertices. These elements are constructed for an efficient visualization by the graphics hardware. Objects defined in this manner contain more information from the differential geometry point of view than a triangle mesh, which entails a more complex modeling problem. This problem is discussed throughout the steps of surface reconstruction from point clouds through *TetraQuads*.

## Keywords

Tetraquad; Triquad; Tetrahedron; Cubics; Quadrics; Surface Reconstruction; Modeling; GPU.

## Sumário

1	Introdução	<b>13</b>
1.1	Trabalhos Relacionados	16
1.2	Contribuições	19
2	TetraQuad	<b>20</b>
2.1	Coordenadas Baricêntricas	20
2.2	Definição	23
2.3	Malha de <i>TetraQuads</i>	27
2.4	Normais no <i>TetraQuad</i>	28
2.5	Construindo um Exemplo	30
3	Visualização de <i>TetraQuads</i>	<b>33</b>
3.1	<i>Ray Casting</i>	33
3.2	<i>Ray Casting</i> de <i>TetraQuads</i>	34
3.3	Divisão dos Tetraedros	35
3.4	Interpolação	38
3.5	Normais	40
4	Modelagem	<b>42</b>
4.1	<i>Fitting</i> de Pontos e Mínimos Quadrados	43
4.2	Construção do Sistema	45
4.3	Caso Básico	46
4.4	Incluindo as Normais dos Vértices da Superfície	48
4.5	Redução da Influência dos Coeficientes de Grau 3	49
4.6	Diferentes Superfícies de Nível	50
4.7	Coeficiente J	52
4.8	Alterações na Malha	59
4.9	Métodos para Resolução de Mínimos Quadrados	64
5	Qualidade dos Resultados	<b>71</b>
5.1	Construindo um Volume de Distâncias	71
5.2	Métodos de Resolução de Mínimos Quadrados	74
5.3	Pesos das Equações	78
6	Conclusão	<b>85</b>
	Referências Bibliográficas	<b>87</b>
A	Notação	<b>90</b>
B	Mais Alguns Resultados	<b>92</b>
C	Construindo as Matrizes	<b>97</b>
C.1	Caso Básico	97

C.2	Normais	98
C.3	Reduzir altos coeficientes	101
C.4	Coeficiente $J$	102
C.5	Diferentes Superfícies de Nível	103



## Lista de figuras

1.1	Partição do espaço contendo a esfera $S$ .	13
1.2	Criando uma aproximação poligonal da esfera.	14
1.3	Resultado obtido com <i>TetraQuads</i> .	15
1.4	Reconstruções obtidas a partir da técnica proposta por Toledo, onde são empregadas superfícies simples como esferas, cones, cilindros e toros.	16
1.5	Estimação de topologia apresentada no trabalho de Mello.	17
1.6	Animação de uma superfície de grau 4 utilizando a técnica de Loop e Blinn.	18
1.7	Exemplo de <i>TriQuad</i> .	18
2.1	Transladando o triângulo.	21
2.2	Encontrando as coordenadas baricêntricas do ponto $p$ .	21
2.3	Exemplo de <i>ray casting</i> de quádrlica.	24
2.4	Exemplo da interpolação de quádrlicas em apenas uma direção.	25
2.5	Exemplo de <i>TetraQuads</i> . Vértices vermelhos representam a esfera e vértices amarelos, o hiperboloide.	26
2.6	Exemplo de malha de <i>TetraQuads</i> de resolução $4 \times 4 \times 4$ .	27
2.7	Malha com 218 tetraedros.	28
2.8	Construindo um exemplo empiricamente.	29
2.9	Exemplo de campo de normais com uma indefinição.	30
2.10	O tetraedro $T$ e as quádrlicas utilizadas no exemplo.	31
2.11	Exemplo da interpolação de quádrlicas formando o <i>TetraQuad</i> .	32
3.1	<i>Pipeline</i> de visualização.	33
3.2	<i>Ray casting</i> de uma esfera.	34
3.3	Encontrando os pontos de interseção entre o raio e o tetraedro.	35
3.4	Casos de subdivisão do tetraedro.	36
3.5	Ordenando os vértices do tetraedro.	36
3.6	Projeção de $T$ com quatro triângulos.	37
3.7	Projeção de $T$ com três triângulos.	38
3.8	Processo de <i>rasterização</i> de uma das faces do tetraedro.	39
3.9	Exemplo de problemas na reconstrução do modelo <i>Bunny</i> .	41
4.1	Objetivo do sistema	42
4.2	Modelo <i>Cassini</i> .	43
4.3	Resultado final.	43
4.4	Obtenção de curvas. À esquerda, curva obtida utilizando-se interpolação polinomial. À direita, curva obtida utilizando-se o método dos mínimos quadrados.	44
4.5	Primeiras linhas da matriz $M$ em um caso básico. As marcações indicam entradas não-nulas.	46
4.6	Caso Simples.	48
4.7	<i>Cassini</i> construído com $F = 0$ .	48

