Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Leandro de Oliveira Moreira

O Jogo da Subtração: Uma ferramenta para aulas de Matemática da Educação Básica

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientador: Prof. Nicolau Coração Saldanha

Rio de Janeiro

Setembro de 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Leandro de Oliveira Moreira

O Jogo da Subtração: Uma ferramenta para aulas de Matemática da Educação Básica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
Colégio Pedro II

Prof. Miguel Adriano Koiller Schnoor
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ralph Costa Teixeira
Instituto de Matemática – UFF

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 01 de setembro de 2014

Leandro de Oliveira Moreira

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em 2002. É Professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Moreira, Leandro de Oliveira

O jogo da subtração: uma ferramenta para aulas de matemática da educação básica / Leandro de Oliveira Moreira; orientador: Nicolau Coração Saldanha. – 2014.

37 f.; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Jogo combinatório. 3. Jogo da subtração. 4. Estratégia vencedora. 5. Sequência. 6. Ensino. I. Saldanha, Nicolau Coração. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A Deus, aos meus filhos Ana Maria, João e
Sofia, minha esposa, familiares, amigos e
colegas pelo incentivo e apoio constantes.

Agradecimentos

À todos os professores do curso, que foram tão importantes em minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta dissertação.

Ao meu orientador Nicolau C. Saldanha pelo apoio e compreensão.

Aos membros da comissão examinadora, em especial a Professora Liliana pela ajuda no início do trabalho.

Aos colegas de turma que me ajudaram bastante nessa jornada.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro por acreditar e contribuir com o desenvolvimento do Mestrado Profissional em Rede Nacional (Profmat) e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Moreira, Leandro de Oliveira; Saldanha, Nicolau Corção (Orientador). **O Jogo da Subtração: uma ferramenta para as aulas de Matemática da Educação Básica.** Rio de Janeiro, 2014. 37p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A presente dissertação foi desenvolvida com o objetivo de aproximar o aprendizado do aluno com o ensino da Matemática através de atividades lúdicas, de grande importância como ferramenta pedagógica. Os jogos matemáticos deixaram de ser um simples passatempo e ganharam espaço no cenário da Educação Matemática. Esse tipo de tarefa pode ser implementada para utilização dos seguintes indicativos: introduzir, aprofundar ou consolidar conteúdos a serem ministrados pelo professor. Dentre as atividades possíveis, dedicamo-nos ao jogo matemático denominado "Jogo da Subtração", classificado como combinatório e imparcial, em que é possível a busca pela estratégia vencedora que, nesse contexto, pode servir para os três indicativos citados anteriormente. Com a aplicação desse jogo, pretende-se confrontar experiências anteriores dos alunos com o raciocínio utilizado para encontrar uma forma de vencer sempre, através de um modelo matemático. Esta investigação foi realizada em turmas desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior, com um mínimo de intervenção do professor, objetivando verificar qual a etapa mais adequada para essa ferramenta e, com isso, contribuir para o desenvolvimento do aprendizado do aluno, auxiliando a prática pedagógica do docente.

Palavras-chave

Jogo Combinatório; Jogo da Subtração; Estratégia Vencedora; Sequência; Ensino.

Abstract

Moreira, Leandro de Oliveira; Saldanha, Nicolau Corção (Advisor). **Game of Subtraction: A tool for Mathematics classes in the elementary education.** Rio de Janeiro, 2014. 37p. MSc Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work was developed with the goal of getting student learning closer to math teaching through playful activities, of great importance as a pedagogical tool. Mathematical games are no longer a simple hobby and gained ground in the setting of Mathematics Education. This kind of task can be implemented to use the following indications: introducing further or consolidate content to be taught by the teacher. Among the possible activities, dedicated to the mathematical game called "Game of Subtraction", classified as combinatorial and impartial, where you can search for the winning strategy, which in this context can serve for the three aforementioned indications. With the application of this game is intended to confront the students' previous experiences with the reasoning used to find a way to win every time, using a mathematical model. This research was conducted in classrooms from primary education to higher education, with a minimum of teacher intervention in order to verify the most appropriate stage for this tool and thereby contribute to the development of student learning assisting the pedagogical practice of teaching.

Keywords

Combinatorial game; Subtraction game; Winning Strategy; Sequence; Education.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, os jogos no ensino da Matemática vêm ganhando um espaço maior e isso se dá pelo reconhecimento de sua importância na transmissão do conhecimento matemático. Além de ser uma atividade prazerosa para os alunos, são ferramenta importante nas salas de aula, visto que podem transcender o conteúdo a ser ministrado.

Ao planejar a aula, o professor, através dos objetivos a serem alcançados, seleciona o tipo de tarefa que pretende utilizar. Se ele escolher um jogo, irá adequá-lo às necessidades do seu planejamento.

Dentre os vários jogos que podem ser usados nas aulas de matemática, dedicaremos este trabalho ao Jogo da Subtração, que é um jogo matemático, com regras bem simples, que se desenvolve num intervalo de tempo pequeno e, com material acessível a qualquer realidade escolar. Ele é desenvolvido com apenas duas pessoas, jogando uma contra a outra, alternadamente, seguindo outras regras pré-estabelecidas.

De acordo com os objetivos que podem ser trabalhados, nos dedicamos à busca pela estratégia vencedora, que é a sequência de jogadas que pode permitir a um jogador ganhar sempre, deixando as duplas jogarem apenas vinte partidas e com um mínimo de intervenções do aplicador.

Na pesquisa, utilizamos as regras mais simples, em que se gera uma sequência de múltiplos de 4 como estratégia vencedora. E vale comentar que, ao mudar alguma regra desse jogo, a sequência vencedora pode se tornar bastante complexa, de forma que o padrão não seja algo tão óbvio.

O trabalho foi desenvolvido com alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e do Ensino Superior. Sendo assim, foi possível observar a pertinência desse tipo de trabalho na educação básica e de que forma é possível trabalhar tal tema de maneira que o professor aproveite o máximo possível dessa atividade.

1
Os Jogos no Ensino de Matemática

A palavra jogo, que vem do latim *"jocus"*, segundo dicionário (Soares Amora, 2010), significa exercício ou passatempo recreativo; diversão; coleção ou série de coisas emparelhadas ou que forma um todo; entre outras. Mas "*ludus*", também do latim, que significa lúdico (relativo a jogos; engraçado), também está ligado ao tipo de atividade que nos dedicamos.

A História da Matemática, conforme Silva (2004), mostra a importância dos jogos, responsáveis, inclusive, pela criação de alguns ramos da matemática.

Os jogos, no ensino da matemática, têm o poder de fazer com que os alunos gostem da disciplina e mais, enriquece o pensamento lógico, bem como o raciocínio. Atividades dessa natureza devem fazer parte de qualquer currículo da Educação Básica.

Quando um professor propõe à turma uma atividade lúdica pode incluir, dentro desse trabalho, conceitos bem como tarefas que favorecem o desenvolvimento do pensamento matemático.

