

3

Marching Cubes 33: Coerência Topológica

As técnicas de extração de isosuperfícies podem ser divididas em duas classes de acordo com as suas garantias topológicas: técnicas topologicamente consistentes e técnicas topologicamente coerentes. As técnicas topologicamente *consistentes* se comprometem apenas em gerar variedades lineares por partes, enquanto as técnicas topologicamente *coerentes* produzem variedades lineares por partes, homeomorfas à superfície induzida pelo interpolante. Apesar de haver um grande número de técnicas, baseadas no Marching Cubes, topologicamente consistentes, poucas delas apresentam a coerência topológica em seus resultados. Como descrito no Capítulo 2, o Marching Cubes 33 (MC33), proposto por Chernyaev (5), foi um dos primeiros algoritmos baseados no Marching Cubes a apresentar a coerência topológica como uma de suas contribuições. Uma implementação para o algoritmo proposto por Chernyaev é proposta por Lewiner et al. (14).

No entanto, dado um interpolante, suas muitas configurações possíveis no interior de um cubo fazem com que a proposta de uma coerência topológica aumente a complexidade tanto do algoritmo quanto de sua implementação. A medida em que a complexidade do algoritmo e conseqüentemente, de sua implementação aumentam, pequenos erros podem passar despercebidos e ficar escondidos entre as muitas linhas de código.

Nesse capítulo apontamos alguns problemas no algoritmo proposto por Chernyaev e em sua extensão e implementação proposta por Lewiner et al. (14), que resultam em incoerências topológicas na malha resultante do MC33. Em seguida apresentamos soluções para cada um dos problemas encontrados, chegando assim em um MC33 topologicamente correto, que chamaremos de C-MC33. Observe que, dependendo do contexto, MC33, pode referir-se tanto ao algoritmo proposto por Chernyaev quanto a sua implementação proposta por Lewiner et al.

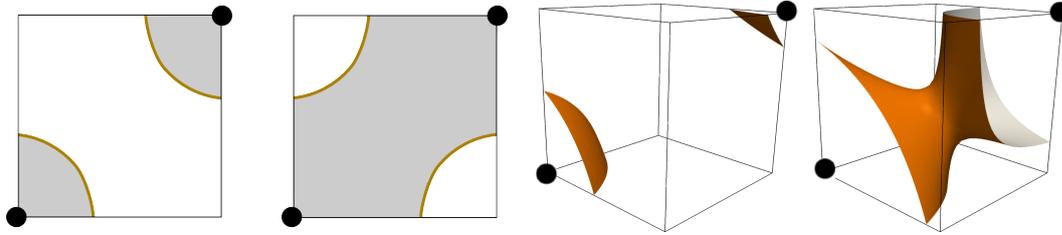


Figura 3.1: Esquerda: Ambiguidade sobre a face do cubo. Direita: Ambiguidade interior apresentada no caso 4 da tabela do Marching Cubes.

3.1

Marching Cubes 33: algoritmo proposto por Chernyaev

Os pilares do MC33 são os testes que resolvem as ambiguidades sobre as faces e no interior do cubo. Chernyaev usa o teste proposto por Nielson e Hamann, o Asymptotic Decider (21) para resolver o problema de ambiguidade sobre as faces, e baseado nesse teste, propõe um método para o interior do cubo.

Uma face é considerada ambígua quando possui sinais alternados sobre seus vértices. Ou seja, uma diagonal positiva (ambos os vértices com sinais positivos) e uma diagonal negativa (ambos os vértices com sinal negativo). Com essa configuração, os sinais dos vértices da face não são suficientes para determinar de que maneira os pontos de interseção sobre as arestas da face devem ser unidos. De forma semelhante, uma ambiguidade interior ocorre quando os sinais dos vértices do cubo são insuficientes para determinar a triangulação correta em seu interior, ou seja, quando existem várias triangulações possíveis para uma mesma configuração de sinais nos vértices do cubo (veja a Figura 3.1).

O Asymptotic Decider compara o sinal do ponto crítico sobre a face ambígua com o sinal dos vértices dessa face. Um ponto crítico positivo significa que os vértices positivos estão unidos sobre a face; conseqüentemente, os vértices positivos estarão separados se o ponto crítico for negativo (veja Figura 3.2).

Para calcular o sinal do ponto crítico sobre a face, é primeiramente calculado a posição do ponto crítico em função dos valores do campo escalar sobre os vértices da aresta (veja (5)):

$$x_c = \left(\frac{A - D}{A + C - B - D}, \frac{A - B}{A + C - B - D} \right), \quad (3-1)$$

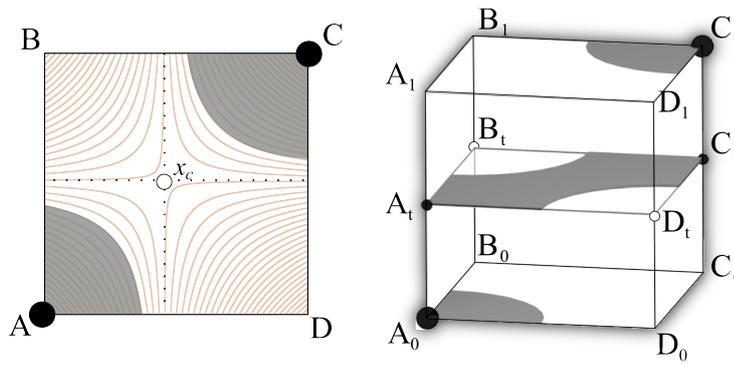


Figura 3.2: O Asymptotic Decider (esquerda) e o teste de ambiguidade interior para o caso 4 do MC (direita). Em cinza, as regiões com valor escalar positivo, e as letras maiúsculas representam o valor escalar sobre cada vértice. Na imagem à esquerda, observamos que $f(x_c) < 0$, onde x_c é a posição do ponto crítico sobre a face. As regiões positivas estarão unidas quando $f(x_c) > 0$. Na imagem à direita, o plano central na imagem representa o plano de corte usado no teste proposto por Chernyaev. O objetivo do teste proposto por Chernyaev é achar um plano cortando o cubo, paralelo às faces do cubo, de forma que as regiões em cinza nas face superior e inferior do cubo estejam unidas em seu interior.

Onde A , B , C e D são os valores do campo escalar sobre os vértices da face (veja Figura 3.2). Assim, o sinal de x_c pode ser facilmente verificado substituindo a Equação (3-1) no interpolante bilinear:

$$f(x_c) = \frac{AC - BD}{A + C - B - D}. \quad (3-2)$$

Em uma face ambígua, assumindo A , C positivos e B e D negativos, o denominador da Equação (3-2) é sempre positivo. Dessa forma, a ambiguidade sobre a face é resolvida através da análise do sinal apenas do numerador de $f(x_c)$.

