

Luísa Ribeiro von Glehn Nobre

**Modelagem de Leilões Multidimensionais
aplicada a concessão de serviços públicos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Alex Lúcio Castro
Coorientadora: Profa. Joisa Campanher Dutra Saraiva

Rio de Janeiro
Agosto de 2014

Luísa Ribeiro von Glehn Nobre

**Modelagem de Leilões Multidimensionais
aplicada a concessão de serviços públicos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Alex Lúcio Castro

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Joisa Campanher Dutra Saraiva

Coorientadora

Escola de Pós-Graduação em Economia — FGV-Rio

Prof. Jair Koiller

EMAP – FGV-Rio

Prof. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva

EMAP – FGV-Rio

Prof. Thomas Lewiner

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de Agosto de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luísa Ribeiro von Glehn Nobre

Bacharel em Ciências Econômicas pela Fundação Getúlio Vargas (Rio de Janeiro, Brasil). Fez iniciação científica em Teoria dos Jogos. Desenvolveu trabalhos de pesquisa na área de leilões e regulação econômica.

Ficha Catalográfica

Nobre, Luísa R. von G.

Modelagem de Leilões Multidimensionais aplicada a concessão de serviços públicos / Luísa Ribeiro von Glehn Nobre; orientador: Alex Lúcio Castro; coorientadora: Joisa Campanher Dutra Saraiva. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2014.

v., 60 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Leilões;. 3. Concessões públicas;. 4. Jogos de formação incompleta.. I. Castro, Alex L.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Alex Castro pelo apoio, paciência e incentivo para a realização deste trabalho.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À minha mãe, que me apoiou e acompanhou durante todo o mestrado. Ao meu pai e minha irmã que me apoiaram.

Aos meus colegas, Leonardo Rodrigues e Mariana Carvalho, que estiveram sempre comigo nesta etapa final.

Aos professores Moacyr e Joisa, que contribuíram com as diretrizes desta dissertação.

Resumo

Nobre, Luísa R. von G.; Castro, Alex L.; . **Modelagem de Leilões Multidimensionais aplicada a concessão de serviços públicos**. Rio de Janeiro, 2014. 60p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho propõe um modelo de implementação de um leilão bidimensional para concessões de serviços públicos. O desenho do leilão é feito pelo governo através de uma regra de pontuação quase-linear que valora o preço cobrado e o tempo para iniciar a prestação de serviços.

Este modelo aplica-se ao conjunto de serviços públicos que geram grandes benefícios quando começam a ser prestado em uma data limite reduzida. Os potenciais compradores possuem informação privada sobre seus custos de produção e redução do tempo. A regra de pontuação reduz a dimensionalidade dos lances tornando-os unidimensionais para os participantes, o maior lance resulta em uma obrigação contratual ao vencedor. O modelo auxilia na elaboração do design do leilão de forma a maximizar as preferências do governo dado o comportamento estratégico dos compradores.

Palavras-chave

Leilões; Concessões públicas; Jogos de formação incompleta.

Abstract

Nobre, Luísa R. von G.; Castro, Alex L. (Advisor) ; . **Modeling of Multidimensional auctions applied to public service concessions**. Rio de Janeiro, 2014. 60p. MsC Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this thesis we propose a model for a two-dimensional auction of public service concession agreements. The government design of the auction involves an almost linear scoring rule that evaluates the price charged and the time to start providing the services.

The model applies to the public services that improve social welfare by reducing the delivery time of services. Suppliers have private information about their costs and time reduction offer. The proposed scoring rule of each supplier reduces the dimensionality of the bids submitted to a single dimension. The winner is committed to his bid and obliges to provide the required services. The model assists in preparing the design of the auction in order to maximize the preferences of the government given to the strategic behavior of buyers.

Keywords

Auctions; Concession agreements; Incomplete information games.

Sumário

1	Introdução	10
2	Referencial teórico	13
2.1	Notações e definições	13
2.2	Leilões	16
2.3	Extensões	20
3	Modelo	23
3.1	Leilão com desconto na tarifa	26
3.2	Leilão Score	30
3.3	Problema do Leiloeiro	44
4	Conclusão	50
	Referências Bibliográficas	52
A	Apêndices	54
A.1	Solução de canto quando o preço é máximo	54
A.2	Códigos	56

Lista de figuras

3.1	Lance ótimo com $N = 2$	29
3.2	Lance ótimo com $N = 4$	29
3.3	Lance ótimo com $N = 8$	30
3.4	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 0.5$	39
3.5	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 0.5$	39
3.6	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 0.5$	40
3.7	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 1$	40
3.8	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 1$	41
3.9	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 1$	41
3.10	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 1.5$	42
3.11	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 1.5$	42
3.12	Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 1.5$	43
3.13	Diferença dos custos entre os leilões	47
3.14	Tempo do leilão Score	48
3.15	Diferença dos descontos da tarifa dos serviços entre os leilões	48
3.16	Médias dos custos e taxas de desconto das tarifas, variando em função de a	49
A.1	Equilíbrio Solução de Canto com $N = 2$	55

*Pedras no caminho?
Guardo todas,
um dia vou construir um castelo...*

Fernando Pessoa
por **Rui Araújo**, *A coragem de Pessoa.*

1

Introdução

Um bem ou um serviço é caracterizado por mais do que simplesmente seu preço. A qualidade dos bens e serviços interfere diretamente nas negociações de compra e venda influenciando diretamente no resultado final. Atributos não monetários, tais como padrões de qualidade, tempo de entrega dos serviços, durabilidade e outras medidas de qualidade podem ser incluídas no processo de decisão.

Este trabalho modela a venda de uma concessão de um serviço público. Mais especificamente, os serviços públicos gerariam um grande benefício social caso fossem prestados ou entregues em uma data limite reduzida. Como por exemplo, a construção e manutenção de uma rodovia ou a construção da linha de transmissão de energia elétrica. Os *policy makers* aspiram um preço reduzido, mas também compreendem as vantagens da redução do tempo. Por isso, a medida de qualidade utilizada nesta dissertação é o tempo.

Diversas práticas podem ser adotadas para lidar com essas situações. Um padrão mínimo de qualidade pode ser imposto, para então decidir baseado apenas no preço. Outra opção mais flexível, porém menos competitiva, é a negociação direta com um grupo reduzido de fornecedores. Uma terceira alternativa, é um leilão multidimensional também conhecido como leilão *score*. Nela, os fornecedores fazem ofertas no preço e na qualidade e são ranqueados de acordo com uma regra pré-determinada no edital do leilão.

O processo mais comum para alocação dos serviços públicos é um leilão unidimensional que fixa um padrão de qualidade e determina o vencedor através unicamente do preço. Quando um alto nível de qualidade é requerido, a competição do leilão pode cair drasticamente acarretando em um alto preço pelos serviços. Além disso, pode haver comportamentos estratégicos dos fornecedores na tentativa de burlar tais padrões de qualidade. Rezende (Rezende, 2009) modela a renegociação de contratos feitos via leilão em um período posterior ao licitatório indicando grandes incentivos a um comportamento oportunista nesse sentido. Outro exemplo de uma conduta não compatível com a esperada no momento do leilão foi a analisada por Bajari (Lewis and Bajari, 2013). Através de estudos econométricos, percebe-se uma

escolha pós-contratual do contratado em relação à data limite da entrega das obras, sempre ponderando o custo de terminar no tempo previsto e as multas pelo atraso.