A importância dos jogos é reconhecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), revelando que, para o desenvolvimento no ensino da Matemática, os jogos são um caminho a ser seguido. "*Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resoluções e busca de soluções".*

Mas esse documento ainda vai além, dizendo:

> "*Nos jogos de estratégias (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático".*

A relevância dos jogos é ainda observada nas discussões de currículos, organizadas pelas grandes redes de ensino (Municipal, Estadual e Federal), nas quais o jogo também aparece como uma ferramenta no ensino de matemática. Nesses documentos, o jogo ganha destaque nas expectativas de aprendizagem, uma vez que é parte integrante desses materiais.

A utilização do jogo no ensino deve ser, porém, cuidadosa, pois existe o risco de se tornar um mero trabalho de manipulação de peças. Para que isso não ocorra, o professor deverá estabelecer critérios mínimos na hora da escolha da atividade, que deverá ser desafiadora e interessante, permitindo a participação direta dos jogadores envolvidos, possibilitando, assim, a reflexão de cada jogada até que se dê o final do jogo.

O momento de jogar deve ser acompanhado de reflexões que permeiam cada jogada no sentido de aperfeiçoar o resultado, buscando a vitória. Isso acontece quando analisamos os erros e os acertos cometidos durante cada passo experimentado pelos jogadores, o que, de forma organizada, pode levar à estratégia vencedora.

A busca pela estratégia vencedora, de início, parece óbvia, uma vez que todos que estão jogando desejam ser vitoriosos. Mas como se trata, também, de uma diversão, é possível o "jogar por jogar", o que não tem muito significado para os jogos de estratégias. A busca pela jogada perfeita é a razão da existência de alguns jogos dessa natureza, não somente para ganhar, mas, no mínimo, garantir um resultado de empate. No início, o ganhar ou perder, nesse sentido, ocupa um lugar secundário, pois o que está em jogo é a descoberta de uma ou mais jogadas que possam garantir a vitória sempre.

No ato de buscar essa estratégia, é que aparecem alguns conhecimentos que já possuímos, para resolver problemas os mecanismos ou raciocínios utilizados anteriormente. Se a experiência anterior não for suficiente para concluir essa estratégia, provavelmente poderá surgir um novo caminho a ser experimentado que, certamente, terá um papel importante na resolução de novos problemas que surgirão na vida escolar.

Vários trabalhos com jogos nas aulas de matemática já foram realizados, e os resultados são animadores. Os alunos gostam da proposta, uma vez que quebra a rotina das aulas tradicionais da disciplina. Ele interage com um ou mais colegas, e o professor consegue trabalhar conceitos importantes de forma lúdica. Algumas desvantagens também são apresentadas por Grando (2004), a saber: o tempo gasto para organização da atividade em sala de aula; alguns alunos, ainda que poucos, não querem jogar; a turma sempre pode querer jogar antes da introdução de algum conteúdo. Entretanto, o uso de tais recursos metodológicos acaba sendo vantajoso.

Além de desafiadora, a atividade com jogos deve ser objetiva, no sentido do conteúdo que a contemple. O raciocínio lógico, o pensamento matemático e/ou os cálculos devem estar em consonância com o tópico que o docente pretende tratar. Isso é que faz o diferencial, o sucesso da atividade como recurso metodológico para a prática pedagógica.

Ao planejar uma aula com jogo, é fundamental que o professor tenha em mente o objetivo do jogo, decidindo se ela será para introduzir algum conceito, ou para praticar determinadas operações ou conceitos, ou para desenvolver o pensamento matemático.

Diversos são os jogos que podem ser trabalhados com o conteúdo da matemática, uns que exploram diretamente o cálculo, outros que exploram o raciocínio lógico, outros o cálculo e o raciocínio.

Por outro lado, existem jogos com uma estrutura matemática fantástica, em que o estudo de suas possibilidades de jogadas revela uma matemática rica e muito proveitosa para o ensino.

Nessa seara de jogos que envolvem a matemática, existem os jogos matemáticos que possuem uma estrutura a ser observada para que se chegue à jogada mais adequada, não sendo suficiente o mero cálculo.

Dentre os tipos de jogos matemáticos, uma excelente forma de introduzir essas atividades em sala de aula é propor a descoberta de uma estratégia vencedora, a partir da apresentação de determinado tipo de jogo. Tal busca revela outra atividade – o desenvolvimento do raciocínio lógico - que se encontra implícita. Os jogos de estratégia existem, basicamente, com esse objetivo, e a análise do jogo para chegar a esse esquema é um dos pontos importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático.

De todos os jogos de estratégias que são aplicados em sala de aula, destacaremos o jogo da subtração, para o qual já existem pesquisas com suas aplicações, veja Grando (2004) e Carvalho (2013), mas cujos registros mostram várias intervenções do professor, ou seja, para que os participantes cheguem a uma estratégia vencedora, o aplicador da atividade conduz o pensamento dos participantes com esse objetivo.

O jogo será aplicado a alunos da Educação Básica. Mas será que, com um mínimo de dicas e um número limitado de partidas, os alunos serão capazes de encontrar essa estratégia com facilidade?

Neste trabalho trataremos desse jogo, no qual podem ser trabalhados, também, o algoritmo da divisão, os múltiplos de 4 e o pensamento matemático. Porém, o objetivo é verificar se é possível explorar ao máximo o jogo, com o mínimo de intervenções e, até mesmo, verificar a adequação da atividade na Educação Básica.

2
O Jogo de Subtração

Jogos de subtração, no entendimento de Carvalho (2013), são aqueles que envolvem um conjunto finito de números inteiros positivos, chamado também de conjunto subtração. Joga-se, geralmente, duas pessoas, uma contra outra, removendo quantidades de objetos alternadamente de uma pilha, com certa quantidade de objetos pré-determinada, de acordo com o jogo em questão. O jogo do NIM é um exemplo típico.

O NIM não tem sua origem definida. Acredita-se que surgiu na China e que foi um dos primeiros jogos a ser estudado matematicamente. Ele se baseia em agrupar várias peças em montes. Cada jogada consiste em retirar algumas (ou todas) peças de um dos montes. Perde o jogador que retirar a última peça, ou também ganha quem retirar a última peça. Isso varia de acordo com as versões existentes. Os números de peças e de montes também podem variar, sendo a distribuição mais comum constituída por 15 peças em montes de 3, 5 e 7 peças.

A atividade que será tratada neste trabalho é o jogo de subtração numa versão simples, em que serão usadas apenas 17 peças em apenas uma pilha, obedecendo as seguintes regras:

- Apenas dois jogadores participam (jogador A e jogador B);
- Escolhendo um jogador para iniciar a partida, este não pode iniciar a partida seguinte;
- Os jogadores jogam alternadamente;
- Uma jogada consiste em retirar uma, duas ou três peças da pilha;
- O jogador que retirar a última, ou últimas peças, é o vencedor.