Devido a ambiguidade interior, verificar a ambiguidade sobre as faces do cubo (como proposto por Nielson e Hamann (21)) não é suficiente para garantir a correta representação da isosuperfície no interior do cubo. Para resolver esse problema, baseado no Asymptotic Decider, Chernyaev propõe um teste para resolver a ambiguidade no interior do cubo, que analisa o comportamento do campo escalar (interpolado bilinearmente) em planos cortando o cubo paralelo as bases do cubo, para assim interpretar o comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo.

Dado um cubo com uma configuração ambígua, sejam A_0 , B_0 , C_0 , D_0 e A_1 , B_1 , C_1 , D_1 os valores do campo escalar nos vértices das faces inferior e superior, respectivamente (veja Figura (3.2)). Considere os vértices A_0 e C_1 ,

envolvidos na ambiguidade interior, positivos e observe que, apesar de A_0 e C_1 pertencerem a faces opostas do cubo, eles podem estar conectados através do interior do cubo. Ou seja, pode existir no interior do cubo, um caminho (um túnel) unindo os vértices A_0 e C_1 no qual todos os pontos em seu interior são positivos.

Para verificar se os vértices A_0 e C_1 estão conectados pelo interior do cubo, Chernyaev observa primeiramente que os pontos críticos nas faces inferior e superior do cubo são negativos, isto é, que a Equação (3-2) é negativa nas faces inferior e superior. Como o denominador é positivo, segue que:

$$A_0C_0 - B_0D_0 < 0 \quad (3-3)$$

$$A_1C_1 - B_1D_1 < 0. \quad (3-4)$$

Logo, se existe um plano cortando o cubo, no qual o ponto crítico seja positivo, existe uma região positiva atravessando o cubo, unindo os vértices positivos pelo interior do cubo. Em outras palavras, o teste proposto por Chernyaev procura por um $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F(t) = A_tC_t - B_tD_t > 0. \quad (3-5)$$

Substituindo $X_t = X_0 + (X_1 - X_0)t$, $X \in \{A, B, C, D\}$ e $t \in [0, 1]$ na Equação (3-5) se obtém uma equação de segunda ordem em t .

$$F(t) = A_tC_t - B_tD_t \quad (3-6)$$

$$= at^2 + bt + c, \quad (3-7)$$

onde a , b , e c estão em função de A, B, C , e D . Assim Chernyaev conclui que os vértices positivos A_0 e C_1 estão conectados pelo interior do cubo se:

i : $a < 0$;

ii : $t_{\max} = -b/2a \in (0, 1)$;

iii : $F(t_{\max}) > 0$.

Se uma das condições acima não for satisfeitas, os vértices positivos estarão separados.

3.2

Marching Cubes 33: implementação proposta por Lewiner et al.

Em sua implementação, Lewiner et al. (14) propõem uma modificação no teste interior proposto por Chernyaev. Essa modificação consiste em um método alternativo para calcular a altura t do plano cortando o cubo, usado por Chernyaev para interpretar o comportamento do interpolante trilinear. Para os casos ambíguos 6, 7, 12 e 13, os autores calculam a altura t baseados no baricentro dos vértices de uma aresta intersectada e , ponderado pelo valor do campo escalar nesses vértices (veja (14) para mais detalhes). Na prática, a implementação proposta usa:

$$t_{alt} = \frac{V_0}{V_0 - V_1}, \quad (3-8)$$

onde V_0 e V_1 são os valores escalares nos vértices da aresta e . Observe que isso é equivalente a calcular o ponto de interseção entre a isosuperfície e a aresta e .

Na implementação proposta, os autores mantem a estrutura do teste proposto por Chernyaev, no entanto, a condição (i) não é verificada e a condição (ii) é sempre satisfeita, visto que e é uma aresta intersectada pela isosuperfície, conseqüentemente, $t_{alt} \in (0, 1)$. Para os casos ambíguos 4 e 10, o teste interior é implementado como proposto por Chernyaev.

Explicamos na próxima seção porque o algoritmo proposto por Chernyaev e sua versão modificada proposta por Lewiner et al. podem resultar em incoerências topológicas.

3.3

Problemas no MC33: Algoritmo e Implementação

Nessa seção discutiremos problemas específicos relacionados ao MC33. Dois problemas de algoritmo, relacionados ao trabalho de Chernyaev (5) e, um problema no algoritmo e um problema na implementação relacionado ao trabalho de Lewiner et al. (14). As soluções para os problemas encontrados são apresentadas na próxima seção.

Essa seção está dividida da seguinte maneira: primeiro, explicamos um problema de algoritmo que detectamos no algoritmo proposto por Chernyaev em resolver a ambigüidade interior. Em seguida, discutimos um segundo problema de algoritmo relacionado à tabela de triangulação do MC33 que resulta em malhas não variedades. Apesar desse problema já ter sido discutido na literatura, o discutimos aqui pois propomos uma solução alternativa que melhor se adequa ao algoritmo proposto por Chernyaev(veja Seção 3.4). Em

seguida, relacionado ao trabalho de Lewiner et al., discutimos um problema de algoritmo no método alternativo proposto para calcular a altura t do plano usado para interpretar o interpolante trilinear no interior do cubo e, por último, discutimos um problema na implementação proposta.

3.3.1

Problema 1: Caso 13.5

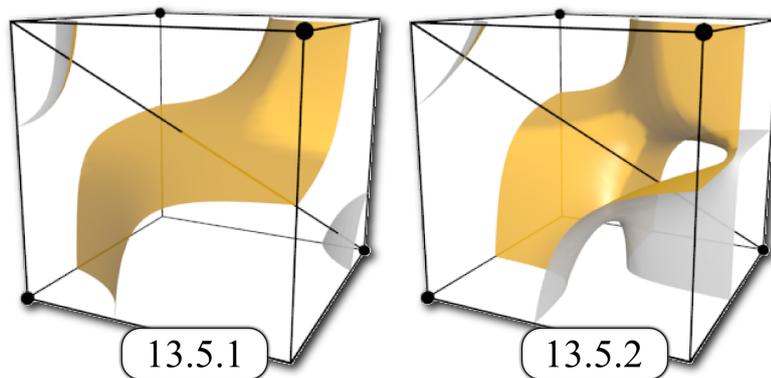


Figura 3.3: O mais complexo dos casos e um desafio para o teste proposto por Chernyaev: A diagonal ambígua possui vértices com sinais opostos e o túnel do caso 13.5.2 precisa ser orientado corretamente.

