2
Marching Cubes

O grande uso do MC resultou, ao longo dos anos, em inúmeras melhorias em seu algoritmo. Neste capítulo, descreveremos o algoritmo Marching Cubes e suas principais melhorias relacionadas a coerência topológica e a qualidade da malha resultante.

2.1
Algoritmo Marching Cubes

Dados uma grade retangular G, com um campo escalar amostrado sobre seus vértices ($x_j \in G$), um interpolante trilinear por partes $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido em G e um isovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos a isosuperície S_λ como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $g(x) = \lambda$. O Marching cubes, em cada célula c_i da grade de G, determina como S_λ intersecta suas arestas e constrói uma triangulação que aproxima S_λ em seu interior. Desta forma o MC constrói uma malha linear por partes que aproxima a isosuperfície de interesse S_λ.

Para cada cubo da grade, para determinar como é a intersecção da isosuperfície em suas arestas, cada um de seus vértices é classificado como *positivo*, se $g(v_j) \geq \lambda$, e *negativo* se $g(v_j) < \lambda$ (da mesma forma, dizemos que um ponto $x \in c_i$ é positivo (negativo) se $g(v_j) \geq \lambda$ ($g(v_j) < \lambda$)). As arestas intersectadas serão as arestas cujos vértices possuem sinais opostos, e os pontos de interseção são determinados através da interpolação linear dos valores do campo escalar sobre seus vértices. Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda = 0$ e, assim, $S_\lambda = S_0 = S$.

Visto que existem duas classificações (positivo e negativo), para cada um dos oito vértices de um cubo existem $2^8 = 256$ configurações possíveis de sinais sobre os vértices do cubo e, consequentemente 256 configurações de isosuperfícies intersectando as arestas desse cubo. Essas 256 maneiras podem ser reduzidas para 14 se considerarmos as relações de simetria existentes no cubo.

Na Figura 2.1, apresentamos a tabela de triangulação proposta por Lorensen e Cline (16) onde, para cada cubo, de acordo com a forma de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

intersecção da isosuperfície sobre suas arestas, é apresentada uma triangulação que supostamente representaria a isosuperfície em seu interior.

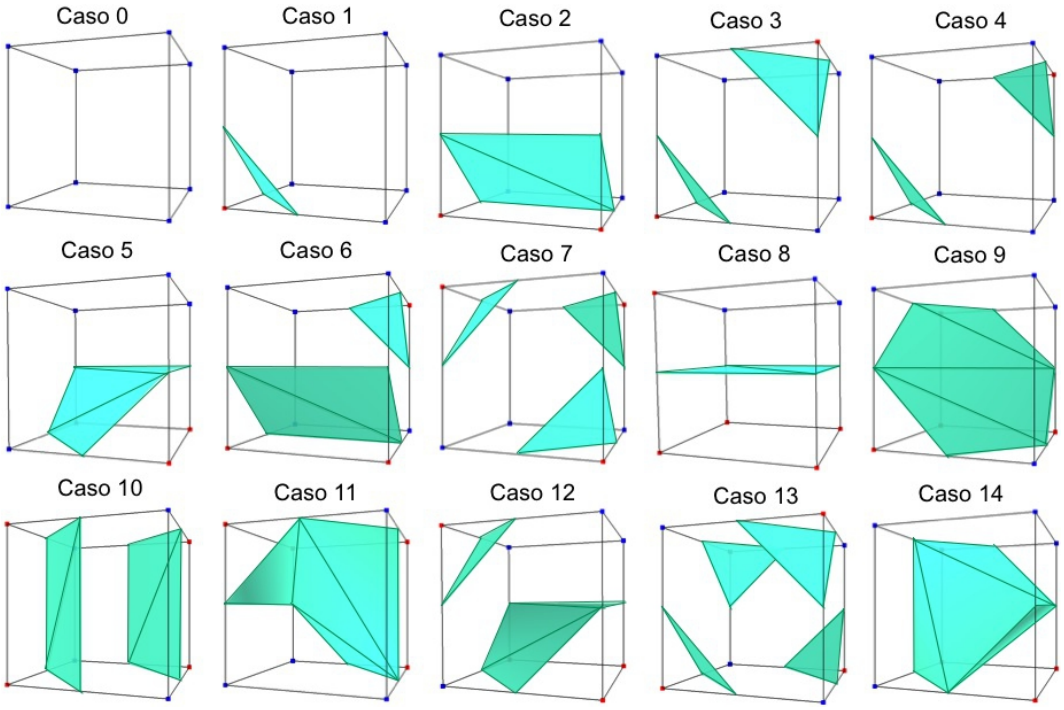

Figura 2.1: Tabela de triangulação proposta por Lorensen e Cline.

