

## 4

### Persistência e Campos de Cruzes

#### 4.1

##### Persistência

Introduzido por Smale (38) e posteriormente adaptado por Edelsbrunner *et al.* (39), o conceito de persistência tem sido utilizado como uma estratégia inteligente para realizar a separação entre a informação e a interferência (40, 41). De forma geral, a ideia consiste em associar um número a um par de pontos, formado por um ponto de máximo e um ponto de mínimo, que serão cancelados posteriormente. O pareamento dos pontos pode ser interpretado nessa teoria como uma característica do dado escalar. Já o número associado, chamado de persistência do par, pode ser entendido como a importância da característica e consiste na diferença de altura dos pontos, sendo estes cancelados partindo da menor para a maior persistência.

Por exemplo, considere o gráfico de uma função real  $g$  (Figura 4.1). Quando construído de baixo para cima, componentes conexas vão surgindo e se conectando. Essas mudanças topológicas ocorrem nos pontos críticos (mínimos e máximos) de  $g$ , e podem ser expressas na forma de um diagrama de persistência. Neste diagrama, cada característica é representada por ponto de coordenada  $(g(x), g(y))$ , onde  $g(x)$  indica o valor onde a componente conexa surgiu ( $g(x)$  é um ponto de mínimo) e  $g(y)$  indica o valor onde essa componente conexa se conectou a outra ( $g(y)$  é um ponto de máximo). Das componentes conexas que se conectaram em  $g(y)$ , associa-se o valor  $g(x)$  que minimiza  $g(y) - g(x)$  dentro das componentes ainda não associadas. Em posse desse diagrama é possível realizar uma análise de maneira mais adequada, no sentido de mudanças topológicas importantes.

Devido a sua robustez e resistência a pequenas perturbações (42), a persistência se tornou popular nas mais variadas áreas, *e.g.* simplificação de complexos Morse-Smale (43, 44), análise de dados (13), comparação de formas (45), análise de curvatura discreta (46), análise de imagens (47).

Para o caso de campos de cruzes, propomos a utilização da persistência

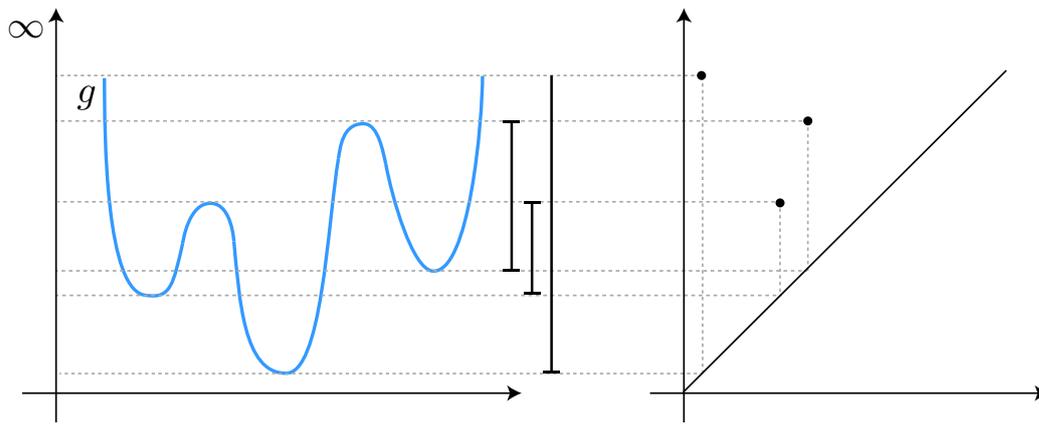


Figura 4.1: Exemplo de composição de um diagrama de persistência. Nesta figura disponibilizamos o gráfico referente a uma dada função  $g$  e seu respectivo diagrama de persistência.

como uma estratégia para encontrar modificações topológicas realizáveis, ou seja, pares de pontos críticos suscetíveis a cancelamento, permitindo assim uma simplificação do campo. Os detalhes do método proposto são apresentados no decorrer deste capítulo.

## 4.2 Definição de Singularidade

Nessa seção iremos propor uma definição robusta e coerente de singularidades de campos de cruzes, inspirado pelo contexto de campos tensoriais. Em campos tensoriais, o cálculo para encontrar as linhas de fluxo no bordo dos setores hiperbólicos, ou seja, as separatrizes, é preciso e objetivo (48, 1): a ideia consiste em encontrar linhas tensoriais radiais que incidem nos pontos degenerados do campo tensorial.

Seja  $p_0^T$  um ponto degenerado do campo tensorial  $T$  e seja  $\gamma^T$  uma curva simples fechada delimitando uma área infinitesimal em torno de  $p_0^T$  que não contenha nenhum outro ponto degenerado. Para encontrar a posição de uma separatriz precisamos encontrar um ponto  $p_a^T$  em  $\gamma^T$  com um autovetor  $v_a^T$  associado tal que  $v_a^T \times \overrightarrow{(p_0^T - p_a^T)} = 0$  (Figura 4.2). Esse procedimento é repetido para o campo ortogonal de autovetores. Ao fim do processo podem ser encontradas até seis posições para as separatrizes de pontos degenerados simples (1).

Com base na abordagem para o posicionamento das separatrizes em campos tensoriais, recorreremos à mesma ideia como forma de classificar os pontos em campos de cruzes. Seja  $p_0^C$  um ponto do campo de cruzes  $C$  e seja  $\gamma^C$  uma curva fechada infinitesimal em volta de  $p_0^C$  que não contenha nenhum

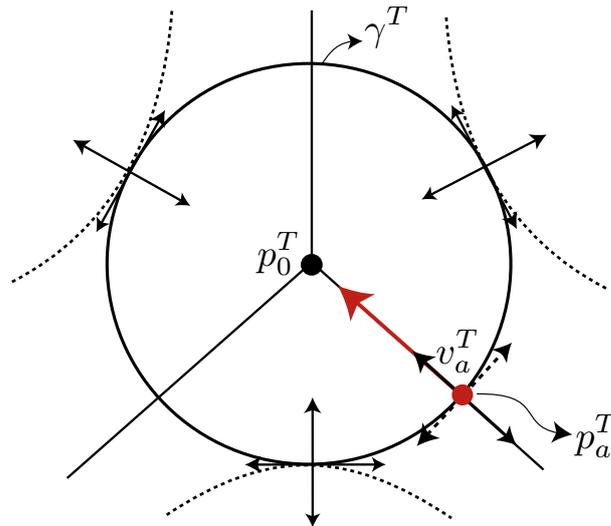


Figura 4.2: Posicionamento de uma separatriz associada ao ponto degenerado. O ponto  $p_a^T$  (em vermelho) representa a posição de uma das separatrizes associada ao ponto degenerado  $p_0^T$ .

outro ponto de  $C$ . Como trabalhamos com malhas de triângulos, montamos a curva  $\gamma^C$  como a união dos segmentos conectando o centro das faces incidentes a  $p_0^C$  ao ponto médio das arestas que conectam duas faces incidentes adjacentes (Figura 4.3). Dada uma face  $f_i$ , e sua vizinha  $f_j$ , escolhemos em  $f_i$  o vetor do campo de cruzes que faz o menor ângulo com o vetor  $\overrightarrow{(p_0^C - p_i)}$ . Em  $f_j$ , procuramos o vetor  $v_j$  correspondente a  $v_i$ , como definido na Seção 3.2.3 (Figura 4.3).

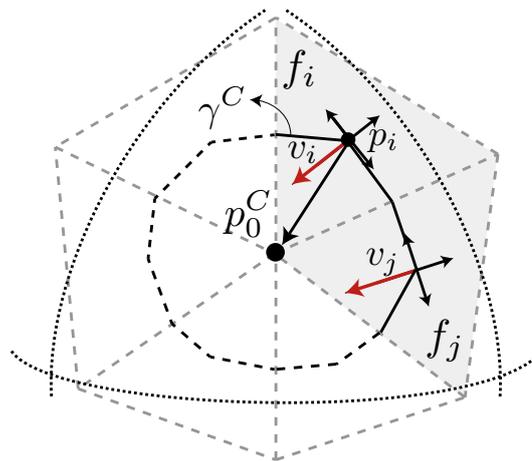
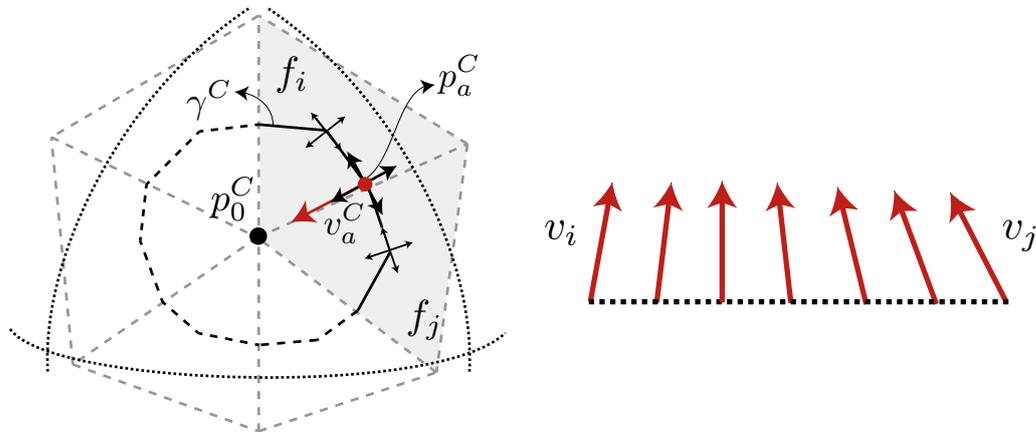


Figura 4.3: A curva  $\gamma^C$  será utilizada para a interpolação linear partindo do vetor  $v_i$  até o vetor  $v_j$ .

O próximo passo consiste em fazer uma interpolação linear de  $v_i$  até  $v_j$  (Figura 4.4(b)). Caso exista um vetor  $v_a$ , proveniente da interpolação linear, associado a um ponto  $p_a$  em  $\gamma^C$  tal que  $v_a \times \overrightarrow{(p_0^C - p_a)} = 0$ , então marcamos

$p_a$  como um *ponto de passagem* (Figura 4.4(a)). O processo é repetido para um dos vetores ortogonais a  $v_i$  que faz o segundo menor ângulo com  $\overrightarrow{(p_0^C - p_i)}$ . Esse procedimento é aplicado para todas as faces da estrela de  $p_0^C$ .



4.4(a): Marcação do ponto de passagem  $p_a^C$ . 4.4(b): Interpolação linear de  $v_i$  para  $v_j$ .

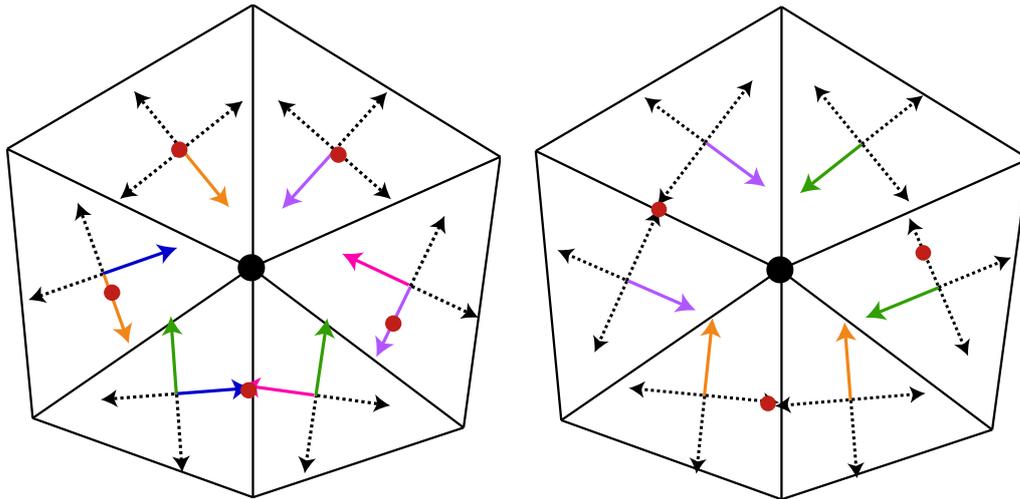
Figura 4.4: Uma vez que a interpolação linear realizada a partir do vetor  $v_i$  até o vetor  $v_j$  é realizada, caso um ponto de passagem seja encontrado ele é marcado sobre a curva  $\gamma^C$ . Neste exemplo, foi encontrado o ponto de passagem  $p_a^C$  marcado em vermelho.