Nessa seção descrevemos o problema com o teste para resolver a ambiguidade interior proposto por Chernyaev. Em nosso conhecimento, esse problema ainda não foi discutido na literatura.

O caso 13 é certamente o caso mais complexo da tabela do MC33: todas as faces são ambíguas, e se divide em seis subcasos possíveis. Quatro desses subcasos podem ser distinguidos pelo Asymptotic Decider, e os casos 13.5.1 e 13.5.2, restantes, requerem o teste interior proposto por Chernyaev. Os casos 13.5.1 e 13.5.2 se diferenciam um do outro pelo fato de, no caso 13.5.2, os vértices positivos estarem conectados pelo interior do cubo, o que não ocorre no caso 13.5.1 (veja Figura (3.3)).

Apesar de parecer que a metodologia do MC33, descrita na seção 3.1 se encaixa naturalmente nesse cenário, como descreveremos abaixo, o método proposto por Chernyaev falha ao tentar resolver a ambiguidade interior no caso 13.5.

A Figura (3.4) mostra a mudança esperada no sinal do ponto crítico x_c em função da altura t . Temos que:

$$x_c(t) = \left(\frac{A_t - D_t}{A_t + C_t - B_t - D_t}, \frac{A_t - B_t}{A_t + C_t - B_t - D_t} \right). \quad (3-9)$$

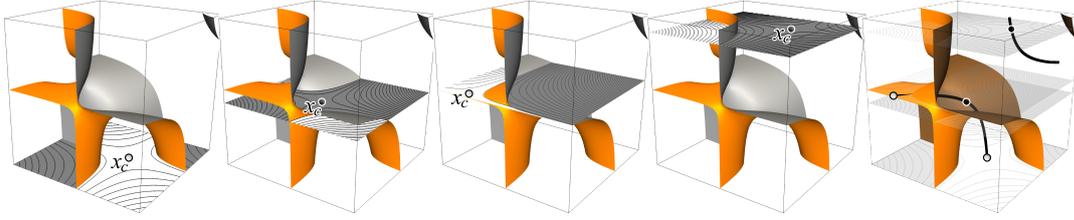


Figura 3.4: As mudanças de sinal do ponto crítico sobre o plano de corte em função da altura t . As regiões em cinza em cada plano são regiões onde $f(x) > 0$. Os pontos em preto (resp. brancos) são os pontos críticos sobre os planos com $f(x_c) > 0$ (resp. $f(x_c) < 0$). Da esquerda para a direita, as imagens mostram o sinal do ponto crítico indo de negativo para positivo, para negativo e para positivo novamente. A imagem á direita mostra a trajetória hiperbólica da posição do ponto crítico $x_c(t)$.

Segue que o ponto crítico sobre a face (e seu sinal) também pode ser definido em função de t :

$$f(x_c(t)) = \frac{A_t C_t - B_t D_t}{A_t + C_t - B_t - D_t} \quad (3-10)$$

$$= \frac{at^2 + bt + c}{A_t + C_t - B_t - D_t}. \quad (3-11)$$

Como pode ser visto na Figura (3.4), da esquerda para a direita, de acordo com a altura t do plano, o sinal do ponto crítico $f(x_c(t))$ muda de negativo para positivo, para negativo e para positivo novamente. Essas mudanças de sinal ocorrem nas raízes t_1 e t_2 de $f(x_c(t))$ e na assíntota de $f(x_c(t))$, isto é, na raíz t_a do denominador de f (veja a imagem à esquerda da Figura (3.5)). Assim, ocorrerá no total, três mudanças de sinal. A Figura (3.4) mostra o caminho traçado pelo ponto crítico $x_c(t)$, a medida que o valor de t aumenta. Observe que existe um “salto” não apenas no sinal de $f(x_c(t))$, mas também na posição de $x_c(t)$. Essa mudança ocorre exatamente quando t passa pela assíntota de $f(x_c(t))$.

O polinômio $F(t)$ (Equação (3-7)), usado no algoritmo proposto por Chernyaev, é uma equação de segunda ordem em função de t (altura do plano em relação a base do cubo) e conseqüentemente, pode permitir apenas duas mudanças de sinal. Portanto, em algum momento, o sinal determinado pelo algoritmo do MC33 não corresponderá ao sinal correto. Como o sinal do ponto crítico está envolvido em todas as condições para verificação da existência ou não de túneis no interior do cubo, o MC33 poderá falhar em determinar a topologia correta.

A origem do problema está nas equações (3-3) e (3-4) e na suposição que o denominador de $f(x_c)$ (Equação (3-2)) é positivo. Verificamos facilmente a veracidade dessa suposição para o caso 4, por exemplo, mostrado na Figura (3.2). Entretanto, no caso 13, os pontos críticos nas faces superior e inferior do cubo possuem sinais opostos, o que contraria as Equações (3-3) e (3-4). Além disso, o denominador $A + C - B - D$ de $f(x_c)$ muda de sinal na assíntota de $f(x_c)$, contrariando a suposição que ele é sempre positivo.

Como consequência, uma vez que as mudanças de sinais são rastreadas de forma incorreta, as três condições usadas para resolver a ambiguidade interna irão falhar para algum campo escalar.

Contra-exemplo

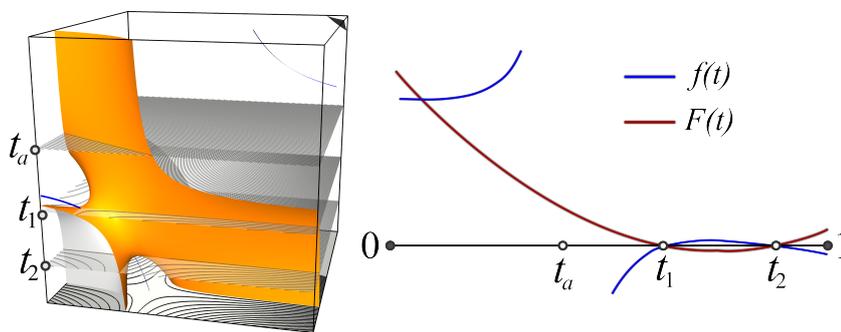


Figura 3.5: Contra-exemplo para o teste interior proposto por Chernyaev. O algoritmo MC33 interpreta incorretamente o caso 13.5.2 como o caso 13.5.1. A imagem à esquerda mostra o caso 13.5.2 e os planos cortando o cubo nas alturas t_1 , t_2 , e t_a , que correspondem às duas raízes de $F(t)$ e da assíntota de $f(x_c(t))$, respectivamente. Em azul, o caminho do ponto crítico $x_c(t)$. A figura à direita mostra as funções $f(x_c(t))$ e $F(t)$, para $t \in [0, 1]$. De acordo com os três critérios do teste proposto por Chernyaev descrito na Seção (3.1), a concavidade da parábola (em vermelho) voltada para cima indica a inexistência de um túnel (condição (i)), o que está incorreto. A curva azul indicada, por outro lado, mostra a correta variação de sinais.