2.2 Continuidade e Coerência Topológica da Malha Resultante

Logo após a publicação do algoritmo MC, a busca de uma técnica de extração de isosuperfície topologicamente correta começou. Foram propostas várias abordagens para lidar com as descontinuidades na malha resultante e ambiguidade sobre as faces e interior do cubo, que resultavam em incoerências topológicas.

Como veremos com mais detalhes no próximo capítulo, uma face é considerada ambígua quando possui sinais alternados sobres seus vértices. Observe que com essa configuração de sinais não é possível determinar como unir corretamente os pontos de interseção sobre as arestas da face. De forma semelhante, uma ambiguidade interior ocorre quando os sinais dos vértices do cubo são insuficientes para determinar a triangulação correta em seu interior.

Dürst (9) foi o primeiro a apontar em 1988 que existiam, para alguns casos do MC, mais de uma triangulação possível. E que a tabela incompleta proposta por Lorensen e Cline nem sempre gerava superfícies topologicamente consistentes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

Em 1991, Nielson e Hamann (21) chamam a atenção para a possibilidade de ambiguidades sobre as faces do cubo, e como apontado por Dürst, para a necessidade de adicionar novos casos à tabela de triangulação de MC. Para resolver tal problema eles propõem o Asymptotic Decider, uma solução simples e elegante que, dada uma face ambígua, determina a forma correta de unir suas arestas intersectadas. Em sua tabela de triangulação, Nielson e Hamann adicionam subcasos para os casos 3, 6, 7, 10, 12 e 13 (veja Figura 2.2), casos do MC que possuem faces ambíguas em sua configuração.

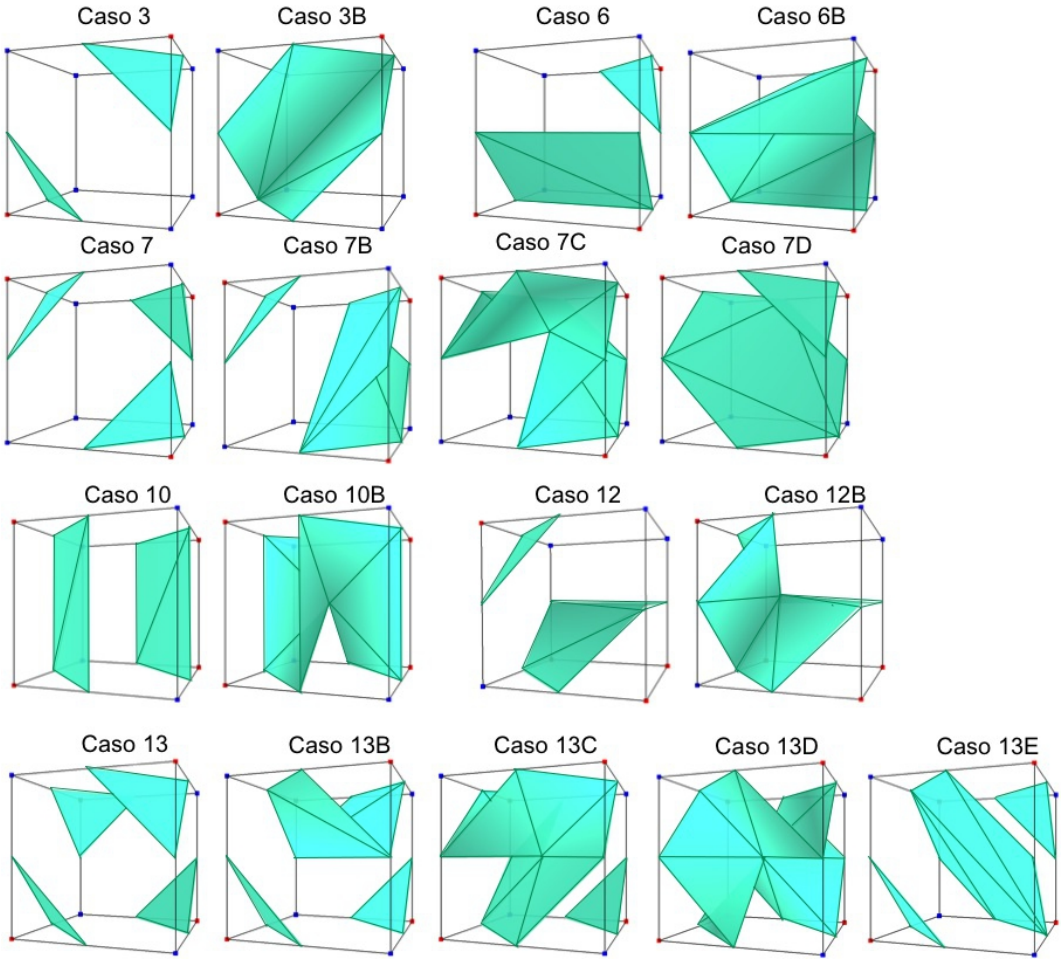

Figura 2.2: Triangulações adicionas propostas por Nielson e Haman.