O leilão *score* surge como alternativa para os *policy makers* aos métodos de alocação tradicionais. Ele possui a vantagem de gerar um ambiente altamente competitivo com uma flexibilidade maior do que os leilões unidimensionais. O aumento da competitividade dos leilões multidimensionais surge da possibilidade dos licitantes considerados mais ineficientes ganharem competitividade. Os competidores com menores custos de produção para determinados padrões não necessariamente são os mesmos quando a qualidade do serviço se altera, o que força os competidores mais fortes a darem ofertas mais agressivas.

Licitações de serviços públicos feitas via leilões multidimensionais já são realidade nas construções de autoestradas em alguns estados dos Estados Unidos, onde são conhecidos como os leilões *A+B bidding*. Além disso, a União Europeia, em 2002, adotou uma nova política de contratos públicos permitindo critérios distintos nas escolhas dos contratos, abrindo espaço para contratos celebrados via leilões multidimensionais. Esse fato evidenciou a grande importância do tema no cenário econômico atual.

A modelagem deste trabalho segue a linha de Che (Che, 1991) e Asker (Asker and Cantillon, 2004) para leilões multidimensionais. A variável qualidade é identificada pelo tempo de entrega dos serviços públicos. Os potenciais fornecedores de serviços públicos possuem uma informação privada sobre seus custos de produção. A qualidade do serviço é determinada endogenamente pelo modelo através dos incentivos dados pelas regras do leilão. Os lances dos competidores são compostos pelo preço e tempo, o ordenamento dos mesmos é feito de acordo com uma regra de ordenamento quase-linear.

O leiloeiro no modelo é representado pelo governo. Esse tem o objetivo de maximizar o bem estar social por meio da escolha da regra de ranque quase-linear. Sua decisão se torna elaborada por incorporar as mudanças nos comportamentos estratégicos dos fornecedores em resposta às variações das regras. A modelagem possibilita identificar quando é vantajoso, ou não, aumentar a dimensionalidade do leilão.

A partir dos equilíbrios encontrados para cada regra de ordenamento, encontramos a trajetória das variáveis preço e tempo. Comparou-se os equilíbrios visando identificar quais são mais vantajosos na ótica do governo. Foi observado que a inclusão de variável tempo na função de ordenamento com pouco peso relativo pode reduzir a agressividade dos competidores mais competitivos. Mas, ponderando as variáveis de escolha de forma ótima, é possível aumentar a competição entre os competidores.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. Na próxima seção, é feita uma revisão da literatura. Mostram-se com alguns conceitos básicos de teoria dos jogos e da teoria dos leilões que são fundamentais para a compreensão do modelo proposto neste trabalho. Em seguida, são apresentados tópicos mais específicos sobre leilões unidimensionais, leilões multidimensionais e casos práticos onde são utilizados. Na seção 3, a modelagem do processo decisório do leiloeiro entre os tipos de leilões para licitações públicas é proposta e desenvolvida, seguido de sua análise. Por último, na seção 4, são feitas as conclusões e considerações finais.

2

Referencial teórico

Esta seção tem como objetivo introduzir os conceitos fundamentais para a compreensão do problema abordado. Ela se divide em três subseções. Na primeira, são descritas as notações e definições básicas sobre teoria dos jogos e teoria dos leilões. Em seguida, faz-se uma revisão dos artigos que serviram de base teórica para este trabalho. Na última subseção, são descritos casos onde esse tipo de leilão foi implementado.

2.1

Notações e definições

Nesta seção, alguns conceitos e notações serão introduzidas, assim como definições fundamentais para a compreensão dos próximos capítulos. O problema proposto constitui-se de uma otimização em fases e em cada fase um agente toma uma decisão e esta interfere diretamente nas decisões ou resultados futuros. Esse processo será modelado como um jogo dinâmico, mas com a última fase sendo um jogo estático. A etapa final é um leilão. Os leilões serão analisados como um jogo Bayesiano com informação incompleta ou informação imperfeita.

Todo o processo decisório é abordado pelo ponto de vista individual do agente que toma a decisão em determinado momento, portanto, o conjunto de informações de cada um, no momento da decisão, é de crucial importância.

Um *jogo* é uma representação formal de uma situação em que um número de indivíduos interage em conjunto com estratégias interdependentes. Isto é, o bem-estar de cada indivíduo depende não apenas das suas próprias ações, mas também das ações dos demais indivíduos. Neste sentido, o melhor para cada jogador depende das expectativas individuais e das expectativas dos outros jogadores. Para que um jogo seja descrito é necessário definir: os jogadores; as regras; os possíveis resultados; e as preferências de cada jogador. (MasColell, 1995)

Por convenção, será usada a notação $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ para um vetor de N coordenadas e $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$ para vetores com $N - 1$ coordenadas.

Quando N jogadores competem entre si, denota-se o conjunto de jogadores por $I = \{1, 2, \dots, N\}$. O tipo de cada jogador i é uma realização de uma variável aleatória θ_i com distribuição $F_i(\cdot)$. O conjunto dos possíveis tipos de jogador $i \in I$ é dado por Θ_i . Este conjunto é o intervalo $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$. Seja $\Theta^N = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_N$, $F^N(\cdot)$ é a função de distribuição conjunta de Θ . Definimos também $\hat{F}_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ como as probabilidades dos tipos x_{-i} dado que i sabe seu próprio tipo. Neste trabalho apenas os casos onde os jogadores são simétricos serão abordados, $F_i(\cdot) = F(\cdot)$, $\Theta_i = [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \forall i \in I$.

Conceitua-se *estratégia* do jogador como um conjunto de regras de decisões, mais especificamente, a estratégia determina como o jogador vai agir em cada possível circunstância quando este for chamado a tomar alguma decisão. Do ponto de vista dos jogadores, o conjunto de circunstâncias possíveis é representado pela coleção de informações dadas a ele. As informações podem ser o tipo, o payoff, a distribuição dos tipos e payoffs dos demais jogadores e número de jogadores. (Gibbons, 1992)

Definimos B_i como o conjunto de todas as estratégias do jogador $i \in I$ e Π_i os possíveis resultados de suas ações. Seja $b_i \in B_i$, então $b_i : \Theta_i \rightarrow \Pi_i$ é a função que representa a função de decisão do jogador i .

No contexto da teoria dos jogos, um *Jogo Bayesiano* é aquele cuja informação sobre as características dos outros jogadores é incompleta. De acordo com a modelagem de Harsanyi (Harsanyi, 1967), estes jogos podem ser interpretados com a introdução da *Natureza* como um jogador adicional. Esse escolhe o tipo de cada jogador e associa funções de densidade para cada um dos tipos. Dessa forma, pode-se interpretar o jogo como sendo um jogo de duas etapas:

- (i) a primeira antecede o jogo propriamente dito; a natureza escolhe os tipos de cada jogador e cada jogador descobre o seu próprio tipo, mas desconhece os tipos dos demais jogadores.
- (ii) na segunda, cada jogador escolhe a sua estratégia sabendo seu próprio tipo e a distribuição de todos os outros tipos.

Seja $\pi_i(b_i, b_{-i}, \theta_i, \theta_{-i})$ o payoff do jogador i dado seu tipo θ_i , sua estratégia escolhida $b_i \in B_i$, o tipo dos demais jogadores θ_{-i} e as estratégias escolhidas pelos $N - 1$ jogadores.