A seguir, apresentamos um exemplo de como, tanto o MC33 original, quanto a sua versão modificada proposta por Lewiner et al., podem classificar incorretamente o caso 13.5. Na figura (3.5) apresentamos um caso 13.5.2 que o MC33 classifica como 13.5.1.

Seguindo o teste proposto por Chernyaev, seja:

$$\begin{aligned}
A_0 &= +0.2864 & A_1 &= -0.2384 \\
B_0 &= -0.0639 & B_1 &= +0.9486 \\
C_0 &= +0.6568 & C_1 &= -0.5049 \\
D_0 &= -0.1692 & D_1 &= +0.1075.
\end{aligned}$$

Os coeficientes a , b , e c em $F(t)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
a &= + (A_1 - A_0)(C_1 - C_0) \\
&\quad - (B_1 - B_0)(D_1 - D_0) = 0.3296 \\
b &= + C_0(A_1 - A_0) \\
&\quad + A_0(C_1 - C_0) \\
&\quad - D_0(B_1 - B_0) \\
&\quad - B_0(D_1 - D_0) = -0.4886 \\
c &= A_0C_0 - B_0D_0 = 0.1701.
\end{aligned}$$

A condição (i) não é satisfeita pois $a > 0$, o que aponta a não existencia de um túnel. Portanto, sob as condições propostas por Chernyaev, o caso 13.5.2 é incorretamente classificado como 13.5.1.

Agora, seguindo a implementação proposta por Lewiner et al., para o mesmo campo escalar, seja:

$$\begin{aligned}
A_0 &= +0.1075 & A_1 &= -0.5049 \\
B_0 &= -0.1692 & B_1 &= +0.6568 \\
C_0 &= +0.2864 & C_1 &= -0.0639 \\
D_0 &= -0.2384 & D_1 &= +0.9486.
\end{aligned}$$

A altura t do plano, calculada pela modificação proposta é dada por:

$$t_{\text{alt}} = \frac{A_0}{A_0 - A_1} = 0.1756,$$

e:

$$F(t_{\text{alt}}) = -0.0007 < 0.$$

Deste modo, a condição (iii) não é satisfeita, e segue que o caso 13.5.2

será, novamente, classificado como 13.5.1.

O problema não está relacionado apenas com a classificação incorreta do caso 13.5.2 como 13.5.1. Em nossos experimentos, encontramos exemplos onde o caso 13.5.1 é classificado, incorretamente, como 13.5.2, pois as três condições descritas na Seção 3.1 são satisfeitas.

Orientação do Túnel

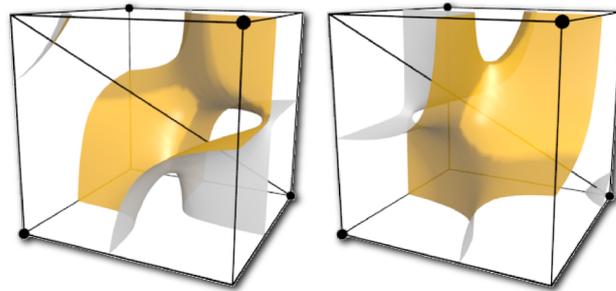


Figura 3.6: As duas orientações possíveis para o túnel do caso 13.5.2.

Um problema menor, relacionado ao caso 13.5, é a orientação do túnel do caso 13.5.2. Uma vez que o caso 13.5.2 é determinado, é preciso orientar corretamente o túnel no interior do cubo. A Figura (3.6) ilustra as duas possibilidades de orientação.

Para o caso 13.5.2, a diagonal ambígua é encontrada através do resultado retornado pelo Asymptotic Decider, sobre as faces do cubo, ou seja, analisando como os vértices se conectam através das faces do cubo. No entanto, isso não possibilita a correta detecção da orientação do túnel, pois como podemos observar na Figura (3.6), existem duas orientações possíveis para uma mesma configuração de valores do campo escalar sobre os vértices do cubo. O problema com a orientação do túnel não é mencionada no trabalho de Chernyaev. Na Seção 3.4, apresentamos uma solução para esse problema.

3.3.2

Problema 2: Não Variedades

O segundo problema de algoritmo está relacionado a tabela de triangulação usada para construir a superfície. Dada uma configuração do campo escalar sobre os vértices do cubo, a classificação correta do caso correspondente é apenas parte do processo de construir um algoritmo que preserve a topologia do interpolante trilinear. A triangulação no interior de cada cubo, de fato, determina a topologia da malha resultante. A tabela de triangulação proposta por

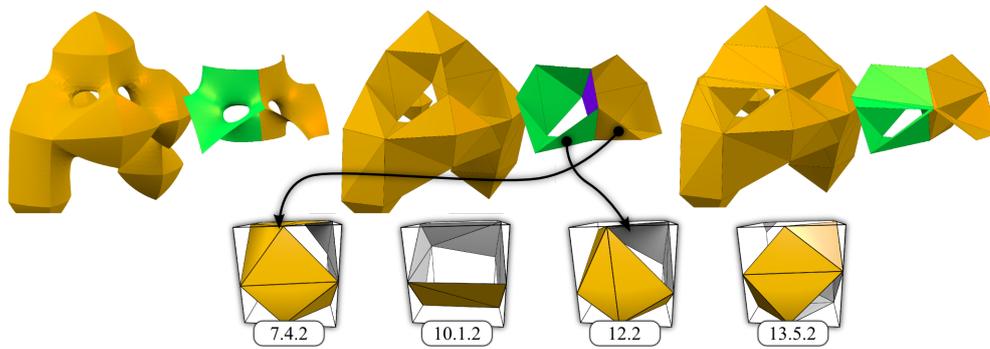


Figura 3.7: Em cima: O problema gerado pela tabela de triangulação proposta por Chernyaev. A figura mostra o nível zero de um gride $5 \times 5 \times 5$ randomicamente gerado G e duas malhas extraídas usando o MC33 (centro) e o C-MC33 (direita). Os pedaços isolados de superfície em verde e amarelo, representam os dois cubos no centro de G . A face compartilhada pelos dois túneis consecutivos, em roxo, resulta em uma aresta não variedade. Após a subdivisão na altura do ponto crítico da face compartilhada, o problema é eliminado e uma malha variedade é obtida(direita). Em baixo: Triangulação para túneis proposta por Chernyaev e usada por Lewiner et al, as face coplanares com as faces do cubo podem resultar em arestas não variedades.