Com essas características, esse jogo pode ser classificado como combinatório, um jogo sequencial com informação completa, isto é, os participantes jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Por informação completa, entende-se que os elementos sorte não existe e não pode haver cartas escondidas ou algo do gênero, veja Teixeira (2009).

Além de combinatório, também é um jogo imparcial, uma vez que o acesso à jogada é igual para os dois jogadores, ou seja, as jogadas possíveis não dependem de quem é vez de jogar.

Esse jogo também é tratado em obras como: *Winning Ways for your Mathematical Plays*, de Berlekamp, Conway e Guy ; *On numbers and games*, de Conway, e ainda *Jogos Matemáticos Jogos Abstratos*, de João Pedro Neto e Jorge Nuno Silva.

A matemática envolvida nele é simples, mas importante para o desenvolvimento do pensamento matemático. A estratégia vencedora, acredita-se, pode ser facilmente observada, quando a análise é feita do final para o início do jogo (de trás para frente). Como relatado, é um jogo que pode ser fácil de aplicar, com regras simples, um número finito de jogadas, cujo tempo de jogo pode ser bem pequeno.

Dessa forma, quem retirou as últimas peças venceu a partida, isso porque foi deixado para ele uma, duas ou três peças. Isso implica que o vencedor deixou para o seu oponente uma quantidade maior que três peças, caso contrário, ele não ganharia. Mas que quantidade foi essa que lhe garantiu a vitória? Vejamos:

• Se ele deixa quatro peças, seu oponente, retirando o que reza as regras do jogo, poderá deixar uma, duas ou três peças, e todas as possibilidades o conduziriam a vitória;

• Se ele deixar cinco peças, o oponente poderá deixar quatro, três ou duas, o que não garantiria a vitória para ele, visto que o oponente poderia deixar apenas quatro e, de acordo com o passo anterior, o oponente ganharia.

• Se deixar seis, o oponente poderá deixar cinco, quatro ou três, o que novamente não garantiria a vitória, pois o oponente poderá deixar quatro;

• Por último, se ele deixar sete, o oponente poderá deixar seis, cinco ou quatro, o que novamente garantiria a vitória do oponente.

Logo, quem deixar quatro, na antepenúltima jogada, vence. Mas, para garantir as quatro peças na antepenúltima jogada, faz-se necessário deixar oito para a vez de seu oponente jogar. E a análise é similar, pois, deixando oito, seu oponente só poderá deixar sete, seis ou cinco, o que garante o quatro na antepenúltima jogada. E, para garantir o oito, deve-se antes deixar doze, pelo mesmo motivo e, assim, garantir o oito. Para deixar o doze, antes se deve deixar dezesseis. Entretanto, só deixa dezesseis quem inicia o jogo. Então, ganha o jogo quem começa a partida e retira apenas uma peça e, daí por diante, deixa quantidades representadas por um múltiplo de quarto para o seu oponente.

Numa outra perspectiva, seja **N** o número de peças do jogo, **n** a quantidade máxima de peças que podem ser retiradas por jogada, **n + 1**, a quantidade de peças que deve ter cada grupo formado, com **n + 1 < N** e **K**, a quantidade de blocos formados com **n + 1** peças, e **r,** a quantidade que sobra de peças, e **r < n + 1**. Dessa forma, é facilmente montado o algoritmo da divisão, pois **N = K (n + 1) + r.** No caso do jogo com apenas 17 peças, temos que: 17 = 4 (3+1) + 1. Sendo assim, é visível que o jogador que iniciar o jogo deve retirar apenas uma peça e, a partir daí, basta complementar a jogada, retirando a quantidade que complete o valor de cada bloco (4 peças).

Utilizando o algoritmo da divisão, neste caso, segundo Grando (2004) chamado de estratégia máxima, em que, a partir dele, independente do mínimo de peças, é possível verificar o resto da divisão, determinando, assim, a quantidade de peças que pode ser retirada, se possível, no início do jogo para garantir a vitória.

O resto dessa divisão, utilizando o quociente **n + 1,** poderá ser **n, n – 1** e **n – 2**. E este que define a quantidade de peças a ser retirada no início do jogo.

Sendo assim, vence o jogo quem começa a partida retirando apenas uma peça e deixando quantidades representadas por múltiplos de quatro.

Como foi dito anteriormente, o jogo da subtração pode ser utilizado de várias maneiras, bastando mudar a quantidade de peças ou a forma de retirada de cada jogador, que a atividade apresenta uma nova estratégia vencedora. No caso da retirada de uma quantidade positiva menor que 4 peças, a estratégia vencedora formada pelas posições em que o jogador domina o jogo, tem-se uma sequência de múltiplos de 4. Se mudarmos as regras da retirada de peças, teremos outra situação, não tão simples como a anterior.

Vejamos um exemplo: considere 17 feijões e as regras do jogo anterior, mas, se ao invés de se retirar um, dois ou três feijões, forem retiradas quantidades positivas que represente um quadrado perfeito, ainda que parecido, sua análise não se esbarra com a anterior, a estratégia vencedora é totalmente diferente.

Para construir um pequeno esquema desse jogo, vamos chamar de V a posição segura para vencer, ou seja, a posição em que o jogador deve estar para assegurar a vitória, e de N, a posição não segura, uma posição que não garanta a vitória ou, ainda, que leve à derrota, e é nesta posição que um jogador deseja deixar o seu oponente. Logo, a estratégia pode ser: quem deixar uma quantidade de feijão classificada como N para o seu oponente ganha o jogo, pois, de uma posição N, os movimentos possíveis levam para uma posição V. E, de uma posição V, pode-se vencer o jogo ou deixar para o oponente uma posição N.

Para classificar os 17 valores possíveis que um jogador poderá encontrar, podemos utilizar a seguinte regra:

a) Um número **n** será classificado como N se, quando subtrair o quadrado perfeito, somente sobrar um valor classificado como V.

b) Um número **n** será classificado como V se, ao subtrair um quadrado perfeito, for encontrado pelo menos um valor classificado como N.

Sendo assim, analisando o jogo de trás para frente, podemos montar uma tabela, com suas devidas classificações:

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

O zero é N por definição (quem recebe zero perde).