Um *Jogo Bayesiano* é definido pelo conjunto de jogadores, payoffs, tipos possíveis e distribuição de tipos.

$$G = [I, \{B_i\}_{i \in I}, \{\pi_i(\cdot)\}_{i \in I}, \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_N, F(\cdot)]$$

Assim, definimos *Equilíbrio de Nash Bayesiano* como sendo uma lista de funções de decisão $(b_1^*(\cdot), b_2^*(\cdot), \dots, b_N^*(\cdot))$ de tal forma que $\forall i \in I, \forall \theta_i \in \Theta$ e

$\forall b_i \in B_i$:

$$\int_{\theta_i \in \Theta} \pi_i(b_i^*, b_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}) d\hat{F}_i(\theta_{-i}|\theta_i) \geq \int_{\theta_i \in \Theta} \pi_i(b_i, b_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}) d\hat{F}_i(\theta_{-i}|\theta_i)$$

Ou seja, cada jogador escolhe sua estratégia de acordo com o seu tipo. Nessa escolha, cada jogador monta sua estratégia de melhor resposta considerando que os demais jogadores também escolheram otimamente. Decisões individuais ótimas não necessariamente implicam em um resultado ótimo global, independente da métrica escolhida para avaliar os resultados. O conceito de equilíbrio se relaciona com a ideia de estabilidade das escolhas individuais. O indivíduo sempre escolhe b_i^* caso os outros $N - 1$ jogadores escolhessem b_{-1}^* .

Um *Jogo Dinâmico* representa situações nas quais os jogadores escolhem as suas ações durante o passar do tempo, e não estaticamente. Esses jogos podem ser representados por uma árvore de decisão, cada nó, ou subjogo, representa uma escolha de um jogador. O princípio da racionalidade sequencial é fundamental para a compreensão dos equilíbrios nos jogos dinâmicos que está diretamente ligado ao procedimento da indução retroativa¹. (MasColell, 1995)

Na racionalidade sequencial, a estratégia dos jogadores consiste em especificar a ação ótima em cada momento de decisão. Ou seja, quando um jogador é chamado a jogar, sua estratégia deve incorporar a estratégia do oponente no próximo momento de decisão. Esse tipo de raciocínio implica em descartar ações que seriam temporalmente inconsistente, reduzindo a complexidade das decisões a cada ponto no tempo.

A indução retroativa é um procedimento que envolve resolver o comportamento ótimo individual do final do jogo para aí então determinar os comportamentos em momentos anteriores. Claramente, o procedimento segue o princípio da racionalidade sequencial, pois assegura que as estratégias são ótimas em todos os momentos de decisão. (MasColell, 1995)

Em jogos dinâmicos, com um número finito de subjogos e com informação perfeita, a indução retroativa é suficiente para que se encontre o Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (ENPS). Entretanto, o foco deste trabalho é em um jogo dinâmico, mas com informação imperfeita, para isso o conceito de equilíbrio mais apropriado é o Equilíbrio fraco sequencial (ou Equilíbrio Bayesiano fraco perfeito). Nesse equilíbrio, o conceito de racionalidade sequencial é estendido com a introdução das crenças. As crenças podem ser interpretadas

¹Tradução livre de backwards induction.

como sendo a especificação de cada conjunto de informação a cada decisão.

O sistema de crenças μ em um jogo Γ é a especificação das probabilidades $\mu(x) \in [0, 1]$ para cada nó de decisão do jogo Γ tal que,

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

para todo conjunto de informação H .

Um perfil de estratégias ótimas em jogos dinâmicos segue o mesmo conceito de estratégias ótimas previamente descrito. O valor esperado do payoff, utilizando essa estratégia dado o conjunto de informação, deve ser maior ou igual à outra possível estratégia com o mesmo conjunto de informação. A única diferença em jogos dinâmicos é que o conjunto de informação se atualiza a cada nó de decisão.

O *Equilíbrio Fraco Sequencial* em um jogo dinâmico com informação incompleta é o perfil de estratégias e o sistema de crenças são de tal forma que: (i) O perfil de estratégias seja sequencialmente racional dado μ ; (ii) O sistema de crenças μ seja consistente dado as estratégias.

2.2

Leilões

Nesta seção, é feita uma introdução aos principais conceitos da teoria dos leilões. Em seguida descreve-se o leilão multidimensional que é o foco deste trabalho.

Leilão é um processo centralizado de compra e venda de bens e serviços de acordo com uma regra pré-estipulada. Mais especificamente, um leilão é um mecanismo de alocação de mercadorias que iguala a demanda à oferta. É geralmente usado em mercados de pouca liquidez. Por este motivo, seu estudo tem se tornado uma ferramenta fundamental para a análise e elaboração de políticas públicas. (Milgrom, 2004)

Leilões podem ser classificados e analisados de acordo com várias perspectivas. As classificações mais comuns estão relacionadas ao tipo e ao ambiente. O tipo do leilão incorpora aspectos relacionados às regras e procedimentos na definição dos lances e do preço a ser pago. As regras dos lances mais utilizadas são: ascendentes, descendentes, abertos e fechados. As definições dos preços a serem pagos podem ser de primeiro ou segundo preço. O ambiente do leilão se relaciona com a forma dos participantes valorarem o bem leilado.

O leilão do tipo *Inglês* é o mais conhecido, seus lances são feitos de forma oral ascendente. Os participantes fazem lances abertos sequencialmente de tal forma que cada oferta deve ser maior que a antecedente. O leilão termina

quando nenhum participante está disposto a fazer uma oferta superior ao último lance feito. (Krishna, 2009)

O leilão descendente é conhecido como leilão *Holandês*. Ele funciona de forma oposta ao Inglês. O Leiloeiro inicia o leilão requerendo o maior preço possível e com o decorrer do tempo o preço é reduzido de forma constante. O primeiro participante que se manifestar aceitando o preço do leiloeiro ganha o leilão. (Krishna, 2009)

No leilão selado de primeiro preço, cada participante submete, independentemente e simultaneamente, um único lance sem ver os lances dos demais jogadores. Vence o leilão quem ofertar o maior lance. O vencedor paga o valor referente ao seu próprio lance.

No leilão selado de segundo preço, novamente, cada participante submete independentemente um único lance secreto e o vencedor é aquele que submeteu a maior oferta. Entretanto, o preço a ser pago é o segundo maior. Este formato é conhecido como o leilão de Vickrey (Vickrey, 1961).

Nas questões que se referem ao ambiente, a característica chave está na assimetria de informação entre os participantes. Existem duas modelagens básicas: valores privados e valores comuns. Variações graduais entre esses dois modelos são chamados de valores quase comuns. (Krishna, 2009)

Em modelos com valores privados cada participante sabe quanto o objeto vendido vale para ele mesmo, mas essa informação é privada para cada um. Geralmente, a distribuição dos valores é de conhecimento público.

Já nos modelos de valores comuns o valor do objeto é comum a todos, entretanto a informação privada sobre qual é o valor verdadeiro se diferencia. Por exemplo, o valor de um poço de petróleo depende de quanto óleo existe submerso, cada participante tem uma expectativa, ou “sinal”, extraídos de estudos geológicos. Os participantes, neste caso, poderiam atualizar suas expectativas e melhorar sua precisão em relação ao valor do poço caso tivessem acesso a diferentes sinais. Em contraste com modelos de valores privados, o valor do objeto pode se alterar privadamente com uma maior informação sobre as expectativas dos valores dos competidores, e portanto o comportamento estratégico individual.