Ao término do processo, para as singularidades de índice positivo  $(+\frac{1}{4})$  teremos 3 pontos de passagem marcados e para as singularidades de índice negativo  $(-\frac{1}{4})$  teremos 5 pontos de passagem marcados. Para os pontos regulares, teremos 4 pontos de passagem (Figura 4.5).

A vantagem desse método é que o número de pontos de passagem é um inteiro e resiste a pequenas perturbações no campo, enquanto a forma apresentada na Seção 3.2.2 consiste em um número em ponto flutuante, sendo muitas vezes necessário definir um intervalo de tolerância para a detecção da singularidade.

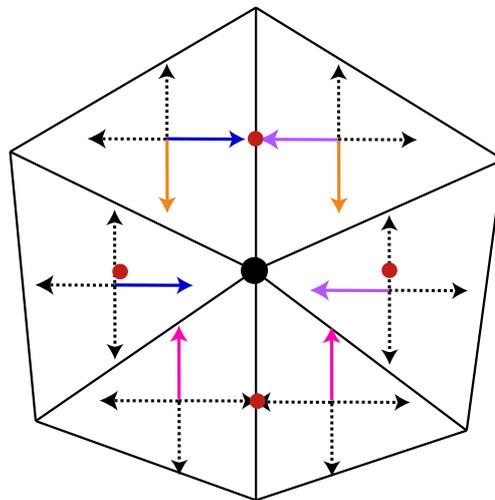
### 4.3 Edição Local

Como visto na Seção 3.4, a construção do espaço de escala pode de fato gerar versões de um campo de cruces com um menor número de singularidades que o método proposto em Bommes *et al.* (22). Porém, igualmente ao método anteriormente citado, a construção do espaço de escala não fornece a garantia de que o menor número de singularidades seja atingido e também não oferece, em uma primeira instância, uma medida de impacto causada na modificação do posicionamento das singularidades, visto que a suavização é realizada de maneira global.



4.5(a): Índice negativo.

4.5(b): Índice positivo.



4.5(c): Ponto regular.

Figura 4.5: Nessa figura é apresentada a classificação dos pontos de um campo de cruces através dos pontos de passagem. Para faces adjacentes, os vetores onde será realizada a interpolação linear apresentam a mesma cor. Apenas os vetores cuja interpolação resultam em pontos de passagem foram marcados. Os pontos de passagem são marcados em vermelho.

Interessados em simplificar a topologia do campo de cruces, propomos nessa seção uma abordagem baseada em operações locais que visa cancelar um par de singularidades por vez, alterando o campo de cruces o mínimo possível e sem gerar novas singularidades. Para cada cancelamento é associado um peso como maneira de medir a persistência das singularidades no campo de cruces. O método proposto também permite manipular localmente as singularidades de forma a movimentá-las pelo campo sem gerar novas singularidades e sem alterar as demais existentes.

### 4.3.1

#### Cancelamento de Salto em Arestas

Seja  $s$  um vértice singular do campo de cruzes  $C$  definido em uma malha triangular  $N$ . Por simplicidade, suponha  $s$  uma singularidade de índice  $+\frac{1}{4}$ . No caso de uma singularidade de índice  $-\frac{1}{4}$ , a análise segue de maneira análoga.

**Definição 4.1** *Sejam  $f_i$  e  $f_j$  faces adjacentes em  $N$  e sejam  $\theta_i$  e  $\theta_j$  os ângulos associados a  $f_i$  e  $f_j$  respectivamente. Dizemos que existe um **salto** na aresta compartilhada por  $f_i$  e  $f_j$  se*

$$|\theta_i - \theta_j| > \frac{\pi}{4}.$$

Sejam as faces  $f_{1D}$ ,  $f_{1E}$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_{4D}$  e  $f_{4E}$  como dispostas na Figura 4.6,  $\theta_{1D}$ ,  $\theta_{1E}$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_{4D}$ ,  $\theta_{4E}$  os ângulos associados a cada uma das faces e  $s$  uma singularidade do campo de cruzes. Para facilitar a notação, assumimos ao longo deste capítulo que a aresta compartilhada entre as faces  $f_2$  e  $f_3$  foi utilizada como aresta de referência para ambas as faces. Observe que, por  $s$  ser singular de índice  $\frac{1}{4}$ , o campo de cruzes gira de  $\frac{\pi}{2}$  ao longo de uma curva infinitesimal fechada em volta de  $s$ . Assim, deve existir exatamente uma aresta incidente a  $s$  que gere um salto de  $+\frac{\pi}{2}$ . Assuma que o salto provindo da singularidade ocorra na aresta em comum entre as faces  $f_2$  e  $f_3$ .

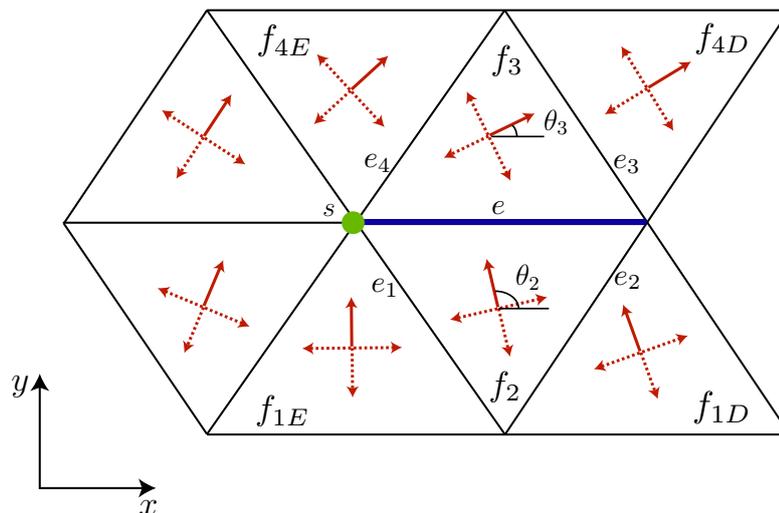


Figura 4.6: Faces associadas à aresta  $e$  (em azul) onde pretendemos cancelar o salto.

Como existe um salto na aresta entre as faces  $f_2$  e  $f_3$ , temos que:

$$|\theta_3 - \theta_2| > \frac{\pi}{4}.$$

Como  $s$  é uma singularidade de índice  $+\frac{1}{4}$ , então esse salto corresponde à rotação de  $\frac{\pi}{2}$  do campo de cruces em volta de  $s$ . Logo:

$$\frac{\pi}{4} < \theta_2 - \theta_3 < \frac{3\pi}{4}.$$

Para cancelar esse salto, podemos rodar as cruces das faces  $f_2$  e  $f_3$  de  $\delta_2$  e  $\delta_3$  respectivamente, obtendo os ângulos  $\theta_2 + \delta_2$  e  $\theta_3 + \delta_3$ . Com os novos ângulos, o salto deve ter sido cancelado, ou seja:

$$|(\theta_3 + \delta_3) - (\theta_2 + \delta_2)| < \frac{\pi}{4} \tag{4-1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < (\theta_3 + \delta_3) - (\theta_2 + \delta_2) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta_2 - \theta_3 - \frac{\pi}{4} < \delta_3 - \delta_2 < \theta_2 - \theta_3 + \frac{\pi}{4}. \tag{4-2}$$

Como

$$\theta_2 - \theta_3 > \frac{\pi}{4},$$

segue que

$$0 < \theta_2 - \theta_3 - \frac{\pi}{4} < \delta_3 - \delta_2 < \theta_2 - \theta_3 + \frac{\pi}{4}. \tag{4-3}$$

Além disso, desejamos que não sejam inseridos saltos nas arestas compartilhadas pelas faces adjacentes a  $f_2$  e  $f_3$ , ou seja, nas arestas  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  e  $e_4$  (Figura 4.6). Para tal, exigimos também que:

$$\theta_1^M - \frac{\pi}{4} < \theta_2 + \delta_2 < \theta_1^m + \frac{\pi}{4} \tag{4-4}$$

e

$$\theta_4^M - \frac{\pi}{4} < \theta_3 + \delta_3 < \theta_4^m + \frac{\pi}{4}, \tag{4-5}$$

onde,  $\theta_1^M = \max\{\theta_{1D}, \theta_{1E}\}$ ,  $\theta_1^m = \min\{\theta_{1D}, \theta_{1E}\}$ ,  $\theta_4^M = \max\{\theta_{4D}, \theta_{4E}\}$  e  $\theta_4^m = \min\{\theta_{4D}, \theta_{4E}\}$ . Observe que, anteriormente, não existia salto nas arestas vizinhas a  $e$ , ou seja:

$$|\theta_1^M - \theta_2| < \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad |\theta_1^m - \theta_2| < \frac{\pi}{4},$$

logo,

$$|\theta_1^M - \theta_2| - \frac{\pi}{4} < 0$$

e

$$|\theta_1^m - \theta_2| + \frac{\pi}{4} > 0.$$

Através da Equação (4-4), é fácil notar que  $\delta_2$  pertence a um intervalo centrado na origem. Para  $\delta_3$ , segue de maneira análoga.

Sejam os conjuntos

$$B = \{(\delta_2, \delta_3) \in \mathbb{R}^2 / \delta_2 \text{ satisfaz a Eq. (4-4) e } \delta_3 \text{ satisfaz a Eq. (4-5)}\}$$

e

$$T = \{(\delta_2, \delta_3) \in \mathbb{R}^2 / (\delta_2, \delta_3) \text{ satisfazem a Eq. (4-2)}\}.$$

O conjunto solução  $X$ , caso exista, será dado por  $B \cap T$  como mostrado na Figura 4.7.

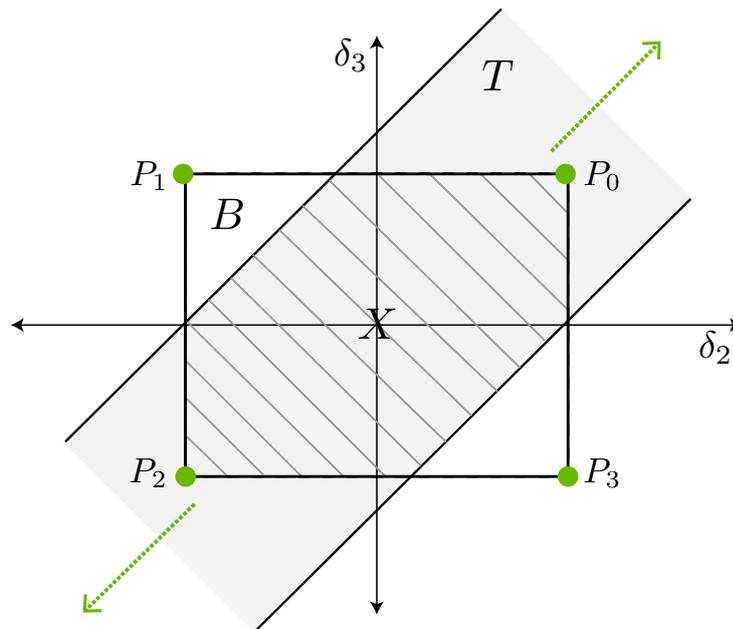


Figura 4.7: A área hachurada representa o conjunto solução que é dado pela intersecção do retângulo definido por  $B$  com a faixa definida por  $T$ .

**Condições para Existência de Solução:**

Sejam as retas

$$l : \delta_3 - \delta_2 = \theta_2 - \theta_3 + \frac{\pi}{4}$$

e

$$r : \delta_3 - \delta_2 = \theta_2 - \theta_3 - \frac{\pi}{4}$$

Tome  $P_1 = (P_1.\delta_2, P_1.\delta_3) = (\delta_2^{min}, \delta_3^{max})$  e  $P_3 = (P_3.\delta_2, P_3.\delta_3) = (\delta_2^{max}, \delta_3^{min})$  como mostrado na Figura 4.7.

**Condição 1:** Seja a reta  $t : \delta_3 = P_3.\delta_3$ , ou seja, a coordenada do eixo das ordenadas de  $P_3$ , e seja o ponto  $P_A^l = l \cap t = (P_3.\delta_3 - \theta_2 + \theta_3 - \frac{\pi}{4}, P_3.\delta_3)$ . Uma condição necessária para a existência de solução é que  $P_3.\delta_2 \geq P_A^l.\delta_2$ . Caso  $P_3.\delta_2 < P_A^l.\delta_2$ , então não existe solução. Para uma representação gráfica, ver a Figura 4.8.