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
																	N

O 1 é V, pois quem recebe 1 feijão só pode retirar 1 feijão. Assim, quem recebe 1 feijão ganha.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
																V	N

O 2 é N, visto que a única jogada permitida, quando se tem 2 feijões, é a retirada de apenas um, deixando 1 na mesa. Mas, como 1 é V, quem recebe 2 perde.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
															N	V	N

O 3 é V, uma vez que só pode retirar um feijão nessa posição e tal retirada deixa 2 para o oponente. E, como 2 é V, quem recebe 3 perde.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
														V	N	V	N

O 4 também é V, pois quem recebe 4 pode deixar zero, pois 4 é um quadrado perfeito. Sendo assim, quem recebe 4 ganha.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
													V	V	N	V	N

O 5 é N. As jogadas permitidas para quem recebe 5 são retirar um ou retirar quatro. Se retirar um, deixará 4 que é V, e se retirar quatro deixará 1 que também é V. Logo, quem recebe 5 perde.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
												N	V	V	N	V	N

O 6 é V, pois, com essa quantidade, só poderá ser retirado um ou quatro feijões. Na retirada de um, deixará 5 e, se retirar quatro, deixará 2. Como quem recebe 5 ou 2 perde o jogo, pois ambos são N, quem recebe 6 ganha.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
											V	N	V	V	N	V	N

O 7 é N, quem pega 7 só poderá deixar 6 ou 3 (as únicas jogadas permitidas), mas tanto 6 como 3 são V, quem os recebe, ganha. Sendo assim, quem recebe 7 perde.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
										N	V	N	V	V	N	V	N

Com 8 feijões na mesa, as únicas retiradas ainda são de um ou quatro feijões. Na retirada de um feijão, deixará 7 que é N, e quem recebe N perde. Mas se, ainda de 8, retirar quatro, ficarão 4 feijões, e 4 é V.

Ocorre que, só fará a retirada de quatro feijões, quando receber 8, o jogador distraído, pois o que restará (4 feijões) é quadrado perfeito, ou seja, daria a vitória para o oponente. Logo, a única jogada segura seria retirar apenas 1, para deixar o oponente com 7, já que 7 é N. De outra forma, seguindo as relações apresentadas, com 8 é possível subtrair um quadrado perfeito positivo e encontrar, pelo menos, uma posição N. Logo, 8 é V, sendo assim, quem pegar 8 ganha.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
									V	N	V	N	V	V	N	V	N

Se se continuar esse raciocínio, ao final dos 17 feijões, montaremos a seguinte tabela, em que as quantidades representadas por N são as que devem ser deixadas pelo jogador que deseja ganhar:

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
N	V	N	V	V	N	V	N	V	V	N	V	N	V	V	N	V	N

Na tabela montada, os valores que representam a posição N formam a seguinte sequência: 0, 2, 5, 7, 10, 12, 15 e 17. Observando essa sequência e tentando encontrar um padrão, percebemos que esses valores podem ser expressos pela forma 5n e 5n-3.

No jogo com retiradas positivas menores que 4 peças, a sequência montada será formada por múltiplos de quatro, independente da quantidade total de peças no jogo. Já no caso de retiradas que represente um quadrado perfeito, aumentando o número de peças (quantidade acima de 24), será que a sequência montada manteria o padrão de 5n ou 5n-3?

Primeiro, vamos imaginar o jogo com 25 feijões. Como 25 é um quadrado perfeito, então 25 é V e não N, o que já derruba esse padrão. Ocorre que, se aumentar ainda mais o número de peças, a sequência cresce formando uma sequência nem um pouco óbvia. Vejamos os vinte primeiros valores dessa sequência: (0, 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 34, 39, 44, 52, 57, 62, 65, 67, 72, 85), a continuação pode ser encontrada em *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, que mostra esse conjunto formado exatamente pelas regras citadas.

Esse conjunto numérico, gerado pelas posições N desse jogo, foi estudado pelo matemático Húngaro András Sarkozy, que, trabalhando com essa sequência, não mostra um padrão, mas faz uma demonstração de que a distância entre dois valores consecutivos dessa sequência ao passo que ela caminha para infinito, ao infinito.

Vale ressaltar que, utilizando ainda essa regra com os 17 feijões, se os oponentes conhecem a estratégia vencedora, perde aquele que inicia o jogo, uma vez que 17 é N.

3
Montando a Pesquisa

Existem trabalhos com o jogo da subtração[1] utilizando 17 grãos de feijão e seguindo as regras que foram apresentadas, mas focando o algoritmo da divisão, objetivando auxiliar a prática pedagógica desse conteúdo. As pesquisas relatam o sucesso de tal ideia. Ocorre que as pesquisas foram realizadas com um grupo pequeno de alunos e, segundo as descrições, para chegar à estratégia vencedora, o pesquisador teve de fazer várias intervenções, na intenção da formulação dessa tese por parte dos alunos. E ainda que o número de partidas tenha sido pequeno, isso se deve ao objetivo de cada um deles.

O que se pretende com esse trabalho é verificar se é possível que os alunos construam a estratégia vencedora com o mínimo de intervenção, apenas jogando e observando cada jogada sua e de seu oponente, além de observar em que segmento da Educação Básica esse tipo de trabalho pode ter um melhor aproveitamento.

3.1
Observação Realizada para Montar a Pesquisa

O jogo foi aplicado para 4 duplas como um trabalho experimental para delinear a pesquisa. As duplas foram formadas por alunos de turmas diferentes, para evitar o conhecimento prévio de alguma situação do jogo.

Entre as duplas formadas, duas têm idades entre 11 e 12 anos e estão cursando o 6º ano do Ensino Fundamental; uma é composta por alunas de 13 anos, do 7º ano do fundamental e outra apresenta idade acima de 30 anos, pois são alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Os alunos desconheciam o jogo e tiveram um primeiro contato com as regras e com o material somente no momento da atividade. Por meio das instruções, foi-lhes revelado que o jogo se tratava de parte de uma pesquisa e, por isso o mesmo estava sendo cronometrado e as jogadas anotadas.

[1] CARVALHO, 2013.

Para todas as duplas foram propostas vinte partidas. As três primeiras duplas realizaram a atividade no dia 29 de abril. A primeira dupla composta de alunos do 7º ano jogou durante 17 minutos. A avaliação da atividade foi positiva, tendo em vista que houve interesse e participação dos alunos. As duplas de alunos observaram a partir da segunda jogada a hipótese de que aquele que deixa 4 feijões ganha o jogo. Entretanto, levaram mais 5 partidas para confirmar essa estratégia. Na 11ª, elas levantaram outra hipótese, a de que quem começa ganha o jogo. Porém, esta não avançou. Terminado o tempo, a dupla solicitou jogar mais algumas partidas, o que ocorreu num total de 7 vezes. Finalmente, concluíram que o jogo é ganho por aquele que deixasse 8 feijões. Tal conclusão contou com minha interferência por meio do seguinte questionamento: se quem deixa 4 feijões ganha o jogo, o que pode ser feito para garantir que um jogador deixe os 4 feijões?

A segunda dupla com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental jogou em 11 minutos e, na 11º partida, perceberam que quem deixava 4 era o vencedor. Após esse momento, não avançaram. Nessa dupla, não foi realizada nenhuma intervenção.