Um ponto de destaque dos valores comuns é a “maldição do vencedor”. Os participantes fazem suas ofertas de acordo com suas expectativas em relação ao valor do objeto; portanto, o participante com o maior sinal ganha o leilão com uma maior probabilidade. A “maldição do vencedor” ocorre quando o vencedor submete um lance maior do que o valor real, superestimando o item leilado e incorrendo em prejuízo para si.² Em equilíbrio, os jogadores reconhecem essa

²Essa estrutura de incentivos perversos também é modelada em microeconomia como

possibilidade e incorporam esta informação reduzindo a média das suas ofertas. (Milgrom, 2004)

Inicialmente, considera-se o leilão de preços descendentes. Cada jogador, no processo de decisão de quanto ofertar, escolhe um preço no qual aceita o valor do leiloeiro condicionado a nenhum outro jogador já ter aceito o preço. O participante que escolher o maior preço ganha o leilão ao preço escolhido. No leilão selado de primeiro preço, o processo decisório é o mesmo, por isso a equivalência estratégica. (Menezes, 2008)

Já no leilão ascendente, cada participante escolhe um preço no qual é indiferente ganhar ou perder o leilão. Esse preço é chamado de preço reserva. As ofertas são incrementadas até que o penúltimo jogador desista do leilão. Quem tem o maior preço reserva ganha o leilão ao preço do segundo maior preço. Um comportamento análogo ocorre no leilão selado de segundo preço. Este leilão gera incentivos ao ofertante para revelar seu preço, ou seja, a estratégia ótima é sempre “contar a verdade”. Novamente, o jogador com maior preço reserva ganha pagando o segundo maior preço.

Outro ponto de destaque na teoria dos leilões é o teorema de equivalência de receitas. Sob as seguintes características: unicidade e indivisibilidade do bem leilado; participantes simétricos e neutros ao risco; e avaliações privadas dos participantes são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Todos os quatro formatos de leilões citados possuem a mesma receita esperada para o leiloeiro (Menezes, 2008).

Diversas variações desses modelos clássicos são estudadas, como por exemplo, leilões de múltiplos objetos, agentes não simétricos (ou heterogêneos), quantidade endógena de participantes, ofertas multidimensionais, dentre outros. Entretanto, o foco deste trabalho é o leilão bidimensional ou também conhecido como “score auctions”.

2.2.1

Leilão Multidimensional

Nos modelos tradicionais, apenas um preço ou característica é incorporada nas regras do leilão para a definição do vencedor. Entretanto em muitas situações, o vendedor pode valorizar mais de uma característica, aceitando trocar um atributo por outro. De forma análoga, um comprador pode ter vantagens sob diferentes pontos de vista.

O leilão score incorpora em suas regras mais de um preço, ou característica, para o ordenamento e definição do vencedor. Os participantes fazem lances multidimensionais e o vendedor ranqueia os lances de acordo com uma problemas de seleção adversa.

regra pré-estipulada. Quem tiver a maior pontuação de acordo com a regra vence o leilão.

As dimensões dos lances podem ser diversas. Qualquer característica de interesse do leiloeiro ou dos compradores pode ser incorporada às regras. Essas características podem ser, dentre outras, montante financeiro entregue ao leiloeiro no momento da compra, preço futuro do serviço prestado, qualidade do produto e tempo de entrega de uma obra.

Lances bidimensionais, apesar de aumentarem a complexidade do leilão, fato evitado por criadores de políticas públicas, podem gerar benefícios dependendo do interesse do leiloeiro. Che (Che, 1991) e Rezende (Rezende, 2009) mostram que em leilões com um conjunto exógeno de participantes, os vendedores podem se beneficiar escolhendo regras multidimensionais de lances de tal forma que a competição entre os jogadores se eleve. Competidores, que no caso unidimensional eram considerados fracos, podem se tornar mais competitivos com a entrada de uma nova variável. Ofertantes mais competitivos são forçados a agir mais agressivamente com a maior competitividade dos mais fracos.

Che (Che, 1991) desenvolveu um modelo de leilões bidimensionais no qual preço e qualidade são incorporados no lance de acordo com uma regra de pontuação desenvolvida previamente pelo leiloeiro, que neste caso é comprador. Neste modelo as firmas vendedoras possuem informação privada unidimensional sobre seus custos em melhorar a qualidade de seus produtos. Os formatos abordados foram o selado de primeiro e segundo preço, que foram modificados para primeiro e segundo score. O artigo tenta responder quais regras têm a melhor performance para o leiloeiro e como a escolha da qualidade é feita pelos participantes.

A análise das regras de ordenamento se restringem às quase-lineares, onde a parte não linear é referente a qualidade. O artigo pressupõe que existe apenas um único ponto crítico para a subtração da parte não linear da regra pela função custo das firmas e este é um ponto interior³. A partir dessa hipótese o autor demonstra que a escolha do item qualidade não depende da interação com os demais concorrentes, o que mais tarde seria definido como pseudo tipo por Asker (Asker and Cantillon, 2004).

Dessa forma o leilão pode ser reformulado com um leilão unidimensional com apenas uma variável: a pontuação obtida com a regra; portanto, fica garantido que existe um único equilíbrio simétrico no leilão de primeiro e

³Seja (p, q) preço e qualidade respectivamente $\pi(p, q) = p - C(q, \theta)$ a utilidade das firmas e $S(p, q) = s(q) - p$ a função score. Se $s(q) - C(q, \theta)$ possui um único ponto interior máximo, então o item qualidade será da forma $q(\theta) = \operatorname{argmax} \quad s(q) - C(q, \theta)$.

segundo preço. Além disso, ambos os formatos implementam um resultado ótimo no sentido de Pareto, ou seja, a firma com o menor custo vence o leilão.

Asker e Cantillon (Asker e Cantillon, 2006) acrescentam no modelo de Che (Che, 1991) mais uma dimensão nos valores privados, gerando incentivos à distorção nas ofertas de qualidade que se distanciam das quantidades eficientes. Ainda assim, exemplos numéricos foram feitos a partir de simulações sugerindo que a performance dos leilões score são tão boas quanto o esquema ótimo⁴.

Em seguida, Asker e Cantillon (Asker and Cantillon, 2008) constroem um modelo de leilão multidimensional nos lances, com valores privados multidimensionais. Neste modelo existe um comprador, N vendedores e a regra de ordenamento é inserida de forma exógena no modelo. Eles demonstram que a multidimensionalidade dos valores privados dos licitantes pode ser reduzida a uma única dimensão através do pseudo tipo, e isso é suficiente para caracterizar o equilíbrio nesses tipos de leilões com regras quase-lineares⁵. Além disso, para todo equilíbrio dessa forma existe uma correspondência nos modelos padrões de único objeto com valores privados. Outro ponto de destaque desse trabalho é que pela perspectiva do comprador, um leilão multidimensional é estritamente preferível àquele aos leilões que envolvem apenas preço com um padrão mínimo de qualidade.

2.3

Extensões

Assim como Che (Che, 1991), este trabalho investiga a função score que melhor satisfaz as preferências do leiloeiro incorporando o comportamento estratégico dos licitantes. A contribuição a este modelo reside na particularização das preferências em relação a qualidade, mais especificamente no atributo tempo.