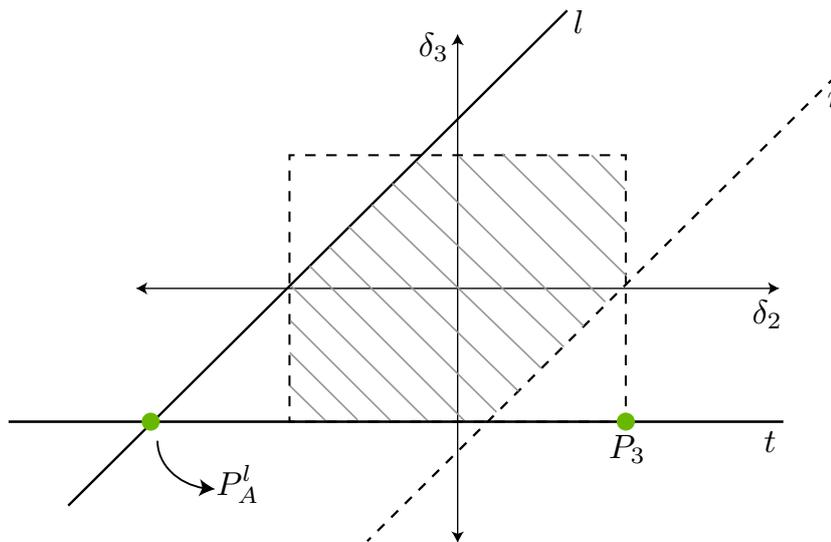


Figura 4.8: A Condição 1 para a existência de solução exige que a reta  $l$  esteja acima do ponto  $P_3$ .

**Condição 2:** Seja agora a reta  $\bar{t} : \delta_3 = P_1.\delta_3$ . A intersecção das retas  $r$  e  $\bar{t}$  é o ponto  $P_A^r = r \cap \bar{t} = (P_1.\delta_3 - \theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}, P_1.\delta_3)$ . A segunda condição necessária para a existência de solução é que  $P_1.\delta_2 \leq P_A^r.\delta_2$ . Caso  $P_1.\delta_2 > P_A^r.\delta_2$ , então não existe solução. Na Figura 4.9 pode ser vista uma representação gráfica dessa condição.

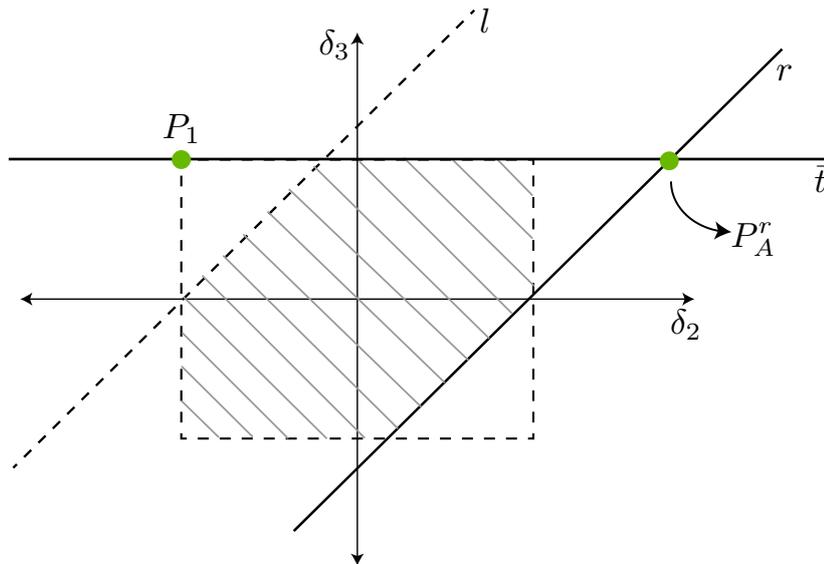


Figura 4.9: A Condição 2 para a existência de solução exige que a reta  $r$  esteja abaixo do ponto  $P_1$ .

As Condições 1 e 2 são suficientes para evitar situações como as da Figura 4.10(a), ou seja,  $B \cap T = \emptyset$ .

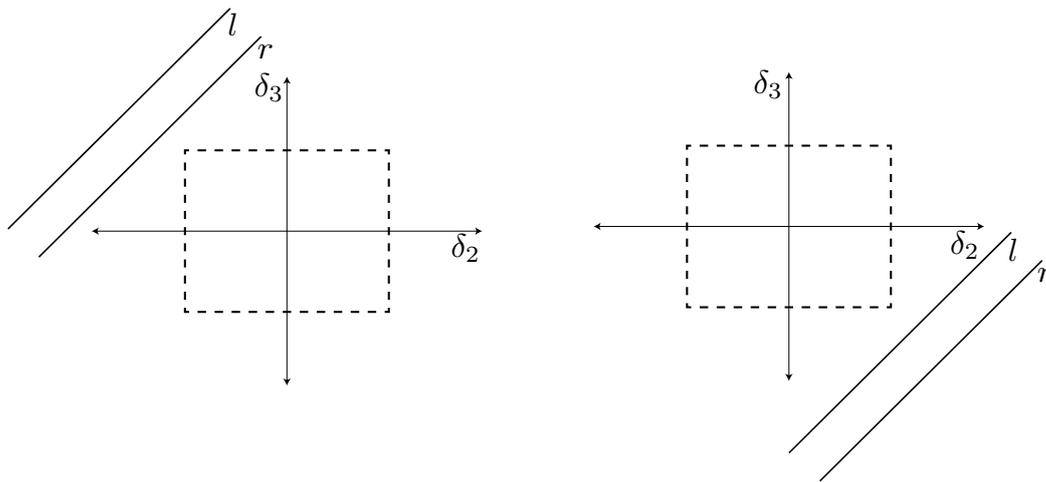
Através da Equação (4-3), observamos que situações como as da Figura 4.10(b) não podem acontecer pois isso indica que o conjunto  $T$  é vazio.

As possíveis configurações que permitem solução podem ser vistas na Figura 4.10(c) onde a situação à esquerda ocorre para o caso de uma singularidade de índice positivo e a situação à direita para o caso de uma singularidade de índice negativo. A intersecção de  $B$  com  $T$  pode também ser detectada através do *algoritmo de Cohen-Sutherland* (49) utilizado para recorte de linhas.

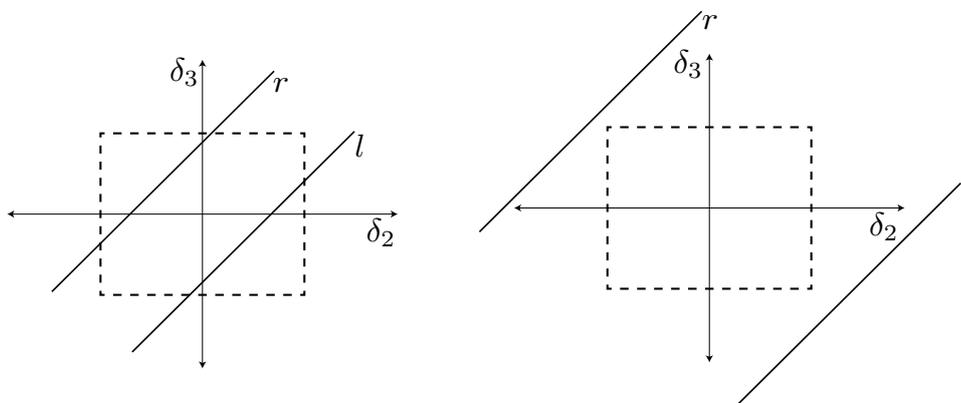
Uma vez encontrado o conjunto solução não vazio  $X$ , podemos escolher um par  $(\delta_2, \delta_3) \in X$ , para realizar o cancelamento do salto, podendo por exemplo, privilegiar valores de  $\delta_2$  e  $\delta_3$  próximos a 0 de forma a minimizar a mudança do campo de cruzes original. Na Figura 4.11 pode ser observado um exemplo no qual ocorreu um cancelamento de salto na aresta em azul. Note que o cancelamento do salto em uma aresta resulta na movimentação da singularidade do campo para o vértice seguinte na mesma aresta.

#### 4.4 Sequência de Cancelamentos

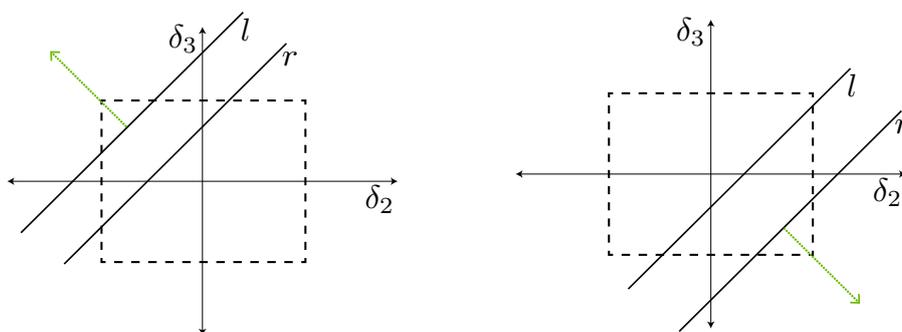
Uma vez que existe a possibilidade de movimentação de singularidades nas arestas da malha através de alterações locais no campo de cruzes, para que seja possível a realização da simplificação local do campo se faz necessário



4.10(a): Inexistência de conjunto solução pois  $B \cap T = \emptyset$ .



4.10(b): Impossibilidade de conjunto solução:  $T = \emptyset$ .



4.10(c): Existência de conjunto solução.

Figura 4.10: Nessa figura disponibilizamos os casos de inexistência, impossibilidade e existência do conjunto solução  $X$ .

existir um caminho conectando singularidades de índices opostos. Nesse caso, o último cancelamento de salto irá cancelar o par de vértices singulares.

Visto que foi utilizada uma técnica que geração de campos de cruzes que tem como resultados campos suaves, estamos interessados em escolher um

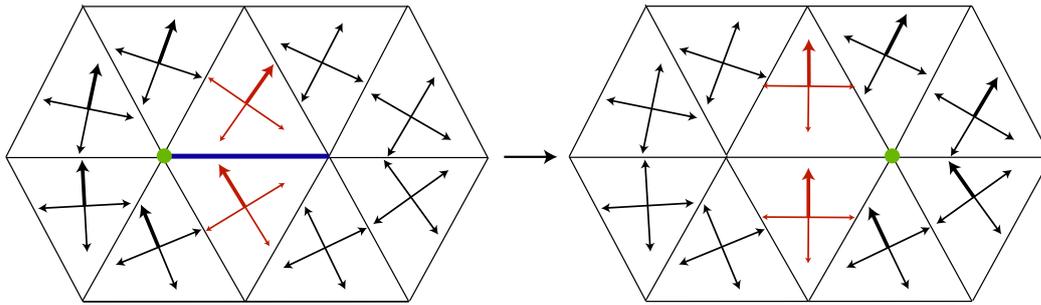


Figura 4.11: Cancelamento de salto na aresta selecionada (cor azul). Com o cancelamento do salto, a singularidade (vértice verde) sofre um deslocamento sobre a aresta para o vértice seguinte.

caminho tal que, após sua execução, as perturbações causadas no campo sejam mínimas.

#### 4.4.1 Escolha do Caminho para Cancelamento

Sejam as singularidades  $s_a$  e  $s_b$  em um campo de cruzes  $C$  tal que

$$I(s_a) = +\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad I(s_b) = -\frac{1}{4}.$$

Dado um conjunto de caminhos  $L(s_a, s_b)$ , compostos por semi-arestas da malha de triângulos, que conectam  $s_a$  a  $s_b$ , estamos interessados em um caminho  $l_i \in L(s_a, s_b)$  tal que

$$w(l_i) = \min\{w(l_i) \forall l_i \in L(s_a, s_b)\},$$

onde  $w(l_i) = \sum_j w(he_j^i)$ , sendo  $he_j^i$  as semi-arestas que compõem o caminho  $l_i$ .