A terceira dupla formada por alunos de 12 anos, também do 6º ano do Ensino Fundamental, jogou em 18 minutos e percebeu a estratégia de deixar 4 feijões logo na segunda jogada e, após mais 7 jogadas, já começaram a perceber as jogadas erradas antes de restarem os 4 feijões. Aparentemente, se houvesse mais tempo ou intervenção, a dupla chegaria à estratégia esperada. No entanto isso não foi possível devido ao horário de saída da escola.

No dia 2 de maio, a última dupla, formada por alunos da EJA, jogou 13 minutos. Era evidente que tinham percebido a questão de finalizar com os 4 feijões, mas não avançaram a partir daí. Um deles levantou a hipótese de terem múltiplos ou divisores envolvidos na tarefa, mas não conseguiu fazer a conexão entre eles e o jogo. Arriscou a estratégia sem, entretanto, aplicá-la.

Solicitei às duplas participantes que jogassem em casa e apresentassem alguma novidade na semana seguinte, com a condição de que não houvesse consulta a nenhuma fonte de pesquisa, que se limitassem a jogar e perceber o que aconteceria. Na semana seguinte, apenas três duplas tentaram jogar em casa com alguém (irmão, amigo, pai e mãe), mas nenhuma dupla chegou a concluir a estratégia do jogo.

Após analisar os resultados obtidos nesse desenho experimental, aparentemente, o melhor procedimento a ser adotado será a aplicação da atividade com intervenção através de um conjunto de dicas previamente estabelecidas num papel. As primeiras podem ser dadas no início do jogo, e as demais, após um total de 7 partidas, considerando que a percepção da estratégia foi observada em geral antes desse momento. As dicas podem são as seguintes:

1- Observe, atentamente, a quantidade de feijões que ficam na mesa a cada retirada sua e de seu oponente, tentando descobrir em que momento o jogo estará perdido ou ganho.

2- Tente descobrir quais configurações levam à vitória, pensando, primeiramente, no final da partida.

Após a leitura das dicas, considero importante uma pausa para tirar possíveis dúvidas referentes aos pequenos textos.

O jogo terá 20 partidas, pois acredito que, com o passar do tempo, exista uma perda de interesse pelo jogo.

A observação e marcação das jogadas que levam à derrota, ou que garantem a vitória, serão marcadas em cartões conforme modelo em anexo (1).

Na primeira coluna, será marcada jogada errada (JE) ou a jogada segura (JS) do jogador **A**. E vale ressaltar que **JS** será marcada a partir da observação de que o jogador sabe que aquela jogada representa um passo para a vitória e não apenas uma mera jogada sem reflexão. Na segunda coluna, será registrada a quantidade de feijão retirada, em cada jogada, pelo jogador **A**. Na coluna **B**, a marcação das jogadas do jogador **B** e, na última coluna, **JE** e **JS** do jogador **B**.

O jogo será aplicado a 50 duplas do Ensino Fundamental, nos dois segmentos, 50 alunos do Ensino Médio e apenas 5 duplas do Ensino Superior, em cursos nos quais os alunos tenham disciplinas de Matemática, como Cálculo.

3.2
Aplicação

Entre os meses de maio e junho, foi realizada essa pesquisa com os alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior. As duplas foram retiradas de suas turmas e conduzidas para um ambiente reservado, onde receberam as regras do jogo e realizaram a atividade.

Após a realização das partidas, as duplas emitiram suas opiniões sobre a atividade e a dificuldade experimentada para encontrar a estratégia vencedora.

Regras foram bem interpretadas em todas as duplas dos diferentes segmentos estudados, a primeira partida de cada dupla ocorreu sem problemas significantes.

O material utilizado foram 17 feijões, uma folha para anotação das jogadas e um folheto com as seguintes dicas, que foram entregues aos participantes após a 7ª partida:

1- Observe atentamente a quantidade de feijões que ficam na mesa a cada retirada sua e do seu oponente, tentando descobrir em que momento o jogo está perdido ou está ganho.

2- Tente descobrir quais configurações levam à vitória pensando, primeiramente, no final da partida.

Os grupos foram formados por alunos que manifestaram o interesse em participar. O procedimento adotado foi a conversa com a turma, explicando que tal atividade era um jogo de estratégia e que fazia parte de uma pesquisa. Foi revelado que seria importante que nenhum dos interessados em participar tivesse conhecimento da atividade, ou seja, que desconhecessem totalmente o jogo. Em seguida, retiravam-se as duplas, uma de cada vez, para jogar num ambiente em que os outros não pudessem observar.

Ao apresentar as regras do jogo, mais uma vez, era perguntado se o aluno realmente não conhecia tal atividade, a fim de garantir que a reflexão do jogo acontecesse dentro do tempo utilizado para as vinte partidas, para se ter a certeza de que o aluno não iniciou o jogo com uma estratégia já utilizada anteriormente.

Durante a aplicação da atividade, as duplas jogaram focando a descoberta da estratégia vencedora, e a cada descoberta eles não hesitavam em comentar, mesmo sabendo que seu oponente poderia tirar vantagem da informação revelada. Nas 10 primeiras duplas, tentei interferir, dizendo que o comentário poderia prejudicar o resultado sem, entretanto, obter sucesso. Logo, eles jogaram tentando encontrar a estratégia em conjunto, a ponto de não ser identificado qual foi o aluno responsável pela descoberta.

O uso das fichas para a anotação das jogadas foi abandonado durante a pesquisa. As jogadas que levavam a vitória (JS) e as jogadas erradas (JE) se confundiam durante as partidas, por exemplo: um aluno, numa primeira partida, começa retirando 1 feijão, o que deveria ser marcado com JS; o seu oponente retira 2 feijões, essa jogada não deveria ser marcada, pois o primeiro jogador está com a vitória garantida; mas, em seguida, o primeiro jogador retira novamente 1 feijão (JE), o que mostraria que ele ainda não concluiu a estratégia vencedora. Mas, como eles comentavam durante as partidas, esse recurso acabou não tendo tanta importância e, com isso, a marcação das jogadas nas fichas deixaram de fazer sentido.

4
Resultado

O primeiro grupo da Educação Básica a ser pesquisado foi o do Ensino Médio, do Instituto de Educação Rangel Pestana, em Nova Iguaçu. Esse grupo foi formado por 50 duplas, mas diferente do que foi previsto, foram 35 duplas do Segundo Ano, 5 duplas do Primeiro Ano e 10 duplas do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Na aplicação do jogo, as regras foram passadas de início, as duplas fizeram uma partida de teste para confirmar as regras. Após esse momento, começaram o jogo e, antes da oitava partida, foram entregues as duas dicas para ajudar na estratégia. A partir daí não houve mais intervenções.

Os alunos do Segundo Ano foram os primeiros a jogar, cada dupla fez as 20 partidas e, no final, comentaram o jogo.