Uma aplicação relevante deste trabalho está nos leilões feitos pelo governo de concessões de serviços públicos que incorrem em alto custo do atraso na entrega dos serviços. Usualmente, é estipulada uma data limite para a iniciação dos serviços e os licitantes disputam o monopólio desse serviço através do preço cobrado pelo mesmo no futuro. Com essa estrutura, firmas competem no custo de produção atrelada ao tempo de preparação pré-determinada; entretanto existe a possibilidade de que algumas firmas possuam uma vantagem comparativa às outras quando comparada ao tempo de entrega dos serviços

⁴A definição de ótimo presuppõe que ninguém pode melhorar sem que o outro piore, ou seja nenhum agente se dispõe a alterar suas ações.

⁵Quando os valores privados são unidimensionais não é necessário requerer uma regra linear no preço. O mapeamento completo dos equilíbrios é feito através do pseudo tipo.

diferente. O leilão unidimensional, além de reduzir a competição, não mensura os possíveis benefícios com uma variação no tempo no resultado final.

Alguns formadores de políticas perceberam que existe um custo social de certos serviços públicos não operarem em plena capacidade, analisando assim a possibilidade de inclusão do tempo como variável fundamental na construção dos contratos. O departamento de transporte da Califórnia (Caltrans) inovou no design dos contratos para a construção de autoestradas incorporando a variável tempo no processo decisório por achar que existe um alto custo social da estrada não estar pronta. Este mecanismo de alocação é denominado por eles de *A+B bidding*. O raciocínio para a mudança de contratos é o seguinte: suponha uma autoestrada com fluxo de 170000 automóveis por dia (ida e volta). Se o projeto de construção de uma autoestrada resulta em 30 minutos de atraso para os viajantes dessa estrada por rota, então o custo imposto por essa obra é de 170000 horas por dia. Estimando o valor da hora do trabalho de \$10, o custo social por dia é de \$1.70 milhões; entretanto, as construtoras não possuem incentivos para internalizar este custo social.

Lewis e Bajari (Lewis and Bajari, 2013) analisam mais 1300 contratos celebrados pelo Caltrans entre 2003 e 2008. Nos dados em que os contratos foram feitos através leilão *A+B bidding*, a conclusão das obras foi em média 60% mais rápida do que em contratos usuais. Além disso, a elevação dos custos para a redução do tempo não ultrapassa os benefícios gerados. Lewis e Bajari (2011) fazem uma série de exercícios contrafactuais mostrando um ganho significativo quando um leilão multidimensional é utilizado no desenho do contrato.

Lewis e Bajari (Bajari and Lewis, 2011) examinam como prazos de entrega da obra afetam a taxa de trabalho do contratante e conclusão da obra usando dados da construção de autoestradas do estado de Minnesota. Eles constroem uma medida de esforço para a diferença entre a taxa de trabalho predita no projeto da obra e a usada no decorrer da obra. Evidências de que existe uma adaptação do esforço das empreiteiras aos incentivos temporais são encontradas. As construtoras ponderam a elevação dos custos de acelerar as obras com as multas de não entregar no prazo. Usando os resultados do trabalho anterior, os autores mostram que a eficiência do desenho do contrato pode ser aprimorada através de um leilão score.

Leilões score vêm se consolidando como um instrumento de políticas públicas e por isso estão se tornando cada vez mais frequentes. Nos Estados Unidos, algumas licitações de construções de autoestradas têm sido feitas pelo leilão denominado *A+B bidding*. Nele as autoridades avaliam as ofertas considerando o custo do projeto e o tempo para completar a obra. Este

mecanismo também é utilizado nos leilões para reservas de fornecimento de energia elétrica (Bushnell et al, 1994, Wilson, 2002). A União Europeia adotou em 2002 uma nova política para contratos públicos. Esta lei permite dois critérios distintos para escolha de contratos públicos: menor custo e melhor valor econômico. Em termos práticos os contratos devem ser escolhidos através de um leilão score. Estima-se que contratos públicos na União Europeia cheguem a 16% do PIB ⁶.

No Brasil, leilões multidimensionais têm sido utilizados pelos órgãos ambientais governamentais para assegurar a qualidade dos serviços de concessionários em unidades de conservação e em florestas nacionais e estaduais (ICMBIO, 2014). Destaca-se, nessa abordagem, o Serviço Florestal Brasileiro que, desde 2010, faz leilões anuais em que os interessados têm acesso aos dados das florestas nacionais disponibilizadas para concessão em documento público chamado “Plano Anual de Outorga Florestal”. Os licitantes fazem suas propostas técnicas e comerciais de acordo com regras pré-estabelecidas nos editais. Os envelopes são abertos durante o processo de leilão e um sistema de pontuação define o vencedor. Nesse processo, cerca de 230 mil hectares de floresta estão sendo manejadas de forma sustentável por cinco empresas durante 40 anos. O lance de cada licitante define preços fixos que são pagos ao governo pelos produtos retirados das florestas e qualidade dos serviços de manejo florestal em termos ambientais e sociais.

⁶http://europa.eu.int/comm/internalmarket/publicprocurement/introduction_en.htm

3 Modelo

Este modelo tem como objetivo otimizar a decisão do governo em uma concessão de um serviço público. As concessões são feitas via leilões públicos e os instrumentos do governo neste contexto são as regras do leilão e o contrato celebrado pelo vencedor. Depois de estabelecido o edital do leilão as empresas interessadas no bem leiloado agem estrategicamente de forma a maximizar os seus próprios interesses. Dessa forma o comportamento do governo deve incorporar o posicionamento individual estratégico do período que o sucede. Isto é, o formato do leilão é escolhido antecipando o resultado do jogo subsequente jogado pelos potenciais compradores.

Cronologicamente o jogo é estruturado em três fases. Na primeira a Natureza escolhe o tipo dos licitantes, em seguida, o governo estabelece todas as regras do leilão já sabendo as distribuições de probabilidade dos tipos de todos os jogadores. Por último, os licitantes participam de um leilão pela concessão do serviço público.

Caracteriza-se esta sequência de escolhas e comportamentos estratégicos, onde a ordem das tomadas de decisões interferem diretamente no resultado, como um jogo dinâmico sem repetições. Como tal deve-se achar o Equilíbrio fraco sequencial via indução retroativa. Logo, deve-se encontrar quais seriam as estratégias e comportamentos dos possíveis compradores em cada regra vigente de leilão, para só então escolher a regra ótima.

O bem leiloado é único e indivisível. Existem N empresas concorrentes que disputarão a posse do bem no leilão. O comprador adquire o monopólio de um serviço público, mas tem por obrigação a construção e manutenção do ativo. Este monopólio pode gerar uma receita máxima de R com a tarifa máxima e deve ser entregue em uma data pré-determinada. O governo tem preferências em relação a tarifa cobrada e sobre o tempo da entrega da obra.

A regra de alocação geralmente utilizada para concessões de serviços públicos é via leilão com o ordenamento de acordo com a maior taxa de desconto na tarifa do serviço; ou seja, os lances representam uma diminuição da receita futura por meio de uma redução do preço cobrado pelos serviços. Quem abdicar de uma maior porcentagem da receita futura celebra o contrato

com o preço proposto; entretanto, no caso estudado no escopo desse trabalho, o governo se beneficiaria com uma redução do tempo da obra. Portanto uma regra de alocação que incorpora a variável tempo de entrega também será analisada.

Sob as mesmas condições, os dois leilões distintos serão analisados e comparados. O primeiro segue a regra de alocação clássica com apenas a variável d (taxa de desconto na tarifa). No segundo, uma nova regra de ranqueamento dos lances será imposta, o que se chama *função score*. Esta incorpora uma variável temporal que representa a data de entrega (t) das obras além da taxa de desconto na tarifa. Ambas as regras locativas serão descritas mais detalhadamente nas subseções seguintes.