#### Cálculo do Peso

Para o cálculo do peso de cada semi-aresta do caminho, podemos tomar várias abordagens. Uma primeira escolha pode ser, por exemplo, o tamanho de cada semi-aresta. Desta forma, estaríamos interessados em escolher o menor caminho sobre a malha conectando dois pontos, o que nos remete para tradicionais algoritmos como por exemplo, *Dijkstra*. Para este caso, uma vantagem interessante é que o sentido em que o caminho é percorrido não interfere no cálculo do peso, e portanto,  $L(s_a, s_b) = L(s_b, s_a)$ .

Ainda que essa abordagem seja mais simples, existem alguns problemas que precisam ser considerados. Primeiramente, essa abordagem está comple-

tamente alheia ao impacto que as mudanças causam no campo, visto que a escolha das semi-arestas não leva em consideração informação intrínseca alguma do campo. Além disso, caso o primeiro caminho escolhido não seja realizável, a escolha do próximo “menor caminho” pode ser complexa (50, 51).

Embora muitas abordagens possam ser razoáveis, neste trabalho optamos por uma escolha de peso que esteja condicionado a:

1. Realizar as menores alterações possíveis no campo de cruzes, ou seja, um par  $(\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3) = \min\{|\delta_2|, |\delta_3|\}, \forall (\delta_2, \delta_3)$  no conjunto solução  $X$ ;
2. Um conjunto solução grande o suficiente para suportar possíveis mudanças durante a execução do caminho (mais detalhes na Seção 4.4.2).

Assim, o peso que será utilizado para cada semi-aresta no decorrer deste trabalho é dado por:

$$w(he) = \frac{1}{\|area(X)\|} + \|\vec{c}\|,$$

onde  $\vec{c}$  é o vetor que liga a origem do sistema de coordenadas ao centro do polígono  $X$ , como mostrado na Figura 4.12.

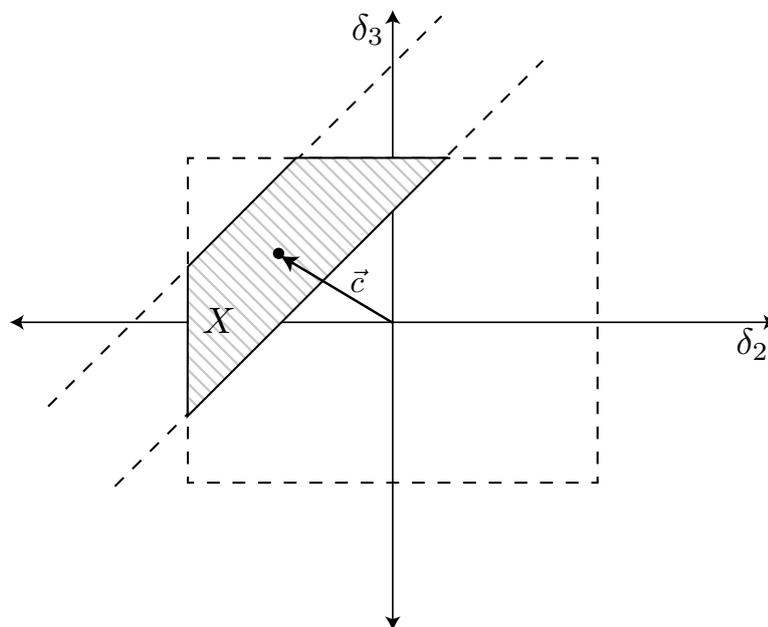


Figura 4.12: Esquema utilizado para o cálculo do peso.

4.4.2

**Construção do Caminho e Cancelamento de Singularidades**

Para a construção de um caminho, com a finalidade de realizar cancelamento de um par de singularidades, utilizamos uma abordagem baseada em propagação. Dado um conjunto  $S$  composto por todas as singularidades do campo de cruces  $C$ , o dividimos nos conjuntos  $S^+$ , composto pelas singularidades de índice positivo, e no conjunto  $S^-$ , composto pelas singularidades de índice negativo. Após a separação dos conjuntos, escolhemos um dos conjuntos para iniciar a propagação. Os elementos pertencentes ao conjunto que não foi escolhido serão os alvos a serem alcançados.

Por simplicidade, suponha que  $S^+$  seja o conjunto escolhido, ou seja, as singularidades com índice  $+\frac{1}{4}$  serão os pontos onde será iniciada a propagação. Para cada  $s_i^+ \in S^+$ , calculamos o peso das arestas incidentes e as inserimos em uma *fila de prioridade* ordenadas pelo peso associado a cada aresta. Na Figura 4.13, pode ser observado o primeiro passo da propagação. Os vértices rotulados com “+” indicam as singularidades de índice positivo e os vértices rotulados com “-” indicam os vértices alvo, ou seja, os vértices de índice negativo.

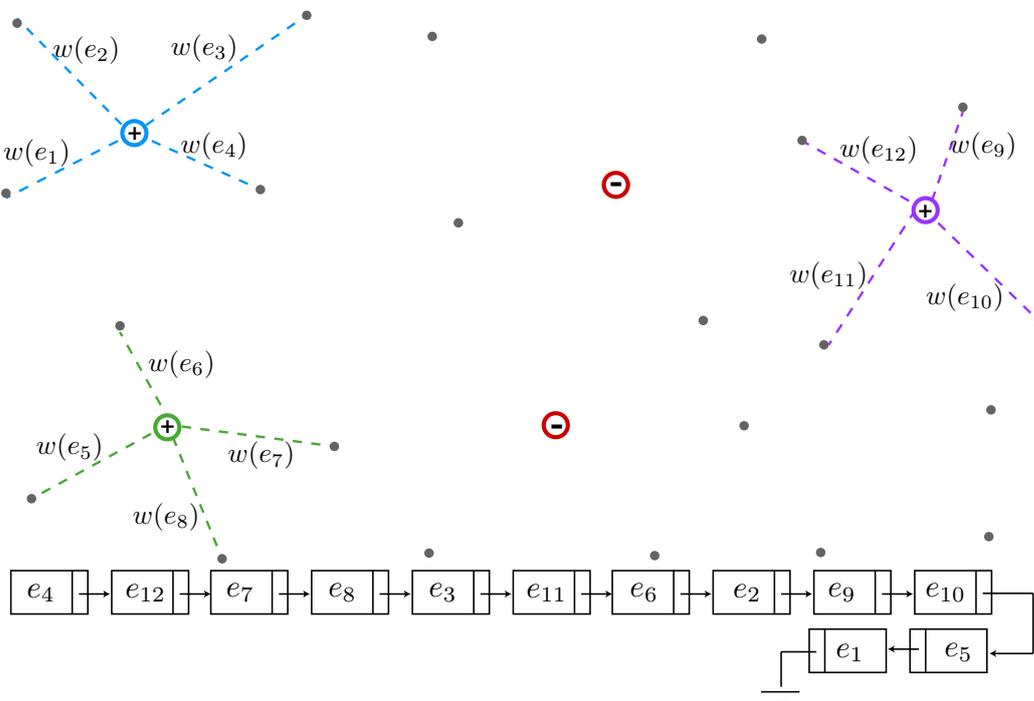


Figura 4.13: Todas arestas incidentes às singularidades de índice positivo (rotuladas com “+”) são inseridas na fila ordenadas pelo peso  $w(e_i)$ .

No próximo passo, retiramos a primeira aresta da fila e a marcamos como visitada. Para o vértice dessa aresta que ainda não foi consultado, percorremos

todas as arestas incidentes que ainda não foram marcadas como visitadas, calculamos o peso de cada uma delas e adicionamos o peso da aresta que foi retirada da fila (Figura 4.14). Caso alguma aresta incidente tenha sido inserida na fila anteriormente, ela fará parte do caminho que possui menor peso. Dessa forma, cada aresta possui o peso de todo o caminho que a contém. Após a associação dos pesos às arestas, as inserimos na fila de prioridade. Repetimos o processo até que um vértice alvo seja atingido.

Quando o vértice alvo é atingido (Figura 4.15), recuperamos o caminho formado pelas arestas conectando os dois vértices. O próximo passo consiste em executar o caminho, ou seja, realizar rotações nos ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em  $\delta_2$  e  $\delta_3$  respectivamente. Caso o caminho não seja executado com sucesso, devido a modificações realizadas a priori no ângulo de alguma face cuja aresta pertence ao caminho ou em faces relacionadas (Seção 4.4.3), continuamos a retirar as arestas da fila até encontrar um novo caminho candidato. Caso haja sucesso na execução, recalculamos as singularidades do campo de cruzes e reiniciamos o processo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1111794/CA

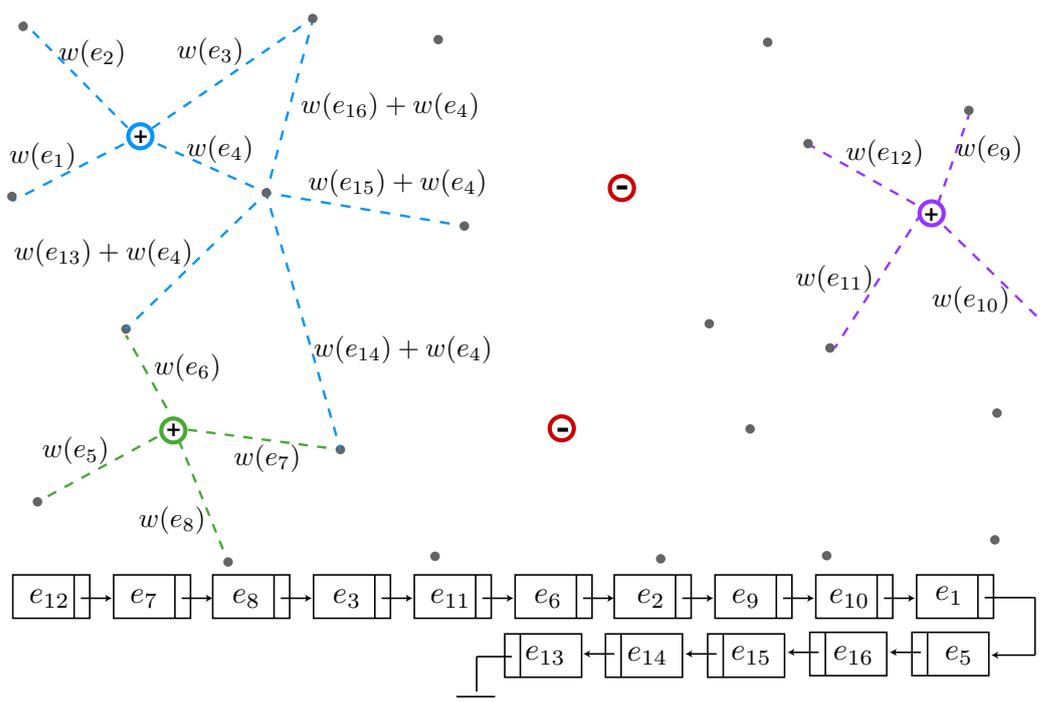


Figura 4.14: A aresta  $e_4$  é retirada da fila e marcada como visitada. Todas as arestas incidentes ao vértice de  $e_4$  ainda não consultado são inseridas na fila, ou seja, arestas  $e_{13}$ ,  $e_{14}$ ,  $e_{15}$  e  $e_{16}$ .