Primeiramente, eles ficaram ansiosos e acreditando que seria algo que tivesse uma “pegadinha”, algo que fosse bem fácil perceber e que não teria nada a ver com contas e, sim, com uma simples jogada para definir o jogo inteiro. Alguns alunos não se sentiram muito à vontade, acreditando que a atividade fosse bem trabalhosa ou de difícil compreensão. Estes últimos, quando fizeram a jogada de teste, notaram que a atividade, de início, era bem simples e, daí, perderam o medo e jogaram com vontade.

Desse grupo, ninguém conseguiu encontrar a estratégia vencedora. Das 35 duplas, 31 concluíram que quem deixa quatro feijões ganha o jogo, isso até a terceira partida. As outras quatro duplas concluíram isso após a sexta partida. Após a terceira partida, o avanço foi muito pequeno. Diante dessa observação, as duplas partiram à busca de um meio para deixar quatro feijões aos seus oponentes. O máximo que chegaram a concluir da estratégia foi o seguinte: “se, na minha vez de jogar, tiver 6 ou 7 feijões, eu ganho. Se tiver 6, eu retiro 2, daí ficam quatro e, se tiver 7, eu retiro 3, também ficam 4, e eu ganho o jogo”. Além disso, com as dicas recebidas no papel, começaram a observar as peças retiradas pelo oponente, e tentaram alguma relação com a vitória, mas ninguém conseguiu êxito nesse caminho.

Outra hipótese que apareceu com frequência foi a relação entre as quantidades pares e ímpares. Alguns disseram que, se o oponente tirasse um valor par de feijões, ele deveria tirar um valor ímpar e, assim, apareceria a quantidade de 6 ou 7 feijões com facilidade, mas ninguém confirmou. Talvez se ocorresse um número maior de partidas, essa ideia poderia ser derrubada.

Durante o jogo, e até o fim, não foi feito nenhum questionamento em torno de quem começar o jogo ganha a partida. As duplas terminaram as partidas acreditando que, ao começarem o jogo, ambos teriam as mesmas chances de vitória.

O grupo formado por alunos do Primeiro Ano (cinco duplas) observou, também com facilidade, que quem deixava quatro feijões para o seu oponente vencia o jogo, isso antes da quarta jogada. A ideia de que quem recebe 6 ou 7 feijões ganha o jogo também foi levantada, com comentários parecidos com os do grupo anterior. Dessas cinco duplas, apenas um aluno conseguiu observar que o ideal era deixar 8 feijões para o oponente, pois, se isso acontecesse, ele ganharia o jogo. Mas ao final da atividade, ele não avançou no raciocínio. A questão de quem inicia o jogo ganha também não foi observada, apenas um aluno se dedicou a esse ponto, mas ele cogitou que quem começa o jogo perde, porque observou que, na maioria das vezes em que ele começou, perdeu.

O grupo com dez duplas, formado pelos alunos do terceiro ano do ensino médio, fez observações bem parecidas com as anteriores. Nenhum aluno concluiu que, se deixasse oito feijões para o seu oponente, ganharia o jogo. A maior diferença foi o tempo gasto para jogar as 20 partidas. Os grupos anteriores gastaram algo em torno de 25 minutos. Já este último ultrapassou os 35 minutos para jogar as 20 partidas.

A ideia de analisar o jogo de trás para frente não surgiu em nenhum momento, as duplas ficaram presas a uma análise convencional, do início para o fim.

De forma geral, as duplas do Ensino Médio gostaram do jogo e ficaram ansiosas para saber qual seria a estratégia que levaria à vitória, mas não se consideraram capazes de decifrá-la. Disseram que este jogo tem uma relação muito forte com a Matemática e que somente um aluno gênio conseguiria resolver esse problema, desenvolver a estratégia vencedora.

O grupo seguinte de trabalhado foi formado pelo segundo segmento do Ensino Fundamental (Anos Finais), com alunos do sexto, sétimo e oitavo ano, de duas escolas públicas do município de Nilópolis, Escola Municipal Prof. José D'Alessandro e a Escola Municipal Dr. Nilo Peçanha. Num total de 46 duplas, em que 7 foram do sexto, 25 do sétimo e 14 do oitavo ano.

Nesse grupo, a estratégia vencedora também não foi observada por nenhum aluno, o máximo que chegaram foi à conclusão de que quem deixa quatro feijões ganha o jogo, mas isso após a 7ª partida, em média. E também apareceu a ideia de quem joga com 6 ou 7 feijões ganha o jogo, por ser possível deixar os quatro feijões para o oponente.

Algumas ideias foram lançadas pelos alunos, mas a maioria sem grande importância para o nosso objetivo, das quais eu destaco as duas a seguir.

A primeira foi a de que existem duas sequências importantes nesse jogo. A primeira é: se quem começar o jogo tirar 3 feijões, o oponente também retirará 3, o outro, novamente, retira 3, e daí por diante, até sobrarem 2 feijões. Assim, o oponente ganha, retirando esses dois feijões, formando, dessa forma, uma sequência que eles chamaram de 3, 3, 3, 3, 3, 2. E a outra sequência a da vitória, seria 2, 3, 3, 3, 3, 3. Sendo assim, quem começasse o jogo só ganharia se escolhesse a segunda sequência. Outra quantidade a ser retirada atrapalharia o caminho da vitória, ou seja, as retiradas aconteceriam até ficar na mesa 5, 6 ou 7 feijões e, daí, aconteceria a vitória para quem pegar o jogo nessa posição.

A segunda ideia lançada foi que bastava retirar a mesma quantidade do seu oponente até chegar a 5, 6 ou 7. Se um jogador A começar o jogo retirando 3, o oponente B retira 3; se A, jogando novamente, retirar 2, B também retira 2; se A, agora retirar 1, basta que B retire 2 e, então, ficam 4 feijões, e B ganha o jogo; e se A, em vez de 1, retirar 2 feijões, ficarão 5; assim, basta B retirar 1 e deixar quatro para A. Mas isso só funcionaria se A não tivesse a ideia de retirar 3. Dessa forma, quem iniciasse o jogo perderia.

O tempo gasto pelas duplas dessa etapa para realizar as 20 partidas foi em média 15 minutos, porque, em algumas partidas, era perceptível que a atenção, ora de um jogador, ora da dupla, não estava voltada para o jogo, estavam jogando por jogar, apenas respeitando as regras.

Todos os alunos que participaram da atividade gostaram bastante. Concordaram que seria muito legal esse tipo de atividade nas aulas de Matemática, e alguns afirmaram que a estratégia vencedora seria possível de se descobrir, desde que tirassem um número maior de partidas.

Não houve diferenças significativas nos resultados entre os alunos desses três anos de escolaridade, uma vez que nenhum deles chegou próximo ao objetivo.

O próximo grupo foi o do primeiro segmento do Ensino Fundamental, formado por uma turma do quarto ano e outra do quinto ano. Dessas duas turmas, foram selecionadas apenas 7 duplas, três duplas do quinto ano e quatro do quarto ano.