Preferências Cada comprador $i \in I$ valora o bem como sendo

$$R(1 - d) - C(\theta_i, t) \quad (3-1)$$

onde $d \in [0, 1]$ é a taxa de desconto na tarifa do serviço prestado, $t \in (0, 1]$ representa a porcentagem do tempo máximo para a entrega da obra, θ_i é um parâmetro de eficiência do jogador i que define o seu tipo e $C(\theta_i, t)$ é a função custo da entrega do comprador i com θ_i dado e t escolhido. Todos os N compradores são simétricos na preferências e cada θ_i é independentemente e identicamente distribuído no intervalo $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ de acordo com a função de distribuição de densidade f .

Por hipótese $C : \Theta \times (0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ é uma função contínua e diferenciável, com $\frac{\partial C}{\partial t} < 0 \forall t \in (0, 1]$, $\frac{\partial C}{\partial \theta} > 0 \forall \theta \in \Theta$, $\lim_{t \rightarrow 0} C(\theta, t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow 1} C(\theta_i, t) = c_i$ e $\lim_{t \rightarrow 1} C(\bar{\theta}, t) = \bar{c}$. Ou seja $c_i = C(\theta, 1)$ e por simplicidade os c_i seguem a mesma distribuição de probabilidade f .

A estratégia *ótima* do comprador i é representada pela função $\beta_i : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ que determina o lance do jogador i para todos os valores de θ possíveis.

O governo é um regulador benevolente que maximiza o bem estar social, SW . Admiti-se que quando o leilão, como estes aqui analisados, é feito, o bem estar social do governo pode ser expresso em função da taxa de desconto na tarifa d , custo operacional $C(\theta, t)$ e o custo do atraso da obra $L(t)$. Supõe-se que existe um custo social do serviço não ser prestado até a finalização das obras. Quanto antes as obras forem finalizadas, quanto menor t , menor será o custo social incorrido pelo governo.¹

¹O custo do atraso pode ser entendido como exercício contrafactual do cenário analisado. Caso o serviço estivesse sendo prestado a sociedade se beneficiaria.

Se o primeiro leilão é implementado, o bem estar social será, $SW_1 = Ad^* - \left(\frac{c^*}{R}\right) - L(1)$. Caso seja implementado o leilão que incorpora a taxa de desconto na tarifa, o bem estar social seria, $SW_2 = Ad_s^* - \frac{C(\theta^*, t_{\theta^*})}{R} - L(t_{\theta^*})$.² Onde A é uma constante que representa a preferência do governo pelos preços cobrados pelos serviços prestados; o sobrescrito $*$ representa os valores dos vencedores dos respectivos leilões; o subscrito s se refere a aos valores do leilão score; e $L(\cdot)$ é

$$L(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_{gov} \\ late \cdot (t - t_{gov}) & \text{se } t > t_{gov} \end{cases}$$

Onde t é o tempo, t_{gov} a taxa de desconto na tarifa ótima considerada pelo governo e $late$ uma constante que representa o custo do atraso. O objetivo é avaliar a mudança de regime de regras dos leilões, por isso, o bem estar social a se considerar é a variação do bem estar em cada regime, $\Delta SW = SW_2 - SW_1$, que pode ser expressa por:

$$\Delta SW = A(d_s^* - d^*) - \left(\frac{C(\theta^*, t_s^*)}{R} - c^* \right) - (L(t_s^*) - L(1)) \quad (3-2)$$

O instrumento a disposição do leiloeiro é a regra em vigor no leilão. Através dela, as funções lances serão alteradas e, conseqüentemente, o equilíbrio.

Informação

As preferências são de conhecimento geral entre os compradores e o vendedor, com exceção do tipo de cada comprador θ_i que é observado privadamente, mas a distribuição dos tipos também é de conhecimento geral. Os tipos de todos os jogadores são extraídos de uma distribuição idêntica e independentemente de acordo com a função de densidade contínua $f(\cdot)$ que tem um suporte limitado, $F(\cdot)$ é a sua acumulada. A função $f(\cdot)$ também é de conhecimento público. Eventualmente pode-se supor que f é uma distribuição uniforme $[0, R]$. Esta hipótese será usada apenas nas simulações numéricas das funções lances.

²O leitor pode se questionar sobre o porquê do custo da empresa vencedora aparecer negativamente na função de bem-estar social. Esta é uma hipótese comum em economia que implica em uma preferência pela eficiência do mercado, ou seja, é desejável que a empresa com o menor custo ganhe o leilão. Suponha que uma firma que não tenha o menor custo ganhe o leilão; então existe uma transferência monetária entre a vencedora e a firma com o menor custo tal que ambas estariam melhor caso a mais eficiente ganhasse. Portanto, quando a firma mais eficiente não é selecionada pelo leilão significa que existe um excedente do produtor não capturado pelo leiloeiro.

3.1

Leilão com desconto na tarifa

O leilão com desconto na tarifa tem apenas uma variável de decisão: o preço cobrado pelo serviço; a característica tempo não está presente nas escolhas. A modelagem deste trabalho segue o caso clássico de valores privados e lances do tipo selado de primeiro preço. Neste leilão os N participantes submetem lances $b_i \in [0, 1]$ que representam um desconto na tarifa do serviço a ser prestado. Vence o leilão quem ofertar o maior desconto na tarifa. Este mecanismo de alocação é muito utilizado no Brasil em concessões de serviços públicos.

Problema do licitante

Cada participante $i \in I$ observa privadamente o seu tipo θ_i e conhece a distribuição dos tipos dos concorrentes. Estes são racionais e neutros ao risco. Ao montar as suas estratégias todos os jogadores incorporam em suas decisões que as preferências são simétricas e distribuições conhecidas.

A função custo é decrescente em t , logo se não há nenhum benefício em diminuir o tempo de entrega das obras, então todos os possíveis compradores irão escolher $t = 1$. Lembrando que $\lim_{t \rightarrow 1} C(\theta_i, t) = c_i$ reestrutura-se o payoff do licitante i como:

$$\pi_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{se } b_i < \max b_{-i} \\ R(1 - b_i) - c_i & \text{se } b_i \geq \max b_{-i} \end{cases}$$

Pela expressão a cima é fácil ver que o licitante i jamais submete um lance maior do que $1 - \frac{c_i}{R}$; caso contrário, terá um payoff negativo. A resolução a seguir é inspirada no trabalhos de Krishna (Krishna, 2009). A principal diferença está nos tipos que aqui representam os custos e não o valor do objeto.

O problema do licitante i se resume a maximizar o payoff esperado:

$$\max_{b_i} P(b_i \geq \max\{b_{-i}\})(R(1 - b_i) - c_i) + P(b_i < \max\{b_{-i}\}) \cdot 0 \quad (3-3)$$

Onde $P(b_i > \max b_{-i})$ é a probabilidade de vencer o leilão. O objetivo é encontrar a estratégia β do jogador i que maximiza o valor esperado do lucro. O seu lance é uma função do tipo θ_i que nesse caso é o seu custo c_i , ou seja, $b_i = \beta(c_i)$, $\forall i \in I$. Quanto maior o custo, menor é a parcela da receita que o jogador i pode abdicar por meio do lance. Por isso, $\beta(\cdot)$ é uma função monótona decrescente nos custos que possui inversa $\beta^{-1}(\cdot)$.