Na Figura 4.16, apresentamos o passo a passo da execução de um caminho. O caminho em destaque, conectando uma singularidade positiva a uma singularidade negativa, consiste em um caminho candidato resultante do

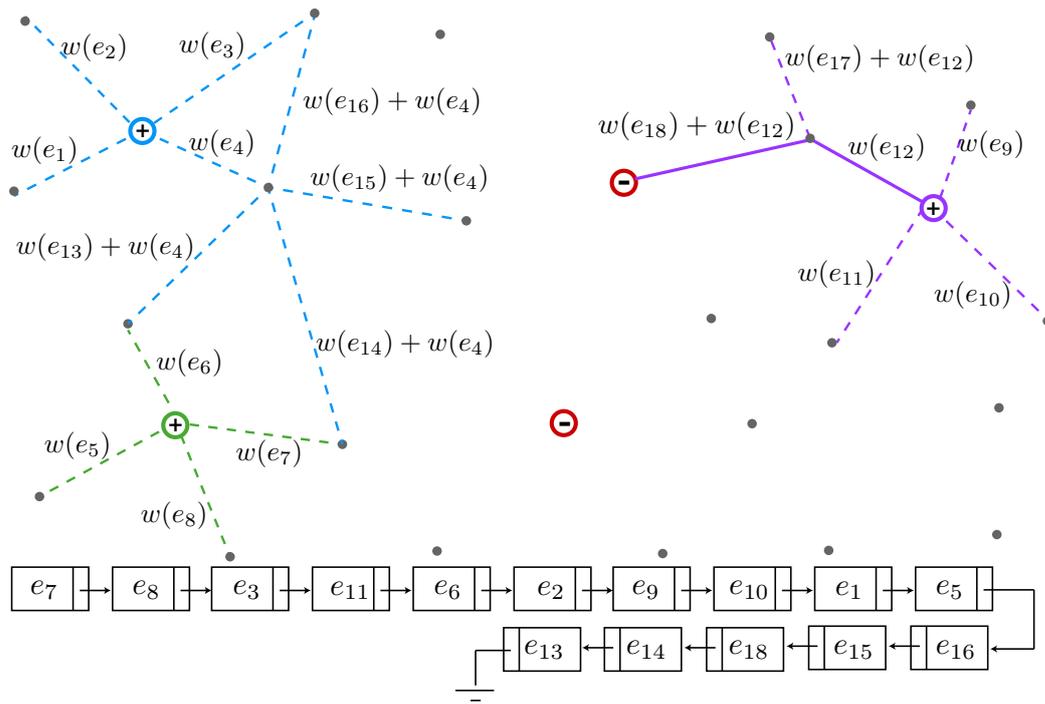


Figura 4.15: A aresta  $e_{12}$  é retirada da fila e marcada como visitada. Como a aresta  $e_{18}$  contém um vértice singular de índice negativo (rotulado com “-”) a propagação para. O caminho  $l = \{e_{12}, e_{18}\}$  é retornado para execução.

Algoritmo 1. Uma vez que o caminho alcançou uma singularidade de índice oposto, simulamos o cancelamento ao longo do caminho para validá-lo.

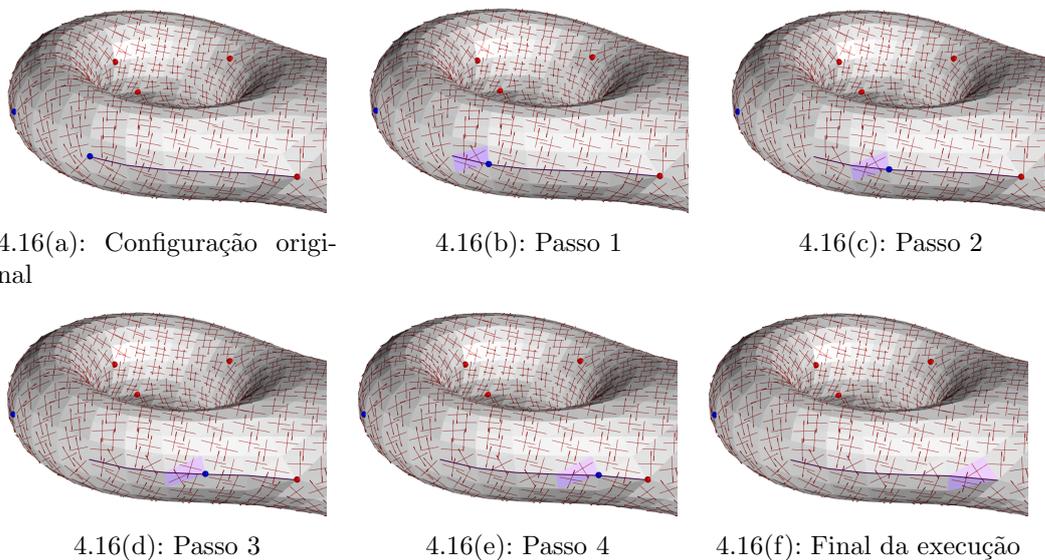


Figura 4.16: Nesta figura pode ser observado um exemplo do passo a passo da execução do cancelamento local entre uma singularidade de índice negativo (em vermelho) e uma singularidade de índice positivo (em azul). As faces em destaque se referem às faces cujos ângulos foram modificados no passo corrente.

---

**Algoritmo 1:** Cancelamento de pares de singularidades utilizando propagação. Para a execução deste algoritmo, é necessário que existam singularidades de índice positivo e de índice negativo no campo.

---

```

{S}eção de declaração de variáveis
Vetor singularidadesOrigem;
Vetor singularidadesAlvo;
Logico possivelCancelamento;
Logico novaPropagacao;

{C}orpo da função
{C}alcula as singularidades e agrupa em  $S^+$  e  $S^-$ 
Calcular(singularidadesOrigem, singularidadesAlvo);
novaPropagacao  $\leftarrow$  verdadeiro;
possivelCancelamento  $\leftarrow$  verdadeiro;
while possivelCancelamento do
  if novaPropagacao then
    | Propagar(singularidadesOrigem, singularidadesAlvo);
    | novaPropagacao  $\leftarrow$  falso;
  else
    | {R}etoma a propagação do ponto de parada anterior
    | ContinuarPropagacao();
  end
  if singularidadeAlvoEncontrada then
    | caminhoCandidato  $\leftarrow$  CaminhoPropagado();
    | {S}imula a execução do caminho realizando rotações em  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ 
    | if ExecutadoComSucesso(caminhoCandidato) then
      | Calcular(singularidadesOrigem, singularidadesAlvo);
      | if NaoVazio(singularidadesAlvo) then
        | | novaPropagacao  $\leftarrow$  verdadeiro;
        | else
        | | possivelCancelamento  $\leftarrow$  falso;
        | end
      | end
    | end
  else
    | possivelCancelamento  $\leftarrow$  falso;
  end
end

```

---

### 4.4.3 Limitações

Dado um caminho construído com a estratégia descrita em 4.4.2, existem algumas situações onde os pesos das arestas calculados à priori precisam ser recalculados durante a execução. Tal modificação pode culminar no insucesso do caminho corrente, visto que o próximo salto a ser cancelado pode assumir a configuração da Figura 4.10(a) ou da Figura 4.10(b), onde não há solução. A repetição do cálculo do peso se faz necessário sempre que:

1. O ângulo de uma das faces correntes for modificado mais de uma vez (Figura 4.17);
2. O ângulo em alguma das faces associada a aresta foi modificado (Figura 4.6).

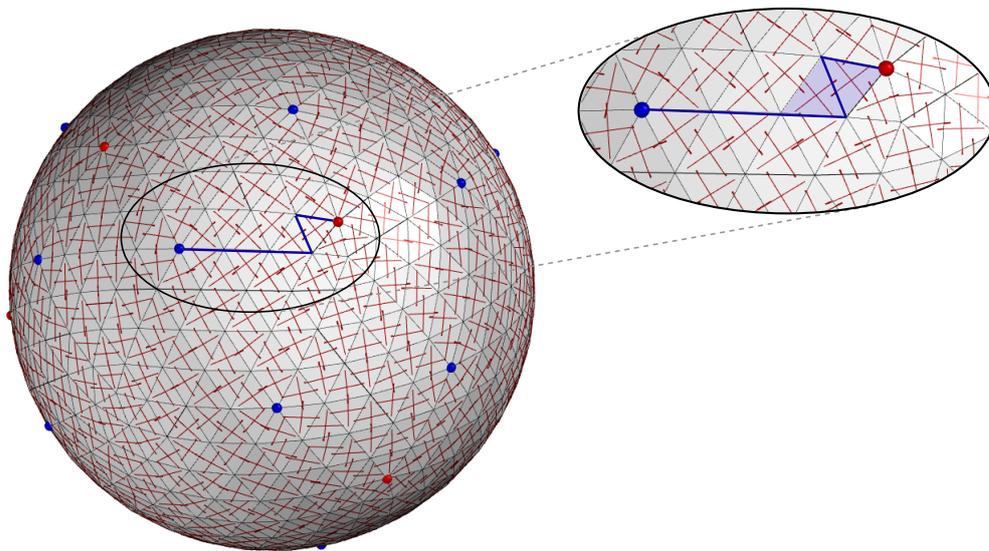


Figura 4.17: Para o caminho escolhido, é necessário realizar novamente o cálculo do peso pois o caminho passa mais de uma vez pelas faces em destaque.

Embora essas situações ocorram, e eventualmente possam de fato inviabilizar o caminho escolhido, tentamos diminuir o impacto dessa repetição através da escolha do nosso peso. Para tal, buscamos arestas onde o conjunto solução dado pelo polígono  $X$  (Figura 4.7) seja o maior possível. Dessa forma, teremos uma maior flexibilidade na escolha do par  $(\delta_2, \delta_3)$  e conseqüentemente, uma maior probabilidade de sucesso na execução.

## 4.5

### Resultados e Discussão

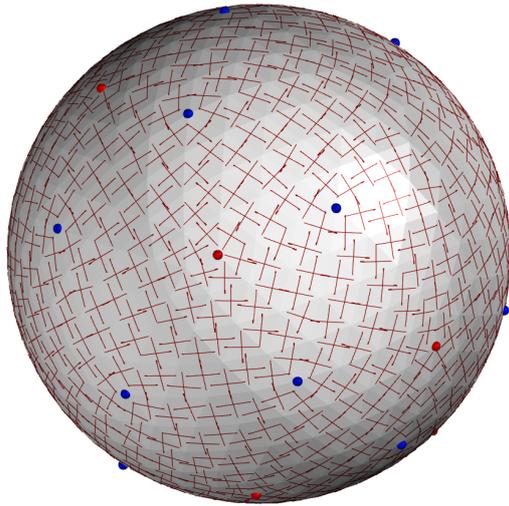
Nesta seção apresentaremos alguns resultados obtidos através das operações de simplificação local. Assim como na construção do espaço de escala, em todos os resultados dispostos utilizamos o método proposto na Seção 4.2 para a detecção de singularidades. Para a representação das singularidades foi mantida a convenção anterior, ou seja, as singularidades de índice positivo foram representadas por vértices em azul e as singularidades de índice negativo por vértices em vermelho.

**Resultado 1 - Esfera:** Neste primeiro resultado apresentamos as modificações topológicas sofridas pelo campo definido sobre uma esfera. Em sua configuração inicial (Figura 4.18(a)) o campo apresenta 20 singularidades, sendo 14 de índice positivo e 6 de índice negativo. Vale observar que esse mesmo dado foi utilizado no Resultado 1 apresentado na Seção 3.4.

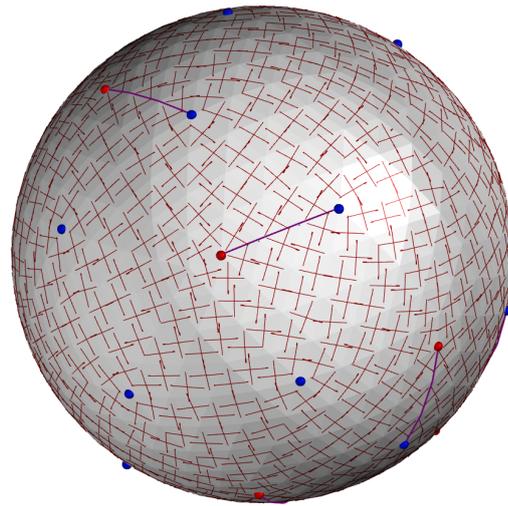
Utilizando a estratégia apresentada na Seção 4.4.2, definimos todos os caminhos onde o cancelamento é factível. Como proposto, esses caminhos são construídos e realizados um a um, sendo ordenados com base na persistência dentro da configuração corrente.

Na Figura 4.18(b), apresentamos a configuração inicial do campo juntamente com todos os caminhos definidos para o cancelamento. Observe que, como as mudanças são locais, a execução de um caminho não altera a posição das demais singularidades. Dessa forma, é sempre possível associar as singularidades da configuração inicial com todos os caminhos que serão executados, o que não ocorre para o caso do espaço de escala uma vez que o campo sofre mudanças globais. Na Figura 4.18(c), apresentamos a configuração do campo após a realização de todos os caminhos destacados. O resultado final, que possui um total de 8 singularidades de índice positivo, pode ser observado na Figura 4.18(d).