No entanto, os casos adicionados por Nielson e Hamann não foram suficientes para garantir a coerência topológica da malha gerada. Em 1994, Natarajan (19) observou que o problema de ambiguidade também pode ocorrer no interior do cubo, e que os casos 4 e 6 ainda admitiam triangulações adicionais (veja Figura 2.3). Dada uma configuração ambígua (com ambiguidades sobre as faces ou no interior do cubo), para determinar o subcaso correto, Natarajan propôs testes baseados no sinal do campo escalar nos pontos críticos sobre as

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

faces e no interior do cubo. Apesar de sua tabela de triangulação ainda ser incompleta, não sendo capaz de representar corretamente o comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo, Natarajan foi o primeiro a considerar a possibilidade da existência de "túneis" (isosuperfície homeomorfa a um cilindro) no interior do cubo.

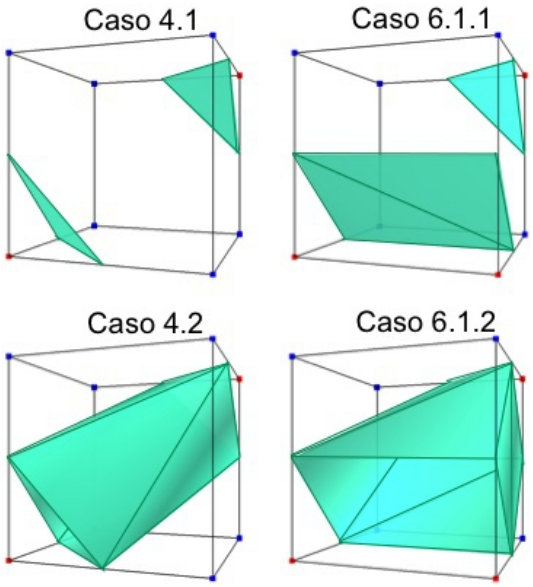

Figura 2.3: Triangulações adicionas para os casos 4 e 6. Na primeira linha, as triangulações já consideradas por Lorensen, Cline, Nielson e Haman. Na segunda linha, as triangulações adicionais propostas por Natarajan.

Utilizando uma abordagem diferente, em 1995 Chernyaev (5) estende a tabela do MC original para 33 casos (veja Figura 2.4), nomeando o algoritmo proposto de MC33; esta extensão incluiu todos os subcasos para cada caso ambíguo da tabela do MC. Para resolver o problema de ambiguidade sobre as faces, Chernyaev usa o Asymptotic Decider proposto por Nielson e Haman, e propõe um novo teste para resolver o problema de ambiguidade no interior do cubo.

Em 1999 Matveyev (17) propõe um algoritmo que também é baseado em uma tabela que representa corretamente o comportamento do interpolante trilinear e usa as interseções da isosuperfície sobre as diagonais do cubo para determinar o caso correto. Em 2002, Theisel (25) usou superfícies de Bézier para construir isosuperfície C^1 contínua topologicamente correta.

Em 2003, Lewiner et al. (14) propõem uma implementação do algoritmo proposto por Chernyaev. Nielson, no seu trabalho *On Marching Cubes* (20), lista todos os possíveis comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo e constrói um MC topologicamente correto. Também em 2003, Lopes e Brodlie (15) estendem os testes propostos por Natarajan para todos os

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

casos ambíguos do MC. No entanto, assim como no trabalho de Natarajan, o algoritmo não considera a possibilidade de o caso 7 possuir dois pontos críticos no interior do cubo, o que resulta em incoerências topológicas na malha gerada.

Observe que, apesar de muitos dos algoritmos apresentados anteriormente serem topologicamente consistentes, poucos deles são topologicamente coerentes. Além disso, a implementação de um algoritmo de extração de isosurperfícies topologicamente correto não é uma tarefa trivial. Uma vez que o algoritmo é implementado, garantias topológicas, tanto consistência quanto coerência, podem ser perdidas devido a problemas de implementação, como mostrado no trabalho de Etiene et al. (10).