A maior característica desse grupo foi o tempo gasto, eles gastaram em média 40 minutos para desenvolver a atividade. As primeiras partidas demoraram muito mais que as últimas. Isso foi observado em todas as duplas. Embora as regras tenham sido assimiladas facilmente, eles, de início, não se sentiram seguros ao jogar as primeiras partidas, somente após a 9ª ou 10ª partida, sentiram-se à vontade.

Duas duplas do quarto ano levaram aproximadamente 14 partidas para descobrir que quem deixa quatro feijões ganha o jogo e, ainda assim, nas partidas posteriores, esqueciam a descoberta. As outras duas não chegaram a expressar esse entendimento.

Respondendo sobre a possibilidade da existência de uma estratégia vencedora, três alunos afirmaram não ser possível ganhar sempre, três disseram que não sabiam se era possível, um disse que a estratégia é ser mais esperto do que o oponente e o último disse que venceria o jogador que fosse bom em Matemática.

As três duplas do quinto ano tiveram a concentração um pouco melhor que as duplas do quarto. Uma dupla não conseguiu concluir a estratégia dos 4 últimos feijões e jogaram sem concentração para descoberta da estratégia vencedora. Nem mesmo a entrega das dicas, após a 7ª jogada, fez com que eles desenvolvessem a atenção para a atividade. Das outras duas duplas, três alunos pediram folhas para fazer cálculos. As contas não passavam de subtrações para verificar o número de feijões que sobravam na mesa. Então, a cada jogada, eles faziam as subtrações e, em seguida, verificavam que era a mesma quantidade que estava na mesa. Dois deles deixaram de fazer os cálculos, observando que não ajudaria muito, e o outro fez até o final da partida.

Na opinião deles, é possível encontrar uma estratégia, mas tem que treinar muito, assim como no jogo da velha. Um deles respondeu que havia um “macete”, mas ele ainda não o conhecia. Ainda afirmou que era possível encontrar na internet.

A pesquisa, com os alunos do curso de graduação, foi feita com apenas 5 duplas. Duas duplas do CEFET-Nova Iguaçu, do curso de Engenharia de Automação, sendo uma do 2º período e a outra do 5º período. A terceira dupla foi do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). A quarta dupla foi do 7º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Nova Iguaçu (UNIG), e a última foi do 4º ano do Instituto Militar de Engenharia (IME) .

Nessa etapa, as duplas conversaram bastante, muito mais que os alunos da Educação Básica. Ficou evidente que a busca pela estratégia era um trabalho conjunto, tudo que era percebido por um, imediatamente, era exposto ao outro. O tempo de jogo de cada dupla durou em média uma hora e meia. A atenção no objetivo era claro, com o foco maior que os das etapas anteriores. Uma característica forte dessa etapa foi o tempo gasto para jogar a primeira partida, que foi muito superior que qualquer uma das posteriores.

A dupla do 1º período do CEFET não concluiu a estratégia vencedora, ficaram apenas na estratégia dos 12, ou seja, quem deixar 12 para o oponente vence. De início, na primeira partida, eles concluíram que quem deixava os quatro feijões venceria o jogo. Já na quarta partida, disseram que quem pegasse o jogo com 5, 6 ou 7 feijões venceria. Após a 6ª partida, perceberam que quem deixasse 8 venceria o jogo e, na 15ª partida, concluíram que quem deixasse 12 venceria. Em seguida, totalizaram as 20 partidas e não avançaram mais. O comentário final foi: “Tem de pensar bastante para deixar 12 para o adversário. Antes disso, nada pode ser feito. Quem começa o jogo tem a mesma chance que o oponente”.

A segunda dupla do CEFET (5º período) conseguiu encontrar a estratégia vencedora. Logo na primeira partida, verificaram a questão de deixar os 4 feijões. Na segunda partida levantaram a hipótese de quem fica com 5, 6 ou 7 feijões ganha o jogo. Na oitava partida, verificaram que quem deixa 8 feijões ganha o jogo. Na décima segunda partida, eles começaram a analisar o jogo de trás para frente, mas tiveram dificuldades em realizar esse procedimento e, por isso, não concluíram nesse momento. Nesta mesma partida, chegaram à conclusão de que só era possível deixar 8 feijões para o seu oponente se na sua vez de jogar tivesse saído exatamente 5 feijões, mas não fizeram associação direta com deixar 12 feijões na mesa, isso só ocorreu três partidas à frente. Na décima sexta partida, foi levantada a hipótese de que quem começa e tira 1 feijão ganha o jogo. Daí, na partida seguinte, foi notado que, se se tirar 1, ficam 16 e que, com 16, a vitória já estava garantida. Na penúltima partida, consolidaram que, para ganhar, bastava deixar quantidades que representassem os múltiplos de 4 e, então, fecharam a estratégia vencedora.

A dupla formada pelos alunos da UFRRJ também encontrou a estratégia vencedora, com jogadas e raciocínios parecidos com a dupla anterior e consolidaram na décima nona jogada. Tiveram o momento de começar a analisar o jogo de trás para frente, mas também não obtiveram sucesso. O que não apareceu nessa dupla foi o fato da vitória estar garantida quando, exatamente, 5 feijões estivessem de fora na sua vez de jogar.

Os dois alunos do IME resolveram o problema em apenas 3 partidas, mas jogaram a quarta para consolidar. Antes mesmo de jogar a primeira partida, no momento em que conheceram as regras, foi perguntado por um deles se o vencedor deveria retirar somente 1 feijão, no final do jogo. Então, foi revelado que, no final, também poderiam ser retirados 2 ou 3 feijões para ganhar, mesmo sendo a quantidade restante. Daí, esse aluno já concluiu que, se ele deixasse 4 feijões para o oponente, ganharia o jogo. Na primeira partida, pensaram bastante, mas jogaram sem expor nenhuma informação e, após a segunda partida, um perguntou se poderia utilizar uma folha de papel para organizar as ideias. Nesse mesmo momento, o seu oponente expressou a mesma vontade. Na folha, um deles desenhou 17 bolinhas e as separou em grupos de 4. Pensou um pouco e pediu para jogar a terceira partida. Jogou e ganhou, afirmando que teve sorte em começar a partida, verificando que quem começa ganha. Sendo assim, jogou a quarta partida e perdeu, pois não foi ele quem começou, e seu oponente, da mesma forma, já havia percebido a estratégia, analisando, no papel, o jogo de trás para frente.

A última dupla, formada por alunos da UNIG, não conseguiu encontrar a estratégia vencedora nem jogou as 20 partidas. Após a 13ª, um deles afirmou que o jogo já estava cansativo e que, em outro momento, ele poderia terminar. O outro perguntou se poderia continuar jogando comigo, o que não era possível. Até a décima terceira partida, o que gostaria de continuar tinha chegado à conclusão de que quem deixa 8 feijões para o oponente vence, mas não pode avançar porque o jogo teve que ser cancelado.