Chernyaev contem casos que, como ilustrado no Figura 3.7, podem resultar em inconsistências topológicas, e em malhas não variedades.

Esse problema ocorre porque a tabela de triangulação do MC33 permite faces que são coplanares às faces do cubo (faces ambíguas). Logo, quando dois cubos vizinhos possuindo túneis em seu interior dividem uma face ambígua, o resultado será uma aresta não variedade, como mostrado na Figura (3.7).

Observe que, devido a esse problema, qualquer algoritmo topologicamente correto baseado na tabela de triangulação proposta por Chernyaev irá resultar em superfícies não variedades. Esse problema no trabalho do Chernyaev apontado por Lopes e Brodlie (15) (e anteriormente por Van Gelder e Wilhelms (11)) foi uma das motivações do seu trabalho.

Lopes e Brodlie propõem um método para melhorar a geometria da malha resultante, de forma a representar melhor o comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo, consequentemente resolvendo o problema apresentado na tabela proposta por Chernyaev. Para isso, são adicionados à triangulação pontos sobre as faces e no interior do cubo (localizados sobre o interpolante trilinear). No entanto, os autores não oferecem detalhes de implementação da técnica proposta.

3.3.3

Problema 3: Cálculo da Altura do Plano Cortando o Cubo

O terceiro problema de algoritmo está relacionado à modificação no algoritmo do MC33, proposta por Lewiner et al. (14), no cálculo da altura do plano usado no teste para resolver a ambiguidade interior. A Equação 3-8 pode falhar em encontrar a altura t apropriada e, conseqüentemente, falhar em distinguir corretamente entre túneis e folhas no interior do cubo. Na modificação proposta, para os casos 6, 7, 12 e 13, não é utilizado a condição (i) e a condição (ii) é sempre satisfeita, pois a aresta e (uma aresta intersectada pela isosuperfície) sempre terá um vértice positivo e um vértice negativo, o que implica $t_{\text{alt}} \in (0, 1)$. Assim, apenas a condição (iii) é usada para classificar a topologia no interior do cubo.

Assumindo que o campo escalar no interior do cubo defina um túnel, como mostrado na imagem à esquerda de Figura 3.8. Para classificar corretamente a topologia, $F(t)$ deve ser uma parábola com concavidade voltada para baixo, raízes $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 < t_2$, e $t_{\text{max}} \in (t_1, t_2)$. Nesse caso, $F(t) > 0$ apenas para $t \in (t_1, t_2)$, conseqüentemente $F(t_{\text{max}}) > 0$ e um túnel é identificado, de acordo com a condição (iii).

O problema na alteração proposta é que, como mostrado na Figura 3.8, a solução para a Equação 3-8 nem sempre pertence ao intervalo (t_1, t_2) . Dessa forma, a condição (iii) (o sinal do ponto crítico) é verificada com o plano na altura incorreta, fazendo com que o campo escalar no interior do cubo seja incorretamente interpretado e classificado como homeomorfo a duas folhas (imagem à direita na figura 3.8).

3.3.4

Problema 4: Caso 10

O último problema é relacionado à implementação do MC33 proposta por Lewiner et al.. Todo desenvolvedor sabe que os erros de código são inerentes ao software, e a implementação do MC33 não é uma exceção. A ausência de uma etapa na implementação do algoritmo do MC33 faz com que a ambiguidade nos casos 10 e 12 seja resolvida incorretamente. Observe que ambos os casos possuem exatamente duas faces ambíguas e os vértices sobre as faces ambíguas podem estar tanto unidos ou separados sobre elas. Na discussão a seguir, nos restringiremos ao caso 10, visto que o caso 12 é similar.

Vamos assumir que as faces ambíguas sejam as faces inferior e superior do cubo. Logo, seguindo o algoritmo proposto por Chernyaev (5), de acordo com o sinal dos pontos críticos sobre as face ambíguas e o resultado do teste

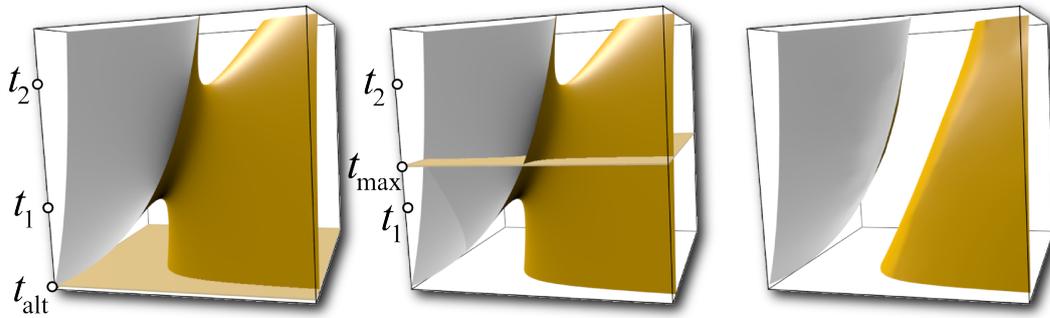


Figura 3.8: Caso 6. Esquerda: A altura $t = t_{\text{alt}} > 0$ do plano de teste usada na implementação do MC33. Centro: O teste proposto no algoritmo do MC33 (algoritmo proposto por Chernyaev (5)) retorna uma altura $t = t_{\text{max}} > 0$ diferente, a qual detecta corretamente o túnel no interior do cubo. Direita: Ilustra o resultado retornado pela implementação do MC33. Uma superfície homeomorfa a dois discos, quando o resultado correto seria uma superfície homomorfa a um cilindro.

interior, é possível identificar o caso correto (veja também o Algoritmo 2):

- Case 10.1.1: os vértices positivos estão separados em ambas as faces ambíguas, e os vértices positivos na diagonal do cubo não estão conectados pelo interior do cubo.
- Case 10.1.2: os vértices positivos estão separados em ambas as faces ambíguas, e os vértices positivos na diagonal do cubo estão conectados pelo interior do cubo.
- Case 10.2: os vértices positivos sobre as faces ambíguas estão separados sobre face superior e conectados sobre face inferior do cubo.

Os casos mostrados acima assumem que os vértices positivos na face superior do cubo estão separados. Um raciocínio semelhante deve ser aplicado na implementação proposta por Lewiner et al. aos casos em que os vértices positivos na face superior estão unidos.