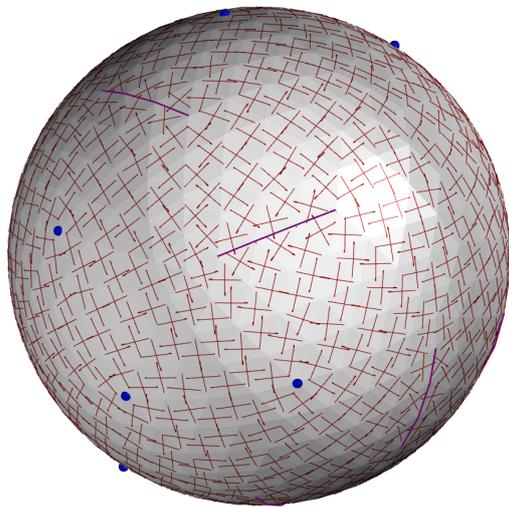
Para uma melhor análise das simplificações realizadas, disponibilizamos um diagrama de linhas de persistência (Figura 4.19 (à esquerda)) e um histograma (Figura 4.19 (à direita)) com a frequência das singularidades para cada peso associado. No diagrama de linhas de persistência, no eixo vertical estão dispostas as singularidades nas quais a propagação proposta na Seção 4.4.2 foi iniciada. No eixo horizontal estão dispostos os pesos, em escala logarítmica, associados aos caminhos. As linhas contínuas em azul representam os caminhos propriamente ditos, cujo extremo à esquerda representa o surgimento, e o extremo à direita, o cancelamento da singularidade. Dessa forma, o peso



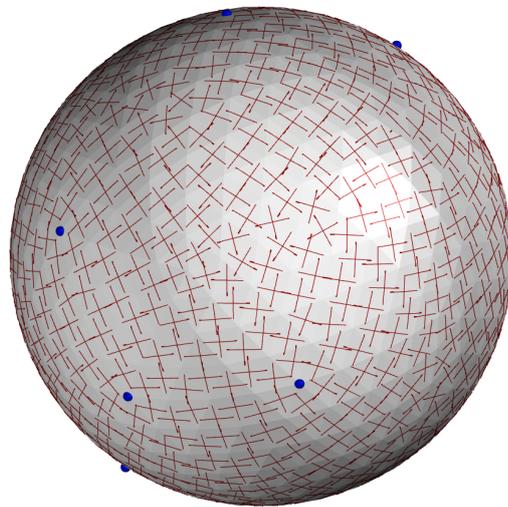
4.18(a): Configuração inicial.



4.18(b): Configuração inicial com os 6 caminhos a serem executados.



4.18(c): Execução dos caminhos propagados.



4.18(d): Configuração final.

Figura 4.18: Nesta figura, podemos observar as configurações antes e depois da execução de todos os caminhos possíveis na esfera. A configuração inicial possui 20 singularidades enquanto a final, possui 8 singularidades de índice positivo. No total, foram executados 6 caminhos.

associado ao extremo direito do caminho pode ser entendido como o custo para a realização do cancelamento ou ainda como a importância do par de singularidades. No histograma apresentado na Figura 4.19 (à direita), pode ser observado o número de singularidades associadas a cada peso. Observe que, apesar de um total de 12 singularidades terem sofrido cancelamento, i.e., 6 pares, as singularidades alvo não estão sendo contabilizadas no eixo vertical, pois com o seu surgimento, um cancelamento é efetuado instantaneamente. Dessa forma, a interrupção de uma linha de persistência no diagrama de linhas ou o decaimento da frequência no histograma representa o surgimento da

singularidade alvo, resultando assim em um cancelamento.

Analisando o diagrama de linhas associado ao campo definido sobre a esfera, podemos concluir que o campo apresenta uma estrutura similar em todas as regiões e que todos os pares de singularidades possuem importância semelhante. Na Tabela 4.1, pode ser observado o peso associado ao surgimento de uma singularidade e ao cancelamento de um par de singularidades além do posicionamento geométrico de cada singularidade sobre a malha.

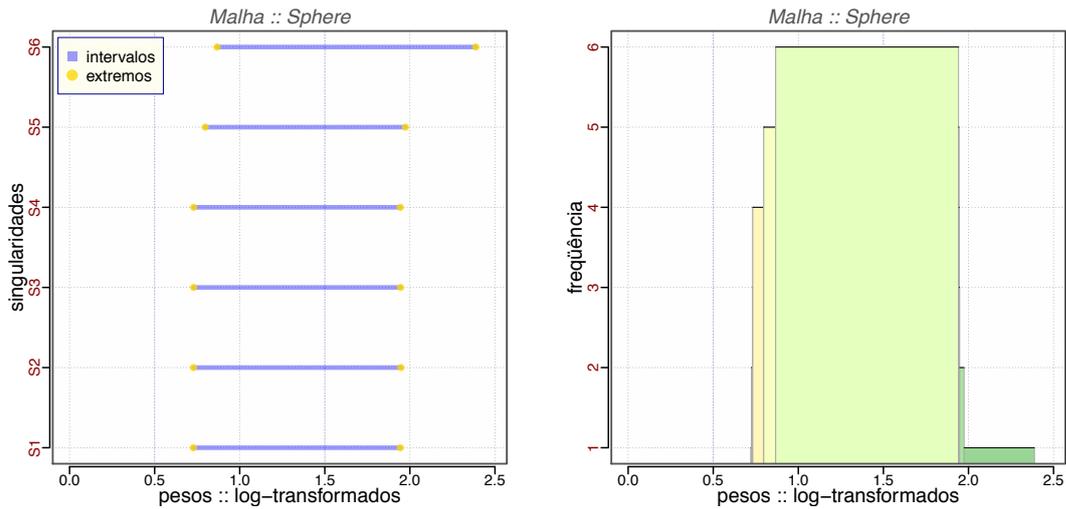
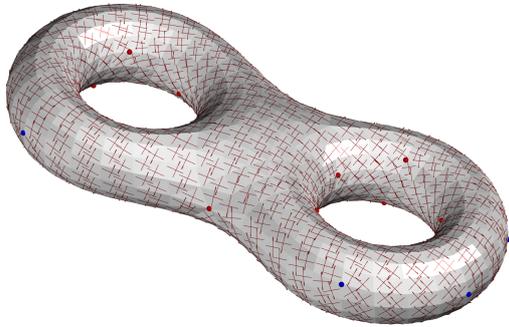


Figura 4.19: Diagrama de linhas de persistência (à esquerda) e histograma (à direita) para o modelo Esfera.

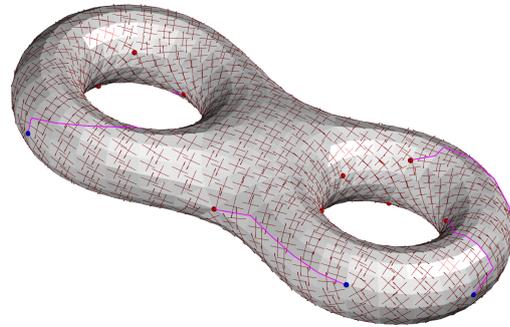
| Informações Sobre Singularidades do Modelo <i>Esfera</i> |          |          |          |           |           |                |                |
|--|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------------|----------------|
| Sing.  | $x$      | $y$      | $z$      | $p_{ini}$ | $p_{fim}$ | $\ln(p_{ini})$ | $\ln(p_{fim})$ |
| S1   | -0.93417 | -0.35682 | 0.00000  | 2.06961   | 6.98884   | 0.72736        | 1.9443         |
| S2   | -0.57735 | -0.57735 | -0.57735 | 2.07114   | 7.01576   | 0.72810        | 1.9482         |
| S3   | 0.57735  | 0.57735  | 0.57735  | 2.07257   | 6.999     | 0.72879        | 1.9458         |
| S4   | 0.93417  | -0.35682 | 0.00000  | 2.07339   | 6.98811   | 0.72918        | 1.9442         |
| S5   | 0.57735  | -0.57735 | -0.57735 | 2.21876   | 7.20173   | 0.79695        | 1.9743         |
| S6   | -0.35682 | 0.0000   | -0.93417 | 2.37984   | 10.8887   | 0.86703        | 2.3877         |

Tabela 4.1: Nesta tabela, disponibilizamos: a posição geométrica de cada singularidade através dos valores  $x, y, z$ , o peso inicial e final de cada caminho através dos valores de  $p_{ini}$  e  $p_{fim}$  respectivamente, além da log-transformação destes para facilitar a comparação dos dados com o diagrama de linhas e o histograma, ambos apresentados na Figura 4.19 .

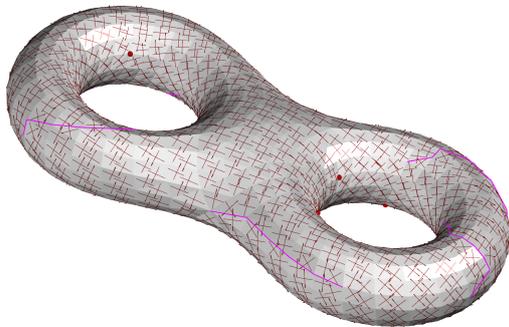
**Resultado 2 - Bi-toro:** Neste segundo resultado apresentamos a simplificação do campo de cruzes definido sobre a malha de um bi-toro (Figura 4.20(a)). O campo inicial, obtido sem a imposição de restrições ao sistema, possui um total de 22 singularidades, sendo 7 de índice positivo e 15 de índice negativo.



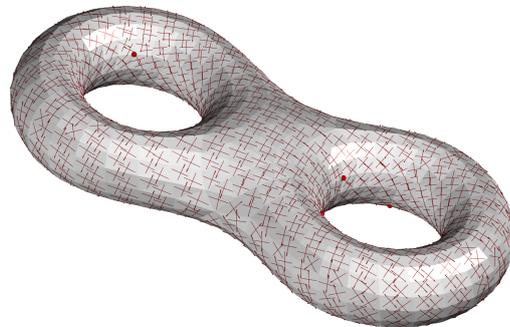
4.20(a): Configuração inicial.



4.20(b): Caminhos propagados.



4.20(c): Execução dos caminhos propagados.



4.20(d): Configuração final.

Figura 4.20: Partindo de uma configuração com 22 singularidades, foram executados um total de 7 caminhos, o que resultou em um campo com 8 singularidades de índice  $-\frac{1}{4}$ .

Na Figura 4.20(b), são apresentados todos os caminhos calculados cuja realização culmina no cancelamento dos pares de singularidades associados. Ao contrário do resultado anterior, para este resultado foi necessário efetuar cálculos para determinar as rotações dos ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  durante a execução do caminho, visto que, para algumas faces, os ângulos referentes às faces associadas (Figura 4.6) foram modificados previamente. Apesar da redefinição de  $\delta_2$  e  $\delta_3$ , ainda foi possível executar o caminho (Figura 4.20(d)). No total, foram executados 7 caminhos, escolhidos com base em sua persistência, o que resultou em um campo com 8 singularidades de índice negativo. Dessa forma, assim como na construção do espaço de escala, a configuração do campo obtido através da simplificação foi a mais simples possível (Figura 4.20(d)). Note que, apesar do campo final ser o mais simples possível, ele é igual ao campo original em praticamente toda a malha, e portanto, preserva detalhes que o espaço de escala teria suavizado.

Na Figura 4.21 (à esquerda), apresentamos o diagrama com as linhas de persistência das singularidades. Se comparado com o resultado anterior (Figura 4.19), podemos concluir que as singularidades do campo associado ao bi-toro são mais persistentes que as do campo associado à esfera, e portanto, maior o custo para a realização do caminho. Esse fato pode ser verificado através do histograma (Figura 4.21 (à direita)) e através da Tabela 4.2 pois, no caso do bi-toro, todas as singularidades coexistem no intervalo  $[2.68, 16.77)$ , sendo 16.77 o peso do primeiro par cancelado. Já no resultado apresentado anteriormente, o cancelamento do último par ocorre para o peso 10.88.