Seja $\beta(c_{-i}) = (\beta(c_1), \beta(c_2), \dots, \beta(c_{i-1}), \beta(c_{i+1}), \dots, \beta(c_N))$ e Y_c^{N-1} uma

variável aleatória resultante do mínimo de $N - 1$ observações de variáveis aleatórias independentes c . O comprador i ganha o leilão quando $b_i > \max\{b_{-i}\} = \max\{\beta(c_{-i})\} = \beta(\min\{c_{-i}\}) = \beta(Y_c^{N-1})$, ou seja, $\beta^{-1}(b_i) < Y_c^{N-1}$. Portanto reescreve-se o lucro esperado como:

$$E(\pi_i) = H(\beta^{-1}(b_i))(R(1 - b_i) - c_i) \quad (3-4)$$

Onde $H(\cdot)$ é a função de densidade acumulada de Y_c^{N-1} . Derivando em relação a b_i e igualando a zero encontra-se o máximo do valor esperado do lucro.

$$\frac{h(\beta^{-1}(b_i))}{\beta'(\beta^{-1}(b_i))}(R(1 - b_i) - c_i) - H(\beta^{-1}(b_i))R = 0 \quad (3-5)$$

com $h = H'$ sendo a função densidade de Y_c^{N-1} .

Quando é feita a derivada em relação a b_i considera-se que o lance do jogador i para ele mesmo é uma variável de escolha individual e não uma função. Neste momento, a hipótese de simetria entre os participantes se torna fundamental. Todos os jogadores sabem que seus concorrentes são racionais e enfrentam o mesmo problema de otimização. Portanto a estratégia ótima é a mesma para todos, $b_i = \beta(c_i)$. Substituindo na equação obtêm-se:

$$\frac{h(c_i)}{\beta'(c_i)}(R(1 - \beta(c_i)) - c_i) = H(c_i)R$$

Esta condição pode ser reescrita como

$$\frac{\partial(H(c_i)\beta(c_i))}{\partial c_i} = \frac{h(c_i)(R - c_i)}{R}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \beta(c_i) &= \frac{1}{H(c_i)} \int_{c_i}^{\bar{c}} h(y) \left(1 - \frac{y}{R}\right) dy \\ \beta(c_i) &= E \left(1 - \frac{Y_c^{N-1}}{R} \mid Y_c^{N-1} > c_i\right) \end{aligned} \quad (3-6)$$

A determinação de β é apenas heurística pois a condição (3-5) é necessária, porém não suficiente. A demonstração de que (3-5) é suficiente está no livro (Krishna, 2009).

A equação (3-6) é verdadeira para todas as distribuições possíveis de c_i . Seja c_i variáveis aleatórias extraídas independentemente de uma distribuição uniforme do intervalo $[0, R]$,³ então a função densidade de cada c_i é $f(c_i) = \frac{1}{R}$

³Esta distribuição foi escolhida de forma que $(1 - \frac{c_i}{R})$ tenha distribuição uniforme com suporte $[0,1]$. Desta forma o valor do objeto leiloado segue a modelagem mais tradicional na teoria dos leilões.

e acumulada $F(c_i) = \frac{c_i}{R}$. A partir deste ponto é possível, então, calcular a acumulada de Y_c^{N-1} .

$$H(c_i) = P(c_i < \min c_{-i})$$

$$H(c_i) = P(c_i < c_1)P(c_i < c_2)\dots P(c_i < c_{i-1})P(c_i < c_{i+1})\dots P(c_i < c_N)$$

$$H(c_i) = (1 - P(c < c_i))^{N-1}$$

$$H(c_i) = \left(1 - \frac{c_i}{R}\right)^{N-1} \quad (3-7)$$

Substituindo a equação (3-7) em (3-6), encontra-se a oferta ótima de todos os participantes.

$$\beta(c_i) = \frac{(N-1)\left(\frac{-1}{R}\right) \int_{c_i}^R \left(1 - \frac{x}{R}\right)^{N-2} \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx}{\left(1 - \frac{c_i}{R}\right)^{N-1}}$$

$$\beta(c_i) = \frac{(N-1)\left(\frac{-1}{R}\right) \left(1 - \frac{c_i}{R}\right)^N (-R)}{N \left(1 - \frac{c_i}{R}\right)^{N-1}}$$

$$\beta(c_i) = \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{c_i}{R}\right) \quad (3-8)$$

Percebe-se que $\frac{N-1}{N} < 1$ e $\frac{c_i}{R_i} \leq 1$ pois caso o custo superasse a receita máxima o licitante não participaria do leilão; portanto, $\beta(c_i) \in [0, 1 - \frac{c_i}{R}]$ e conforme a competição aumenta, mais jogadores participam do leilão, b_i se aproxima do seu máximo⁴.

Já se pode calcular o lucro do participante condicionado a ele ter vencido o leilão, basta substituir o lance ótimo, (3-8), na expressão do payoff.

$$\pi_i = R \left(1 - \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{c_i}{R}\right)\right) - c_i$$

$$\pi_i = \frac{R - c_i}{N} \quad (3-9)$$

Percebe-se que os participantes estão dispostos a abdicar de uma maior parcela do seu lucro quando a concorrência aumenta. Quando o número de participantes aumenta os participantes incorporam na sua racionalidade que a probabilidade do seu custo ser o menor entre os $N - 1$ concorrentes diminui, por isso, existe um comportamento mais agressivo nos lances individuais o que acarreta em um menor lucro no caso de vitória.

⁴Este resultado corrobora o resultado clássico. Reescrevendo o lucro como porcentagem da receita $\frac{\pi}{R} = (1 - \frac{c_i}{R}) - b_i$ e definindo $v_i = (1 - \frac{c_i}{R})$, o equilíbrio clássico é dado por $\beta(v_i) = \frac{N-1}{N} v_i$.