Os alunos dessa etapa também gostaram da atividade e, com exceção da dupla do IME, afirmaram que encontrar a estratégia vencedora não era tão fácil assim.

Conclusão

Após a aplicação da pesquisa comprovamos que os jogos de subtração são atividades que podem, e devem, ser utilizadas nas aulas de Matemática tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, como recurso pedagógico, tendo em vista o fato de despertarem interesse nos alunos, terem regras de fácil compreensão e partidas relativamente curtas, além de o material ser de fácil aquisição.

A estratégia vencedora não foi formulada pelos alunos da Educação Básica, resultado que considero insatisfatório para essa atividade como recurso em sala de aula, na Educação Básica.

Para utilização desse recurso em aulas de Matemática, faz-se necessário um trabalho com intervenções, como apresentou Grando (2004) e Carvalho (2013), corroborando Macedo (2000), que propõem que a intervenção do professor no jogo pode ser determinante na transformação do jogo espontâneo em pedagógico.

A ausência de resultados positivos na Educação Básica, uma vez que nenhum aluno concluiu a estratégia vencedora, aponta-nos à seguinte questão: a falta de intimidade com esse tipo de atividade em sala de aula, uma vez que as aulas de Matemática são baseadas primordialmente na memorização de procedimentos.

Segundo Maluta (2007), aulas de Matemática que valorizam somente a memorização de procedimentos levam a uma dificuldade em desenvolver habilidades na resolução de problemas e de raciocino hipotético-dedutivo, impedindo a generalização de soluções e procedimentos, dificultando a descrição de resultados por meio de um modelo matemático.

O fato de apresentar um jogo para uma turma, e ele ser explorado de forma com que nenhum aluno consiga concluir o objetivo, pode se tornar uma tarefa frustrante e, consequentemente, tornar essa aula desinteressante, por não ser possível tirar conclusões dessa prática. Portanto, a atividade deve ser bastante planejada e seus objetivos definidos para os alunos.

Vale ser notado, na descrição dos resultados, que as hipóteses formuladas pelos alunos, durante as partidas, repetiam-se. Como exemplo, o fato de eles afirmarem que quando tivessem 5, 6 ou 7 feijões para um jogar, este facilmente seria o vencedor. Esse caminho foi traçado pela maioria dos alunos.

A análise do jogo, na ordem direta (do início para o fim), foi quase unânime. Na verdade, é muito comum começarmos a resolver um problema dessa maneira, mas o que ocorreu com frequência foi a dificuldade em abandonar essa ideia ao passo que não surgia resultado satisfatório.

Ao longo da pesquisa, pudemos perceber que um dos recursos que facilita a descoberta da estratégia - analisar o jogo de trás para frente - não foi utilizado pela maioria dos alunos participantes, e alguns que tentaram seguir esse caminho não conseguiram organizar as ideias de forma a torná-lo útil, ou de perceber a sua importância na resolução da atividade.

Os alunos que conseguiram concluir a estratégia vencedora foram apenas os do Ensino Superior, mas não se sabe até que ponto esse tipo de atividade seria pertinente nas aulas de Engenharia. Já nos cursos de Licenciatura em Matemática ou Física acreditamos ser importante.

Uma característica marcante desse jogo para as aulas de Matemática é que basta mudar uma regra que é possível aparecerem outras relações. Isso foi mostrado quando sugerimos a retirada de uma quantidade que representasse um quadrado perfeito, que, no lugar dos múltiplos de 4, apareceu uma sequência nem um pouco óbvia.

Sendo assim, se, em vez de jogarmos com 17 feijões, jogarmos com 37, o jogo parecerá muito mais desafiador. Ou em vez de retirar 1, 2 ou 3 feijões, retirarmos também 4 e 5 feijões, aparecerá a sequência dos múltiplos de 6. Essa facilidade em mexer com as regras e a quantidade de peças facilita o trabalho do professor de Matemática na hora de planejar a atividade.

O jogo dessa natureza pode ser adaptado de acordo com o nível de trabalho da turma. No quarto ano do Ensino Fundamental, poderia ser utilizado para treinar a subtração, esquecendo o caminho para a estratégia vencedora. No quinto e no sexto ano para trabalhar os múltiplos, não só os de quatro, uma vez que, em vez de retirar 1, 2 ou 3 feijões, poderiam ser retirados também 4, formando, assim, sequências de múltiplos de 5. No sétimo, oitavo e nono ano, poder-se-ia supor uma estratégia vencedora e propor a descoberta através de intervenções. Já no

Ensino Médio, interessante seria propor a busca da estratégia, com um número limitado de intervenções, utilizando mais dicas que as utilizadas nessa pesquisa.

Os resultados obtidos mostram a viabilidade da aplicação desse e de outros jogos, e as dificuldades encontradas apontam para a necessidade dos jogos nas aulas de Matemática para o desenvolvimento de habilidades de observação, análise, levantamento de hipóteses, que estão relacionadas ao raciocínio lógico. Os jogos de subtração poderão permitir a construção de conceitos de divisibilidade e multiplicidade, cálculo mental e pensamento algébrico, além de permitirem a relação entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos, o que nos parece fundamental numa disciplina com alto índice de rejeição como a Matemática.

Referências bibliográficas

AMORA, A.A.S. **Minidicionário da língua portuguesa,** Ed. Saraiva, 10ª edição, 2010.

BAO, Ho. **Subtraction games with expandable subtraction sets,** Department of Mathematics and Statistics, La Trobe University, 2012.

BERLEKAMP, E.R.; CONWAY, J.H. and GUY, R.K. **Winning ways for your mathematical plays,** A.K Peters, Natick, MA, USA, 2001.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática,** Brasília, 1998.

CARVALHO, J.M.R. **Jogos de Subtração e outros jogos combinatórios,** Universidade de Aveiro, Portugal, 2013.

CONWAY, J.H. **On Numbers and Games,** A.K. Peters, 2001.

GRANDO, R.C. **O conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas: FE/UNICAMP. Tese de Doutorado, 2000.

MACEDO, L.; PETTY, A.L.S.; PASSOS, N.C. **Aprender com jogos e situações-problemas.** Artmed – Porto Alegre, RS, 2000.

MULATA, T.P. **Jogos na aula de Matemática,** São Carlos, 2007.

NETO, J.P.; SILVA, J.N. **Jogos Matemáticos Jogos Abstratos.** Portugal, Gradivav, 2004.

SALDANHA, N.C. **Tópicos em jogos combinatórios,** IMPA, 1991.

SARCOZY, A. **On the difference sets of sequences of integers,** Acta.Math. Acad. Sci. Hungar.; Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math., 1978.

TEIXEIRA, R.C. **Jogos combinatórios e Números Surreais,** Departamento de Matemática UFF, 2º Colóquio da Região Sudeste, Rio de Janeiro, 2013.

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences http://oeis.org/ Acessado em junho de 2014.

Anexo

	A	B	

Ficha de observação das partidas