No próximo capítulo, voltaremos as atenções para o MC33. Apesar de terem se passado 10 anos desde a publicação da implementação do MC33, e quase 20 anos desde que Chernyaev publicou o seu trabalho, acreditamos que é importante corrigir problemas que passaram despercebidos desde então. Com isso, pretendemos fechar uma lacuna existente na literatura do MC33. Além disso, nosso objetivo não é apenas fornecer um algoritmo correto, mas que a nossa implementação é fiel ao algoritmo original. Para tal, explicamos as causas e propomos soluções, para problemas encontrados tanto no algoritmo quanto para implementação do MC33. Tais modificações resultaram em um algoritmo que chamamos C-MC33 (6).

2.3 Qualidade da Malha Resultante

As melhorias no Marching Cubes, que por muito tempo eram direcionadas apenas para as garantias topológicas da malha resultante, têm nos últimos anos voltado suas atenções para a qualidade dos triângulos da malha gerada. Apesar de toda a sua popularidade, a malha gerada pelo MC tem uma alta frequência de triângulos finos e degenerados.

O problema da qualidade da triangulação gerada pelo MC que por muito tempo foi resolvido com o pós-processamento da malha, vem, recentemente, sendo solucionado através de modificações feitas diretamente no algoritmo do Marching Cubes. A seguir descreveremos trabalhos que propõem processamentos adicionais sobres os elementos da grade e até mesmo modificação na tabela de triangulação, buscando obter uma melhor triangulação.

Dietrich et al. (8, 7) propõem métodos para a análise do comportamento da isosuperfície no interior do cubo e, consequentemente, da qualidade da triangulação gerada. Nesses trabalhos eles propõem uma melhoria na qualidade dos triângulos gerados pelo MC através de transformação lineares aplicadas nas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

arestas da grade e analisam a qualidade do triângulo gerado introduzindo o conceito de grupos de arestas, combinações das arestas do cubo tomadas três a três. Através da análise da qualidade do triângulo gerado por cada grupo de arestas, propõem modificação na tabela de triangulação do MC, removendo da tabela grupos de arestas com alta probabilidade de gerar um triângulo com baixa qualidade. Apesar de eficazes em melhorar a qualidade da malha extraída pelo Marching Cubes, os métodos propostos não evitam que triângulos degenerados sejam criados.

Os trabalhos de Dietrich et al. descritos acima têm como base a observação de que triângulos ruins são gerados quando a isosuperfície intersecta as arestas do cubo próximo aos vértices da grade. Observe que as transformações propostas nas arestas da grade tem como objetivo afastar pontos de interseção sobre arestas incidentes a um mesmo vértice da grade. Do mesmo modo, os grupos de arestas com maior probabilidade de gerar triângulos ruins são os grupos que possuem duas ou mais arestas incidentes a um vértice em comum do cubo. Baseados nessa mesma observação, Raman e Wenger (23) uma forma de evitar que o Marching Cubes gere triângulos finos ou degenerados, através do uso de uma tabela de triangulação estendida associada à modificação no valor do campo escalar nos vértices da grade.

Em seu trabalho, Raman e Wenger observam primeiramente que a origem dos triângulos degenerados gerados pelos MC está na forma que a classificação dos vértices da grade é feita. Classificar um vértice como positivo, se possui valor escalar maior ou igual a zero e negativo, se possui valor escalar menor que zero, faz com que vértices da grade com valor escalar igual a zero sejam interpretados incorretamente e, consequentemente, que um triângulo degenerado seja criado. Para solucionar esse problema, Raman e Wenger propõem uma nova forma de classificação dos vértices da grade, onde vértices com valor escalar iguais a zero passam a fazer parte de uma classe independente dos vértices com valor escalar maiores que zero. Para que tal classificação seja possível, propõem, baseados em algoritmos de geração automática de tabelas de triangulação para o MC (13, 2, 3), um método para a criação de uma tabela onde os vértices da grade passam a fazer parte da triangulação. Note que na tabela do MC original, apenas pontos de interseção sobre as arestas da grade fazem parte da triangulação gerada. O problema dos triângulos finos é solucionado através de um algoritmo, que os autores nomearam de SnapMC, onde modificações nos valores escalares de vértices da grade próximos a pontos de interseção fazem com que esses pontos de interseção sobre as arestas da grade sejam colapsados para os vértices da grade (a proximidade dos vértices

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

a serem colapsados é determinada por um parâmetro de entrada).