4.8	<i>Cassini</i> construído com $F = 0$ e Normais.	49
4.9	Reconstrução do modelo <i>Cassini</i> com $F = 0$ e redução da influência dos coeficientes de grau 3.	51
4.10	Construção dos novos conjuntos de pontos para $F = -1$ e $F = 1$ .	51
4.11	Reconstrução do modelo <i>Cassini</i> empregando diferentes superfícies de nível.	52
4.12	Modelo <i>Cassini</i> reconstruído com $J$ livre e diferentes superfícies de nível.	54
4.13	Pontos do modelo <i>Cúbica</i> .	54
4.14	Testes com o modelo <i>Cúbica</i> centrado na origem.	55
4.15	Testes com o modelo <i>Cassini</i> centrado na origem.	56
4.16	Testes com o modelo <i>Cúbica</i> afastado da origem.	57
4.17	Testes com o modelo <i>Cassini</i> afastado da origem.	58
4.18	Reconstruções obtidas com limitação do número de pontos por tetraedro.	60
4.19	Resultado obtido com o relaxamento dos vértices.	60
4.20	Iteração do algoritmo para o vértice $v_i$ .	61
4.21	Grade sem o relaxamento dos vértices.	62
4.22	Grade com o relaxamento dos vértices.	63
4.23	Resultado com o relaxamento dos vértices.	63
4.24	Reconstrução empregando malha com resolução de $8 \times 8 \times 8$ .	64
4.25	Exemplo com malha de resolução $6 \times 6 \times 6$ .	64
4.26	Resultado com aumento de resolução da malha, relaxamento dos vértices, redução dos altos coeficientes, superfícies de nível e coeficiente $J$ livre.	65
4.27	Exemplo em $\mathbb{R}^2$ .	67
4.28	Comparação do tempo de execução dos métodos SVD, QR em GPU e LSQR.	70
5.1	Construindo um volume de distâncias	72
5.2	Resultado da reconstrução do modelo <i>Cœur</i> em uma grade de resolução $2 \times 2 \times 2$ .	73
5.3	Histograma dos pontos amostrados.	73
5.4	Histograma dos pontos de entrada.	74
5.5	Gráfico de evolução do erro para cada um dos métodos.	74
5.6	Resultados obtidos com SVD e diferentes resoluções de malha.	75
5.7	Resultados obtidos com o método QR em GPU e diferentes resoluções de malha.	76
5.8	Resultados obtidos com o método LSQR e diferentes resoluções de malha.	77
5.9	Comportamento do erro ao variarmos o peso das equações das normais.	78
5.10	Variando o peso das equações de redução da influência dos coeficientes de grau 3.	79
5.11	Variando o peso das equações das superfícies de nível.	79
5.12	Bunny em uma malha de resolução $5 \times 5 \times 5$ .	80
5.13	Bunny em uma malha de resolução $8 \times 8 \times 8$ . Esse é o melhor resultado obtido com o modelo.	81

5.14	Bunny em uma malha de resolução $10 \times 10 \times 10$ .	82
5.15	Cassini em uma malha de resolução $4 \times 4 \times 4$ . Nesse resultado podem ser observadas irregularidades no campo de normais.	83
5.16	Cassini em uma malha de resolução $6 \times 6 \times 6$ . Esse é o melhor resultado obtido com o modelo.	84
B.1	Malha do modelo <i>Bi-Torus</i> com 12286 vértices e 24576 triângulos.	93
B.2	Reconstrução por <i>TetraQuads</i> do modelo <i>Bi-Torus</i> com 438 tetraedros.	93
B.3	Malha do modelo <i>Torus</i> com 18252 vértices e 36504 triângulos.	93
B.4	Reconstrução por <i>TetraQuads</i> do modelo <i>Torus</i> com 303 tetraedros.	94
B.5	Malha do modelo <i>Pig</i> com 38741 vértices e 77454 triângulos.	94
B.6	Reconstrução por <i>TetraQuads</i> do modelo <i>Pig</i> com 424 tetraedros.	95
B.7	Malha do modelo <i>Kangaroo</i> com 15107 vértices e 30210 triângulos.	95
B.8	Reconstrução por <i>TetraQuads</i> do modelo <i>Kangaroo</i> com 508 tetraedros.	96

(...)

*Et il revint vers le renard:*

*– Adieu, dit-il...*

*– Adieu, dit le renard. Voici mon secret. Il est très simple: on ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux.*

*– L'essentiel est invisible pour les yeux, répéta le petit prince, afin de se souvenir.*

*– C'est le temps que tu a perdu pour ta rose qui fait ta rose si importante.*

*– C'est le temps que j'ai perdu pour ma rose... fit le petit prince, afin de se souvenir.*

*– Les hommes ont oublié cette vérité, dit le renard. Mais tu ne dois pas l'oublier. Tu deviens responsable pour toujours de ce que tu as apprivoisé. Tu es responsable de ta rose...*

*– Je suis responsable de ma rose... répéta le petit prince, afin de se souvenir.*

**Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*.**