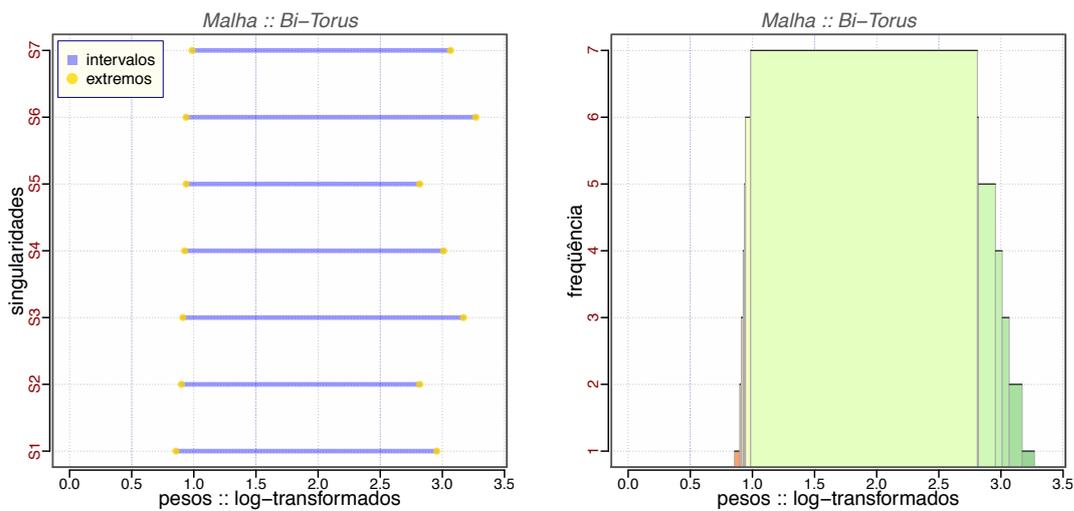
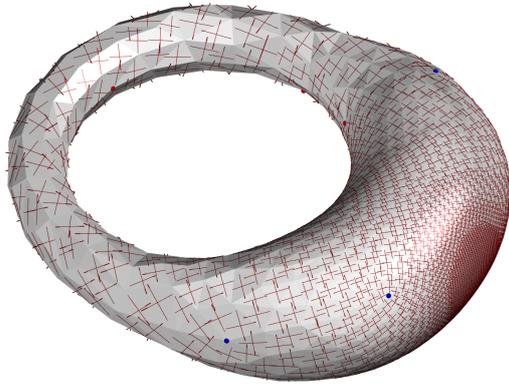


Figura 4.21: Diagrama de linhas de persistência (à esquerda) e histograma (à direita) para o modelo *Bi-toro*.

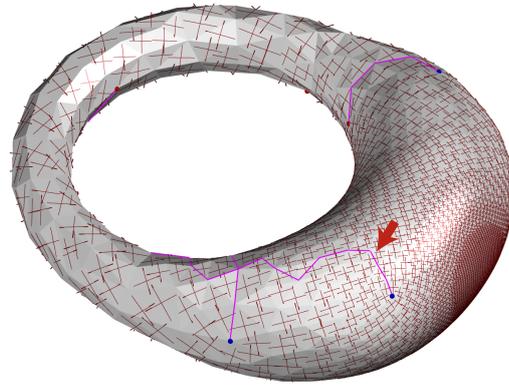
| Informações Sobre Singularidades do Modelo <i>Bi-toro</i> |          |          |          |           |           |                |                |
|---|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------------|----------------|
| Sing.   | $x$      | $y$      | $z$      | $p_{ini}$ | $p_{fim}$ | $\ln(p_{ini})$ | $\ln(p_{fim})$ |
| S1  | 0.24731  | 0.00028  | 0.93442  | 2.35321   | 19.2102   | 0.85578        | 2.9554         |
| S2  | 0.34379  | 0.00018  | 0.00404  | 2.45832   | 16.7613   | 0.89948        | 2.8191         |
| S3  | 0.10742  | 0.05887  | 0.71889  | 2.48736   | 23.8235   | 0.91122        | 3.1707         |
| S4  | 0.00001  | 0.00019  | -1.00000 | 2.52456   | 20.2896   | 0.92607        | 3.0101         |
| S5  | -0.34379 | 0.00018  | -0.00404 | 2.55367   | 16.763    | 0.93753        | 2.8192         |
| S6  | -0.21280 | 0.06029  | -0.40359 | 2.55424   | 26.3013   | 0.93775        | 3.2696         |
| S7  | 0.23029  | -0.05982 | -0.45862 | 2.68069   | 21.4663   | 0.98607        | 3.0665         |

Tabela 4.2: Nesta tabela, disponibilizamos: a posição geométrica de cada singularidade, o peso inicial e final de cada caminho, além da log-transformação destes para fim de comparação com o diagrama de linhas de persistência e o histograma (Figura 4.21).

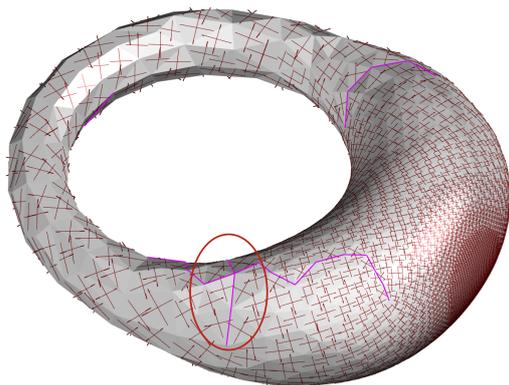
**Resultado 3 - Bague:** Para este resultado utilizamos uma malha composta por 5304 faces, 2652 vértices e 15912 semi-arestas. Para a construção do campo inicial (Figura 4.22(a)), foi utilizado o método apresentado na Seção 3.2.3, sem a imposição de restrições para o sistema. No total, o campo obtido possui 10 singularidades, sendo 5 de índice positivo e 5 de índice negativo.



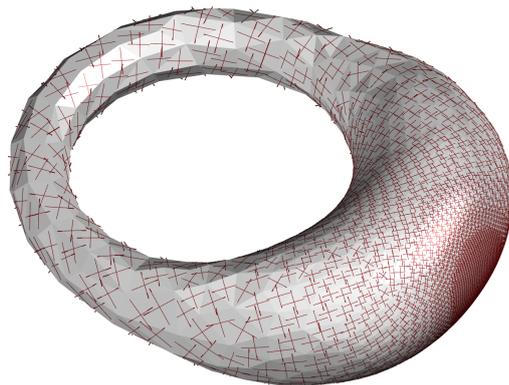
4.22(a): Configuração inicial contendo 10 singularidades.



4.22(b): Caminhos a serem executados. Em destaque, apresentamos o caminho mais persistente.



4.22(c): Configuração obtida após a execução dos caminhos. Em destaque, apresentamos a intersecção de dois caminhos.



4.22(d): Configuração final.

Figura 4.22: Neste resultado, foi utilizado um campo contendo 10 singularidades inicialmente. Após a execução dos 5 caminhos propagados, foi possível o cancelamento de todas as singularidades.

Na Figura 4.22(b), disponibilizamos os caminhos provenientes do método de propagação. Observe que, para os caminhos apresentados, além de existirem faces associadas cujos ângulos foram modificados, também houve faces cujos ângulos foram modificados mais de uma vez. Dessa forma, se fez necessária a realização de cálculos para definir novos valores para  $\delta_2$  e  $\delta_3$ . Note que, apesar de existir uma intersecção de caminhos (Figura 4.22(c)), tal fato não possui relação alguma com a necessidade de novos cálculos para os valores de  $\delta_2$  e  $\delta_3$  durante a execução visto que, após a execução de um caminho, é

realizada uma nova detecção de singularidades e o processo de propagação é recommençado. Para a obtenção do campo final foram realizados um total de 5 caminhos. Dessa forma, o campo final, apresentado na Figura 4.22(d), não possui nenhuma singularidade.

O diagrama com a persistência das singularidades pode ser observado na Figura 4.23 (à esquerda). Observe que, dentre todas as singularidades detectadas, a singularidade  $s_1$  demanda um esforço por volta de 4x maior que as demais. Esse fato é evidenciado através do histograma (Figura 4.23 (à direita)) e da Tabela 4.3, pois para o intervalo (13.31, 52.07), apenas o caminho propagado por  $s_1$  existe (em destaque na Figura 4.22(b)). Na Tabela 4.3, disponibilizamos todos os pesos associados ao surgimento das singularidades e cancelamento de pares de singularidades apresentados nesse resultado além da posição geométrica de cada singularidade.

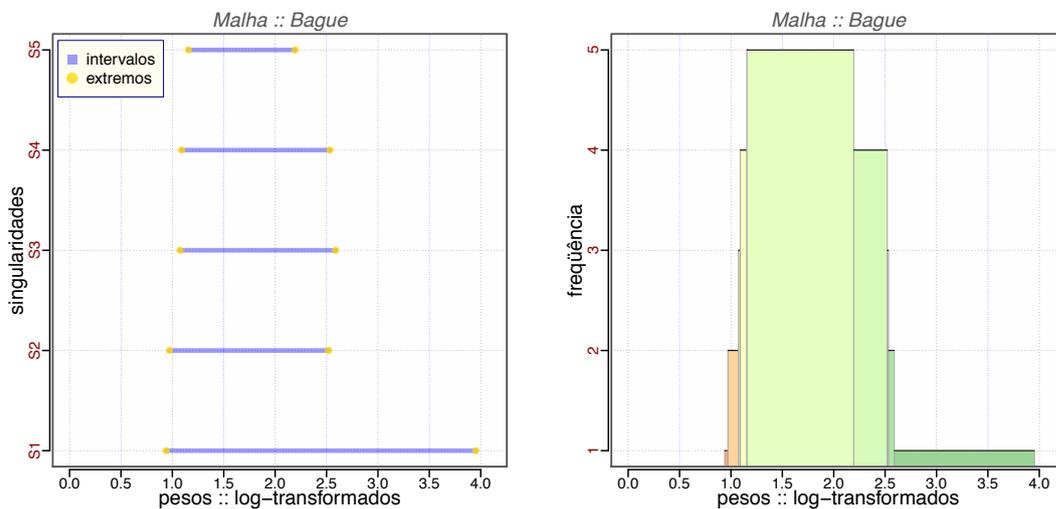
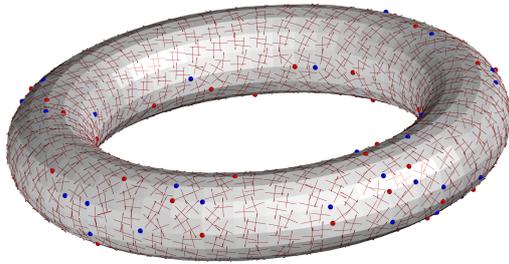


Figura 4.23: Diagrama de linhas de persistência (à esquerda) e histograma (à direita) para o modelo *Bague*.

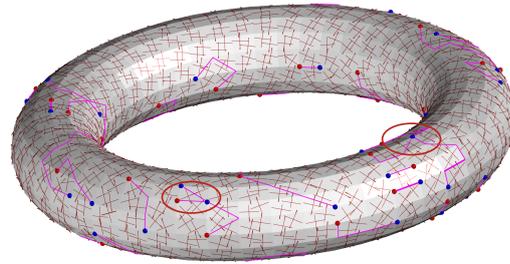
| Informações Sobre Singularidades do Modelo <i>Bague</i> |          |          |          |           |           |                |                |
|---|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------------|----------------|
| Sing.   | $x$      | $y$      | $z$      | $p_{ini}$ | $p_{fim}$ | $\ln(p_{ini})$ | $\ln(p_{fim})$ |
| S1  | -0.23931 | -0.01469 | -0.55399 | 2.5577    | 52.0794   | 0.93911        | 3.9528         |
| S2  | 0.43149  | -0.23880 | 0.68944  | 2.6413    | 12.4417   | 0.97127        | 2.5211         |
| S3  | 0.11775  | -0.08184 | -0.46300 | 2.92933   | 13.3171   | 1.07477        | 2.5890         |
| S4  | -0.12750 | 0.11675  | 0.62965  | 2.97574   | 12.5945   | 1.09049        | 2.5333         |
| S5  | -0.87096 | 0.12730  | 0.32037  | 3.17789   | 8.9741    | 1.15622        | 2.1943         |

Tabela 4.3: Nesta tabela, disponibilizamos: a posição geométrica de cada singularidade, o peso inicial e final de cada caminho, além da log-transformação destes para fim de comparação com o diagrama de linhas de persistência e o histograma (Figura 4.23).