3.4 Soluções

Nesta seção, apresentamos soluções para os problemas apresentados na seção anterior.

3.4.1

Problema 1: Caso 13.5

A correta interpretação do caso 13.5 tem sido abordada de diferentes maneiras por diferentes métodos de extração de isosuperfície. Nielson (20), por exemplo, apresenta um algoritmo que considera a conectividade das arestas, faces e interior do cubo. O autor apresenta uma descrição detalhada do comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo e a usa para resolver o problema da ambiguidade no interior. Lopes e Brodlie (15), por outro lado, usam o sinal dos pontos críticos no interior do cubo para determinar a configuração correta.

Em ambos os casos, as soluções acima não se integram ao algoritmo do MC33. No trabalho proposto por Chernyaev, a ideia central para resolver o problema da ambiguidade no interior do cubo, o uso do plano paralelo as bases do cubo percorrendo o cubo, não está presente em ambas as abordagens. Isso nos motivou a construir uma solução alternativa que melhor se integre a ideia apresentada no algoritmo original. Resolvemos esse problema propondo um novo teste de ambiguidade interior para o caso 13.5, que usa o fato de o caso 13.5.2 requerer que as duas raízes t_1 e t_2 de $f(x_c(t))$ e os pontos críticos associados estejam no interior do cubo.

Primeiro, observe que $x_c(t)$, para $t \in (0, 1)$, descreve o caminho do ponto crítico no interior do cubo, e $f(x_c(t))$ retorna o valor (e assim o sinal) desse ponto crítico. Ambas as funções estão ilustradas na imagem à direita da Figura (3.4), na qual a curva hiperbólica em preto representa o caminho de $x_c(t)$, e a cor do círculo representa o sinal do ponto crítico sobre os planos para as alturas ilustradas (os círculos pretos e brancos são pontos com sinal negativo e positivo, respectivamente).

Para o caso 13.5.2, o caminho traçado pela curva $x_c(t)$ intersecta a isosuperfície (o túnel) duas vezes, em cada uma das raízes t_1 e t_2 de $f(x_c(t))$. Isso implica que ambos os pontos críticos $x_c(t_1)$ e $x_c(t_2)$ devem estar dentro do cubo. O que não ocorre para o caso 13.5.1. pois o ponto crítico atravessa a folha do meio no máximo uma vez. Portanto, para determinar a topologia correta é suficiente verificar se ambas as raízes de $f(x_c(t))$ e seus respectivos pontos críticos estão no interior do cubo. Ilustramos a nossa solução no Algoritmo 1. A nossa solução é simples e não requer que o ponto crítico do interpolante trilinear seja calculado ou de uma descrição detalhada do seu comportamento no interior do cubo. Nós implementamos e testamos essa solução usando mais de 10000 campos escalares do caso 13.5 gerados aleatoriamente.

Algorithm 1 Um procedimento simples para resolver a ambiguidade do caso 13.5

CASO 13.5(a, b, c)

- ▷ Sejam t_1 e t_2 as raízes de $at^2 + bt + c$ (Equação 3-7)
- 1 **if** $t_1, t_2 \in (0, 1)$ e $x_c(t_1), x_c(t_2) \in (0, 1)^2$
 - 2 **then return** Case 13.5.2
 - 3 **else return** Case 13.5.1
-

Orientação do Túnel

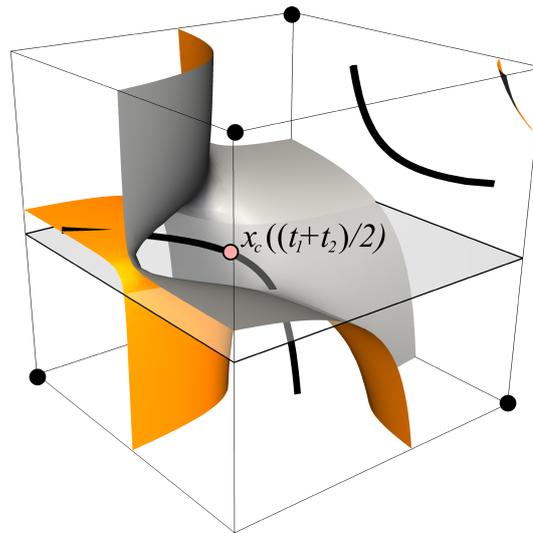


Figura 3.9: Solução para o problema de orientação do túnel. Os pontos em preto são os vértices do cubo com sinal positivo. O plano de teste está localizado a uma altura $(t_1 + t_2)/2$. O sinal de $f((t_1 + t_2)/2)$ determina a correta orientação do túnel.

Para determinar a correta orientação do túnel, usamos o sinal do ponto crítico sobre qualquer plano cortando o cubo com altura entre t_1 e t_2 . Observe que qualquer ponto crítico (sobre um plano) nessa faixa terá o mesmo sinal do ponto crítico do interpolante trilinear, que é o sinal do “interior” do túnel. Isso pode ser visto na imagem à direita da Figura 3.4 e no gráfico de Figura 3.5. Assim, para determinar a orientação, comparamos o sinal de $f((t_1 + t_2)/2)$ com o sinal de ambos os vértices da diagonal ambígua. O túnel estará voltado para o vértice com mesmo sinal de $f((t_1 + t_2)/2)$, enquanto o outro vértice estará isolado de todos os outros vértices do cubo. A Figura 3.9 ilustra esse cenário. Lopes e Brodlie (15) usam o sinal do ponto crítico do interpolante trilinear para determinar a orientação correta do túnel. Propomos uma solução diferente que melhor se encaixa a estrutura proposto por Chernyaev.

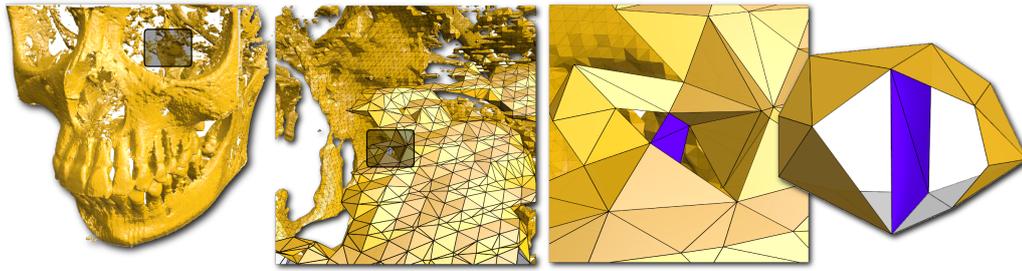


Figura 3.10: Dado Skull. A imagem mostra um zoom progressivo no dado com o objetivo de revelar uma aresta não variedade. A face contendo arestas não variedades está destaca em roxo. A imagem a direita é uma versão isolada do caso mostrado no dado, rotacionado para melhor ilustrar o problema.