Em nossos experimentos, pudemos comprovar a eficácia do SnapMC em evitar que triângulos degenerados fossem criados e em melhorar a qualidade dos triângulos gerados pelo Marching Cubes. No entanto, o algoritmo proposto por Raman e Wenger apresenta incoerências topológicas em sua malha resultante. Como veremos com mais detalhes no Capítulo 4, a tabela estendida, proposta por Raman e Wenger, é baseada em uma tabela de triangulação incompleta, incapaz de representar corretamente o comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo.

Buscando unir à coerência topológica do C-MC33 uma melhor qualidade em sua triangulação, propomos, no Capítulo 4, um algoritmo para a construção de uma tabela estendida, baseada na tabela de triangulação proposta por Chernyaev, resultando em um Marching Cubes topologicamente correto e livre de triângulos degenerados ou finos em sua triangulação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA

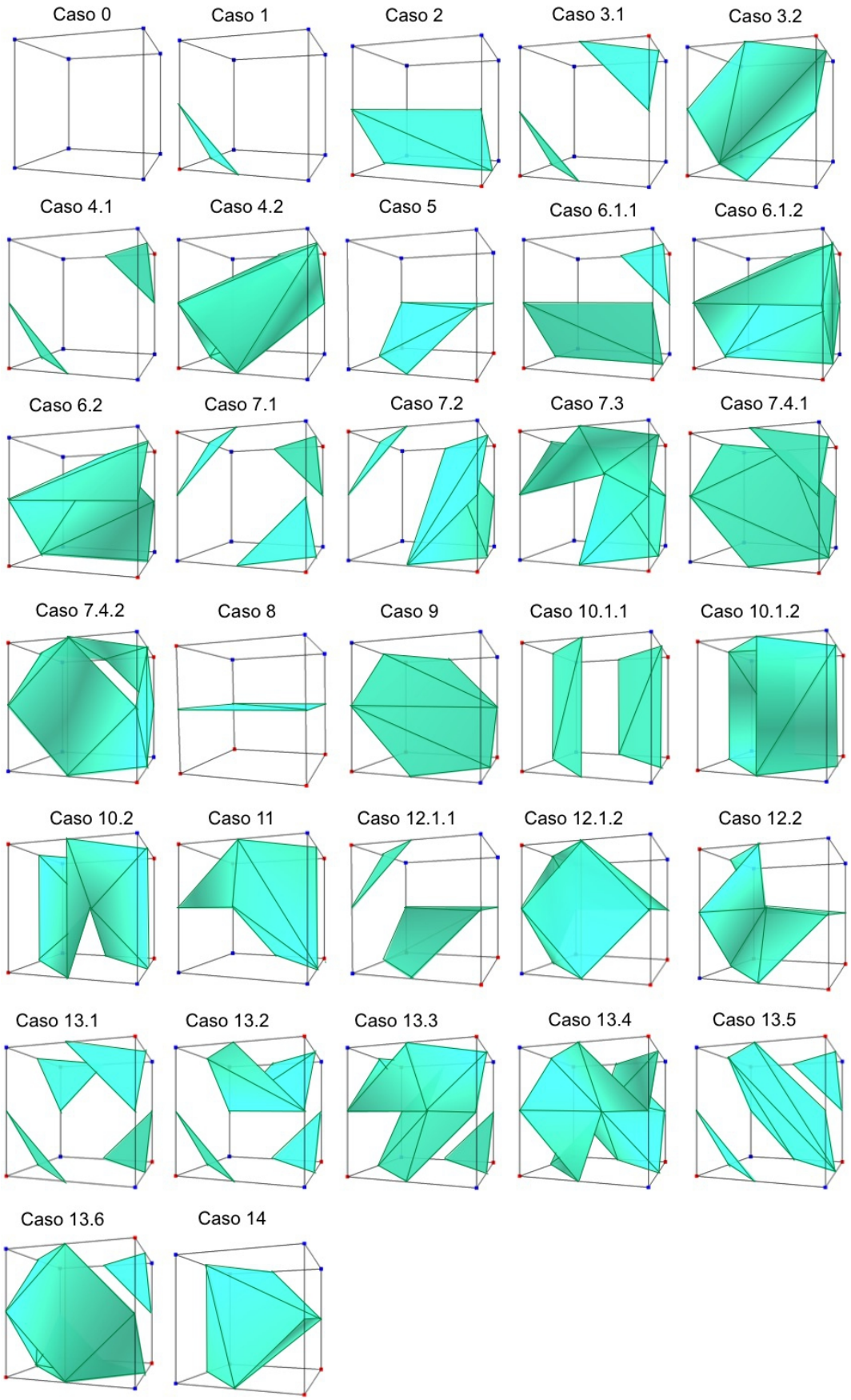

Figura 2.4: Tabela de triangulação proposta por Chernyaev.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012860/CA