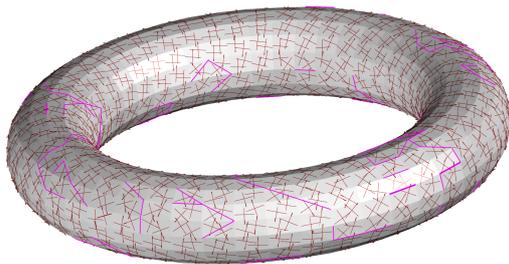
**Resultado 4 - Toro:** Neste resultado aplicamos a simplificação em um campo de cruzes definido sobre a malha de um toro. Para a geração do campo inicial impomos ao sistema valores para alguns ângulos, o que culminou em um campo com 102 singularidades, sendo 51 de índice negativo e 51 de índice positivo (Figura 4.24(a)).



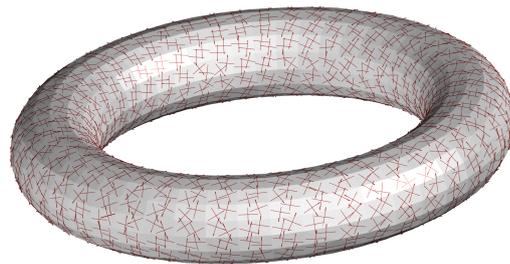
4.24(a): Configuração inicial contendo um toro de 102 singularidades.



4.24(b): Caminhos calculados através da propagação. Em destaque, apresentamos singularidades dispostas sobre o caminho traçado por outro par.



4.24(c): Execução dos caminhos.



4.24(d): Configuração final.

Figura 4.24: Neste resultado, iniciamos o processo de propagação a partir de um campo com 102 singularidades. No total, foi possível realizar a execução de 51 caminhos, o que resultou em um campo sem singularidades.

Através do método de propagação apresentado na Seção 4.4.2, foram construídos os caminhos que possibilitaram o cancelamento dos pares de singularidades (Figura 4.24(b)). No total, foi possível a execução sequencial de 51 caminhos (Figura 4.24(c)), resultando assim, na configuração mais simples possível que consiste em um campo sem singularidade alguma (Figura 4.24(d)), o que não foi possível através do espaço do escala. Observe que, embora em alguns casos o par de singularidades cancelado pertença inicialmente à mesma aresta, o caminho escolhido possui mais de uma aresta. Isso ocorre pois, para caminhos mais curtos, o conjunto solução associado às faces ao longo do caminho não é admissível (Figura 4.10). Vale observar também que, embora na Figura 4.24(b) sejam exibidos casos onde ocorrem a intersecção de

caminhos ou até mesmo singularidades dispostas sobre o caminho traçado por outro par (Figura 4.24(b)), a movimentação e cancelamento de singularidades só são permitidos se estes não alterarem a configuração topológica do campo em sua vizinhança. Dessa forma, nenhum par que não seja o associado ao caminho poderá ser cancelado e nenhuma singularidade poderá ser criada. Isso é possível através da imposição feita nas Equações (4-4) e (4-5).

Na Figura 4.25, disponibilizamos o diagrama com a persistência das singularidades e o histograma com a frequência das singularidades associada a cada peso. Observe que, quando ocorre o cancelamento de um par cujo caminho é composto de apenas uma aresta, a representação no diagrama se dá através de um ponto, uma vez que toda a construção proposta é baseada em arestas. Para uma análise mais precisa com relação aos pesos associados aos caminhos, vide Tabela 4.4.

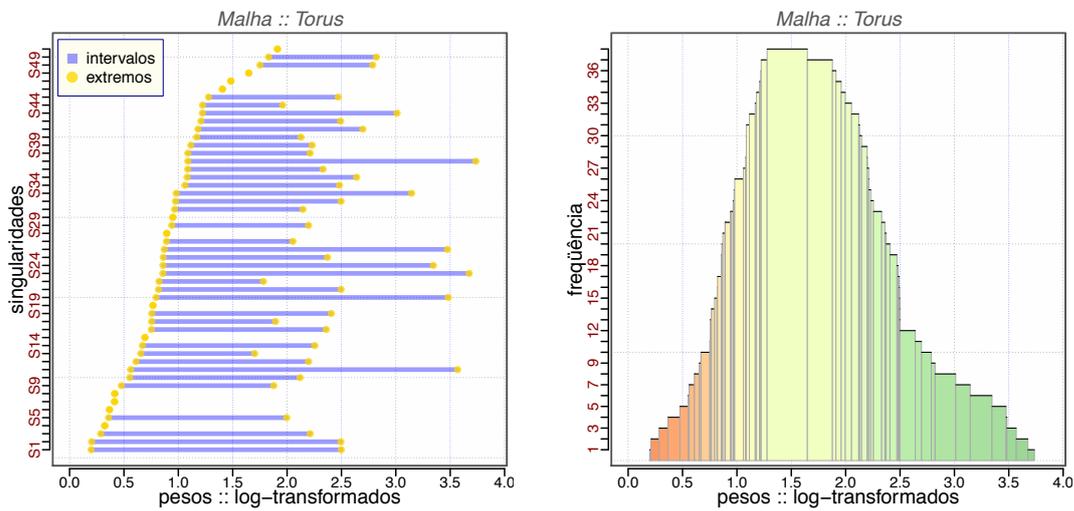


Figura 4.25: Diagrama de linhas de persistência (à esquerda) e histograma (à direita) para o modelo Toro.

| Informações Sobre Singularidades do Modelo <i>Toro</i> |          |          |          |           |           |                |                |
|--|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------------|----------------|
| Sing.  | $x$      | $y$      | $z$      | $p_{ini}$ | $p_{fim}$ | $\ln(p_{ini})$ | $\ln(p_{fim})$ |
| S1   | -0.71709 | 0.41342  | 0.17618  | 1.21862   | 12.165    | 0.1977         | 2.4986         |
| S2   | 0.799683 | 0.21377  | 0.17642  | 1.22468   | 12.1185   | 0.2027         | 2.4947         |
| S3   | 0.493824 | 0.85494  | -0.06613 | 1.33074   | 9.14096   | 0.2857         | 2.2128         |
| S4   | 0.910597 | -0.37771 | -0.06558 | 1.38169   | 1.38169   | 0.3233         | 0.3233         |
| S5   | 0.253052 | 0.61046  | 0.06887  | 1.43181   | 7.36446   | 0.3589         | 1.9967         |
| S6   | -0.55934 | -0.32339 | 0.00001  | 1.44358   | 1.44358   | 0.3671         | 0.3671         |
| S7   | -0.47501 | 0.82232  | -0.12217 | 1.51205   | 1.51205   | 0.4135         | 0.4135         |
| S8   | 0.822841 | 0.47446  | -0.12217 | 1.51462   | 1.51462   | 0.4152         | 0.4152         |
| S9   | 0.330326 | -0.57234 | -0.06933 | 1.60994   | 6.54142   | 0.4762         | 1.8782         |
| S10  | 0.70743  | 0.70691  | -0.00000 | 1.73869   | 8.33094   | 0.5531         | 2.1200         |
| S11  | 0.640349 | 0.083956 | -0.00003 | 1.75258   | 35.4631   | 0.5611         | 3.5685         |
| S12  | 0.116739 | -0.88734 | -0.16064 | 1.84083   | 9.00859   | 0.6102         | 2.1982         |
| S13  | -0.73396 | -0.19725 | 0.16400  | 1.92408   | 5.48631   | 0.6544         | 1.7023         |
| S14  | 0.774369 | -0.44784 | 0.16024  | 1.95295   | 9.53933   | 0.6693         | 2.2554         |
| S15  | -0.21439 | 0.79917  | -0.17581 | 1.99928   | 1.99928   | 0.6928         | 0.6928         |
| S16  | -0.54473 | -0.71063 | -0.16143 | 2.12043   | 10.5972   | 0.7516         | 2.3606         |
| S17  | -0.64038 | 0.08395  | 0.00017  | 2.1262    | 6.64642   | 0.7543         | 1.8941         |
| S18  | -0.78295 | -0.6011  | 0.06565  | 2.12942   | 11.1041   | 0.7558         | 2.4073         |
| S19  | 0.701734 | -0.29122 | -0.16488 | 2.15227   | 2.15227   | 0.7665         | 0.7665         |
| S20  | -0.24705 | 0.59587  | -0.00000 | 2.2134    | 32.5619   | 0.7945         | 3.4831         |
| S21  | -0.82297 | -0.47550 | -0.12226 | 2.2633    | 12.1413   | 0.8168         | 2.4966         |
| S22  | 0.865675 | 0.49951  | 0.00011  | 2.27452   | 5.94545   | 0.8218         | 1.7826         |
| S23  | 0.865573 | -0.50049 | 0.00016  | 2.35797   | 39.4754   | 0.8578         | 3.6757         |
| S24  | 0.37786  | 0.91156  | -0.06629 | 2.36006   | 28.3797   | 0.8587         | 3.3457         |
| S25  | 0.462397 | -0.60319 | 0.16485  | 2.36526   | 10.7217   | 0.8609         | 2.3723         |
| S26  | -0.39311 | -0.51311 | -0.00038 | 2.38706   | 32.3177   | 0.8701         | 3.4756         |
| S27  | 0.084476 | -0.64089 | 0.00024  | 2.4357    | 7.79682   | 0.8902         | 2.0537         |
| S28  | -0.13063 | -0.99223 | 0.00020  | 2.44282   | 2.44282   | 0.8932         | 0.8932         |
| S29  | 0.733951 | -0.19726 | 0.16386  | 2.55903   | 9.00377   | 0.9396         | 2.1976         |
| S30  | 0.697115 | -0.69768 | 0.06560  | 2.58462   | 2.58462   | 0.9496         | 0.9496         |
| S31  | 0.717117 | -0.41447 | -0.17645 | 2.62459   | 8.55463   | 0.9649         | 2.1465         |
| S32  | 0.47495  | 0.82242  | 0.12225  | 2.64633   | 12.1407   | 0.9732         | 2.4966         |
| S33  | 0.987577 | -0.00050 | -0.06583 | 2.66364   | 23.2336   | 0.9797         | 3.1456         |
| S34  | 1.0000   | -0.00046 | -0.00000 | 2.88633   | 11.9721   | 1.0600         | 2.4826         |
| S35  | -0.12881 | -0.97917 | 0.06589  | 2.94642   | 14.0162   | 1.0806         | 2.6402         |
| S36  | -0.50408 | -0.65733 | 0.17459  | 2.96373   | 10.2878   | 1.0864         | 2.3310         |
| S37  | -0.25547 | -0.95378 | 0.06574  | 2.96693   | 41.9246   | 1.0875         | 3.7359         |
| S38  | -0.19675 | 0.73343  | -0.16396 | 2.96748   | 9.13426   | 1.0877         | 2.2120         |
| S39  | -0.95335 | -0.25602 | -0.06583 | 3.04963   | 9.30855   | 1.1150         | 2.2309         |
| S40  | -0.31687 | -0.76556 | 0.17672  | 3.21478   | 8.40099   | 1.1678         | 2.1283         |
| S41  | -0.50014 | -0.86619 | -0.00004 | 3.25625   | 14.8427   | 1.1806         | 2.6975         |
| S42  | -0.21432 | 0.79916  | 0.17642  | 3.34758   | 12.0934   | 1.2082         | 2.4927         |
| S43  | -0.31678 | -0.76561 | -0.17676 | 3.39245   | 20.327    | 1.2216         | 3.0120         |
| S44  | 0.764809 | 0.31629  | -0.17667 | 3.39673   | 7.09338   | 1.2228         | 1.9592         |
| S45  | -0.91787 | -0.24641 | 0.12215  | 3.58793   | 11.8375   | 1.2776         | 2.4713         |
| S46  | 0.878607 | -0.36437 | -0.12302 | 4.07704   | 4.07704   | 1.4054         | 1.4054         |
| S47  | 0.466638 | -0.46717 | -0.06953 | 4.40558   | 4.40558   | 1.4829         | 1.4829         |
| S48  | 0.247001 | -0.59689 | -0.00016 | 5.1946    | 5.1946    | 1.6476         | 1.6476         |
| S49  | 0.447258 | -0.77536 | 0.16074  | 5.75951   | 16.2445   | 1.7509         | 2.7878         |
| S50  | -0.88717 | -0.11723 | 0.16109  | 6.23558   | 16.8159   | 1.8303         | 2.8223         |
| S51  | 0.85453  | -0.49399 | 0.065758 | 6.75982   | 6.75982   | 1.9110         | 1.9110         |

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1111794/CA

Tabela 4.4: Nesta tabela apresentamos a posição geométrica de cada singularidade além do peso inicial e final associado a cada caminho.