3.4.2

Problema 2: Superfícies não Variedades

Uma possível solução para o problema de não-variedades geradas pela tabela de triangulação proposta por Chernyaev seria o pós-processamento da malha resultante do MC33. Apesar de muitos trabalhos na literatura proporem métodos para corrigir malhas (veja (12)), estes métodos estão focados principalmente na recuperação da malha, de forma a garantir que a malha final seja uma variedade. Algoritmos topologicamente corretos, por outro lado, exigem que a topologia do interpolante trilinear seja preservada. Além disso, técnicas para reparar a malha podem mascarar problemas de implementação, corrigindo-os, o que impossibilita o processo de verificação.

Usamos uma abordagem alternativa que não requer mudanças na tabela de triangulação do MC33. Um fato interessante é que esse problema tem baixa probabilidade de ser gerado randomicamente e baixa probabilidade de ocorrer em dados reais. Como mostrado na Figura 3.10, para o dado Skull, por exemplo, esse problema apareceu seis vezes para um total de 50 isosuperfícies distintas. Em nossos experimentos, esse problema ocorreu apenas umas vez em 10000 campos escalares $5 \times 5 \times 5$ randomicamente gerados. Dessa forma, ao invés de implementar o método proposto por Lopes e Brodlie, adotamos uma solução diferente que se aproveita do fato de esse ser um evento raro.

No MC33, não variedades são criadas quando dois cubos vizinhos que compartilham uma face ambígua possuem túneis em seu interior. Se dividirmos ambos os cubos no ponto crítico da face compartilhada, eliminamos a ambiguidade sobre essa face (veja (4)) e conseqüentemente, eliminamos o pro-

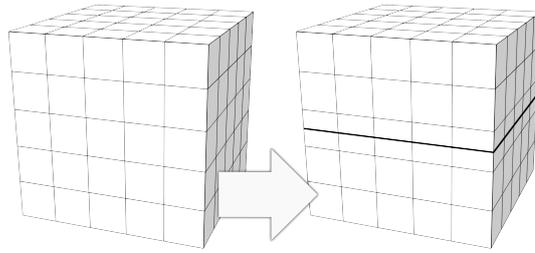


Figura 3.11: Subdivisão do gride. A fatia do gride contendo a face que resulta em não-variedades é dividida em duas.

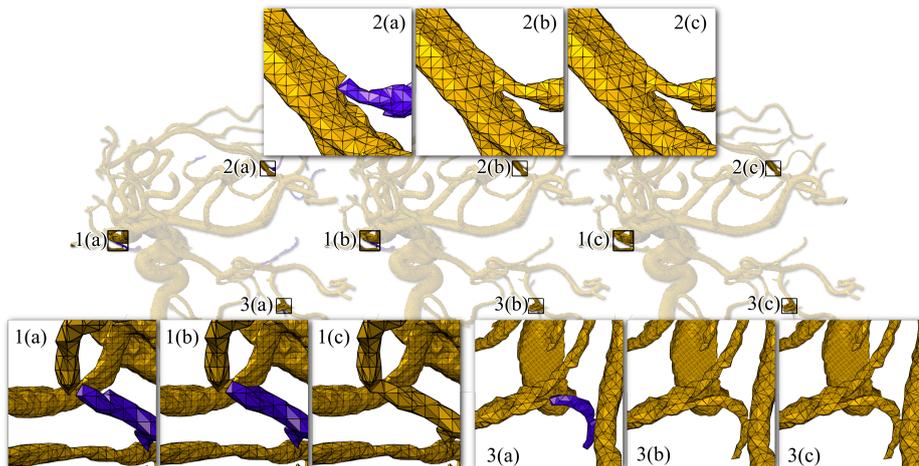


Figura 3.12: Da esquerda para a direita, as isosuperfícies do aneurisma extraídas usando o VTK, o MC33 e o C-MC33, respectivamente. Mostramos a principal componente da artéria cerebral em amarelo e em roxo as componentes conexas adicionais. Observamos que as componentes conexas em roxo deveriam fazer parte da componente principal. No entanto, devido a desambiguação implícita do VTK e de problemas no MC33, a superfície final contém componentes múltiplas (figura à esquerda e no centro). A superfície gerada com o C-MC33 é mostrada a direita

blema de geração de não-variedade.

Para simplificar o algoritmo, dividimos não apenas os cubos que compartilham a face ambígua, mas todas as faces do gride que estão nessa fatia do gride (veja Figura 3.11)

Assumindo que o dado de entrada seja um gride $n \times n \times n$, cada subdivisão irá adicionar n^2 cubos ao gride. Assumindo que sejam necessárias k subdivisões, kn^2 cubos serão adicionados. Na prática $k = O(1)$, e assim $kn^2 = O(1)O(n^2) = O(n^2)$, isso implica que o tamanho assintótico do gride não irá mudar. Esse processo de subdivisão elimina o problema, fazendo da implementação do Marching Cubes 33 uma técnica topologicamente coerente (veja Figura 3.7).

3.4.3

Problema 3: Cálculo da Altura do Plano Cortando o Cubo

Uma vez que esse problema foi causado pelo método alternativo adotado por Lewiner et al. no cálculo da altura do plano usado na verificação da ambiguidade interior, o problema pode ser evitado simplesmente substituindo o uso do t_{alt} pelo uso do t_{max} , como originalmente proposto por Chernyaev.

3.4.4

Problema 4: Caso 10

O algoritmo 2 ilustra as etapas necessárias para resolver a ambiguidade interior do caso 10. Corrigimos o problema na implementação do MC33 adicionando as linhas 16-20, que na implementação original estão substituídas pelo resultado *caso 10.1.1*.

Algorithm 2 Algoritmo para o caso 10

```

1: Os vértices positivos são denotados com  $n^+$ 
2: if  $n^+$  separados na face superior then
3:   if  $n^+$  separados na face inferior then
4:     if  $n^+$  da diagonal estão separados then
5:       Caso 10.1.1
6:     else
7:       Caso 10.1.2
8:     end if
9:   else
10:    Caso 10.2
11:  end if
12: else
13:  if  $n^+$  separados na face inferior then
14:    Caso 10.2
15:  else
16:    if  $n^+$  da diagonal estão unidos then
17:      Caso 10.1.1
18:    else
19:      Caso 10.1.2
20:    end if
21:  end if
22: end if

```

3.5

Processo de Verificação

Utilizamos em nossos experimentos a estrutura de verificação proposta por Etienne et al. (10). O método de verificação proposto pelos autores pode ser resumido nas etapas a seguir: (I) Um campo escalar G é randomicamente construído através do sorteio uniforme de valores no intervalo $[-1, 1]$ para

cada $x_j \in G$. (II) Os invariantes topológicos correspondentes (são utilizados a característica de Euler $\chi(S)$ e o número de Betti $\beta_k(S)$) são obtidos diretamente de S , ou seja, sem que seja necessário extrair a isosuperfície de interesse. (III) Uma malha M é extraída usando a implementação do MC33, e seus invariantes topológicos $\chi(M)$ e $\beta_k(M)$ são calculado. (IV) Finalmente, os pares de invariantes topológicos $\{\chi(S), \chi(M)\}$ e $\{\beta_k(S), \beta_k(M)\}$ são comparados. Uma incompatibilidade indica que ocorreu um problema. No entanto, como observam os autores, a ausência de incompatibilidade entre os invariantes não implica em um código livre de erros. O processo de verificação não prova a inexistência de erros em um código, apenas aumenta a confiança na coerência de seus resultados.

Usamos o fato que, quando a superfície esperada e a obtida não são homeomorfas, um contra-exemplo é dado na forma de um campo escalar G e de uma malha M . Usamos essa informação para corrigir os erros no MC33.

3.6

Experimentos com Dados Reais

Voltamos agora a nossa atenção para a importância da preservação da topologia do interpolante trilinear.

Em dados reais, a grande maioria dos casos Marching Cubes irá coincidir com os casos não ambíguos, ou seja, os casos 1, 2, 5, 8, 9 e 11. Isso significa que os resultados do Marching Cubes original, do MC33 e do C-MC33 irão coincidir. No entanto, para algumas cubos, haverá diferenças topológicas nas triangulações retornadas por cada algoritmo. O que pode resultar em malhas bastante diferentes. Nessa seção apresentamos uma análise qualitativa dessas diferenças. O dado aneurisma, mostrado na Figura (3.12) nos dá um exemplo dessas possíveis diferenças. Da esquerda para a direita, a Figura (3.12) mostra as malhas extraídas com o VTK Marching cubes, com o MC33 e com o C-MC33. A implementação do VTK é baseado no trabalho de Montani et al. (18) e não possui garantias quanto a consistência ou coerência da malha resultante. Assim, esses três métodos podem ser vistos como três formas distintas de extrair a topologia da malha.

Apesar de ser pequeno o número de cubos onde os resultados diferem entre as implementações, para o dado Aneurisma, a consequência é que a artéria cerebral principal aparece bem diferente em cada implementação. Isso acontece porque o dado contém várias características finas, onde a precisão no interior de um cubo é necessária para conectar corretamente os pedaços de vasos sanguíneos. Como mostrado no Figura 3.12, apenas um cubo é suficiente

para separar grandes vasos sanguíneos.

O VTK e o MC33 geram mais componentes conexas (mostrado em roxo) do que o C-MC33. Os gráficos na Figura (3.13) mostram as diferenças no número de componentes conexas geradas pelo VTK e o C-MC33 (esquerda) e pelo MC33 e o C-MC33 (direita) em função do isovalor para o dado Aneurisma.

Claramente, o VTK produz mais componente conexas do que o C-MC33 (mais de 2400 componentes a mais). As diferenças entre o MC33 e o C-MC33 não são tão grandes, embora sejam suficientes para desconectar segmentos arteriais importantes. Nesse exemplo, o MC33 gera mais componentes do que o C-MC33 para a maioria dos isovalores.

O dado Aneurisma mostra como a mudança na topologia de alguns cubos pode afetar o superfície final. Nesse exemplo em particular, é razoável assumir que os vasos sanguíneos formem um única componente conexa e que o dado contenha o mínimo de componentes conexas possível. Usando esse critério, concluímos que o C-MC33 obteve o melhor desempenho para a maioria dos isovalores.

O Segundo problema é devido a extração de não variedades. O problema explicado na Seção 3.3.2 também aparece em dados reais. A Figura 3.10 mostra um exemplo de dado médico no qual a malha resultante da implementação do MC33 é uma não variedade. Em nossos experimentos, observamos esse mesmo problema para alguns isovalores de dados comumente usados, como a Backpack e o Bonsai. No entanto, observamos que esse problema ocorre raramente nos dados testados, em média foi encontrado um caso de aresta não variedade para 10^7 cubos avaliados.

3.7

Material Suplementar

Os resultados deste trabalho são reprodutíveis. Acessando a [página do projeto](#) (6), as informações nas Figuras 3.7, 3.8, 3.12 e Algoritmo 2 podem ser executadas (os modelos tridimensionais pode ser visualizados e manipulados), além disso, o código fonte e os dados usados nesse trabalho podem ser baixados.

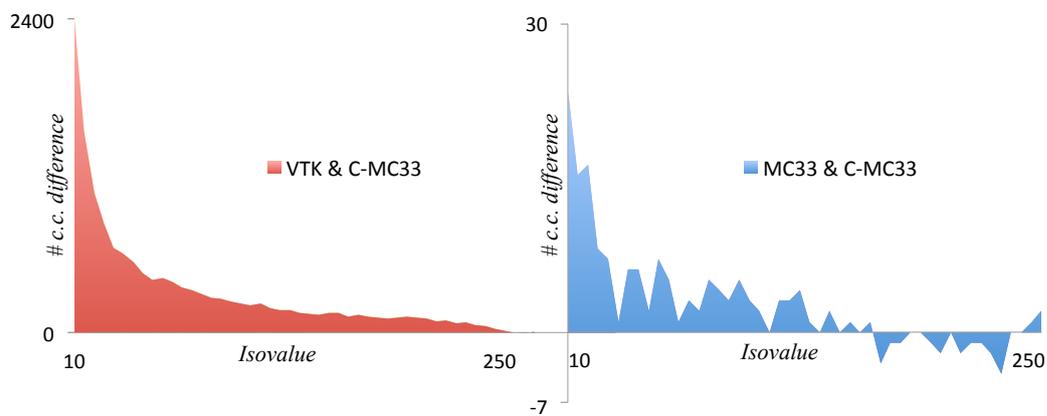


Figura 3.13: O gráfico da esquerda mostra a diferença entre o número de componentes conexas extraídas pela implementação do VTK de Marching Cubes e o número de componentes conexas extraídas pela nossa implementação, C-MC33. O gráfico da direita mostra a diferença entre o número de componentes conexas extraídas pelo MC33 e o número de componentes conexas extraídas pelo C-MC33.