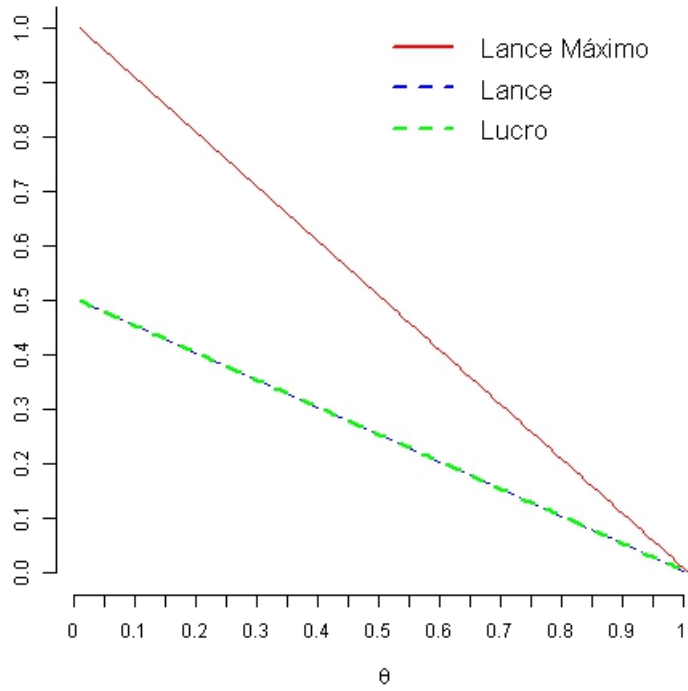


Figura 3.1: Lance ótimo com $N = 2$

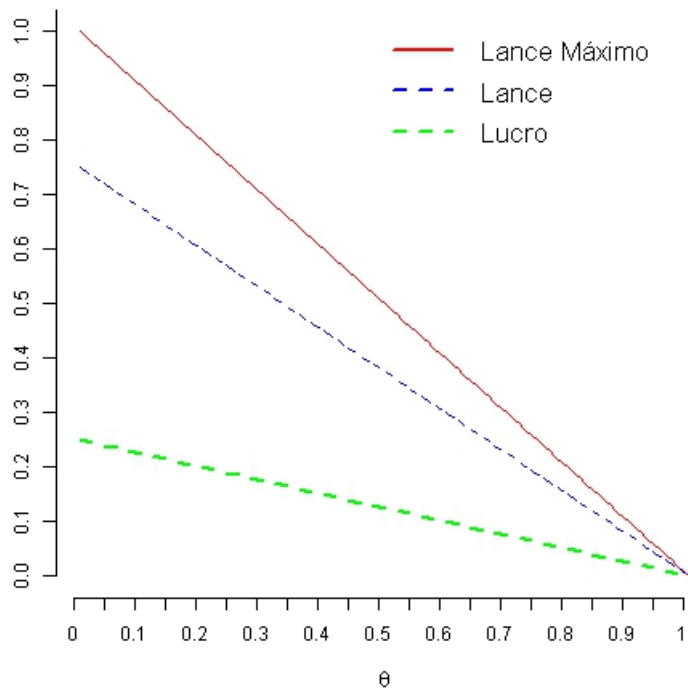


Figura 3.2: Lance ótimo com $N = 4$

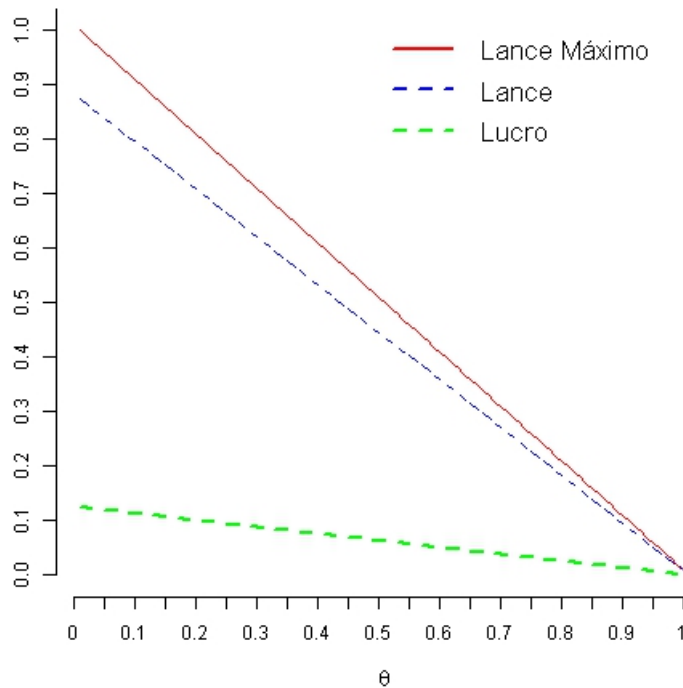


Figura 3.3: Lance ótimo com $N = 8$

3.2 Leilão Score

De forma análoga ao leilão anterior, cada licitante deve escolher um lance que maximiza o seu payoff esperado; entretanto uma nova variável é inserida no modelo, o tempo. Neste leilão os possíveis compradores submetem uma oferta do tipo $(d, t) \in [0, 1] \times (0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Os lances são ordenados de acordo com a score rule que é uma função $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (d, t) \rightarrow S(d, t)$ contínua, diferenciável e monótona. Ela representa a relação de preferência do governo entre o desconto na tarifa do serviço prestado e data de entrega. A regra do leilão é quase-linear ⁵ e pode ser expressa por

$$S(d, t) = d + \phi(t) \tag{3-10}$$

ela é monótona crescente em d , $\frac{\partial S}{\partial d} > 0 \quad \forall d \in [0, 1]$, e monótona decrescente em t , $\frac{\partial S}{\partial t} < 0 \quad \forall t \in (0, 1]$. A função ϕ escolhida pelo leiloeiro é por hipótese $\lim_{t \rightarrow 1} \phi(t) = 0$, além de ser contínua e monótona decrescente no intervalo $(0, 1]$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0$.

⁵Todo equilíbrio em um score auction pode ser encontrado via regras de ordenamento quase-linear (Asker and Cantillon, 2008).

O vencedor é o licitante que atingir a maior pontuação de acordo com a função S , este irá adquirir o direito de prestar o serviço. O contrato a ser celebrado pelo vencedor do leilão reflete o lance dado pelo mesmo, isto é, o preço cobrado pelo serviço e a data de entrega serão referentes ao lance vencedor.

Por simplicidade, supõe-se que existe um $t \in (0, 1]$ e $s \in \mathfrak{R}_+$ tal que $R(1 - (s - \phi(t))) - C(\theta_i, t) > 0 \quad \forall \theta_i$. Assim não há incerteza em relação ao tamanho da concorrência, todos os N compradores participam do leilão em equilíbrio.

Problema do licitante

Seja $s_i \in \mathfrak{R}$ o lance do comprador i e $s_{-i} \in \mathfrak{R}^{N-1}$ o lance de todos os demais compradores. Os lances são compostos pelas variáveis d e t de acordo com a função $S(d, t)$, então o payoff do comprador i é ⁶:

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{se } s_i < \max s_{-i} \\ R(1 - d) - C(\theta_i, t) & \text{se } s_i = \max s_{-i} \end{cases}$$

O governo decide a regra do leilão em um estágio anterior às decisões dos compradores. Por isso, quando os compradores escolhem suas estratégias a função score $S(d, t)$ é tomada como dada.

O problema do licitante é escolher o s_i que maximize o seu payoff esperado, mas s_i é resultado das escolhas de duas variáveis individuais. Para um dado s_i existe uma infinidade de combinações de (d, t) que atinge a mesma pontuação, mas cada proporção possível resulta em diferentes lucros. Pela racionalidade dos jogadores, a escolha do par (d, t) para cada s_i será referente ao maior lucro possível.

Todos os jogadores enfrentam o mesmo problema e por esse motivo escolhem de forma análoga as proporções de (d, t) . Dessa forma, associa-se cada lance um payoff diferente diminuindo a complexidade do problema, ou seja, o que se deseja é descrever o payoff do jogador i apenas em função do tipo e do lance do mesmo jogador. Para tanto, deve-se encontrar qual seria a escolha de (d, t) do jogador do tipo θ_i para todos os lances que este possa dar.

Suponha que o comprador i do tipo θ_i tenha ofertado um lance \bar{s}_i . A melhor combinação de (d, t) que maximizaria o seu lucro seria dado por:

⁶Novamente, não foi incluída a possibilidade de empate por considerar não significativo nas escolhas individuais

$$\begin{aligned} \max_{(d,t)} \quad & \pi(\bar{s}_i) \\ \text{sa} \quad & S(d,t) = \bar{s}_i \\ & 0 \leq d \leq 1 \\ & 0 < t \leq 1 \end{aligned} \quad (3-11)$$

Substituindo a score rule (3-10) na função lucro (3-11), obtêm-se

$$\begin{aligned} \max_t \quad & R(1 - (\bar{s}_i - \phi(t))) - C(\theta_i, t) \\ \text{sa} \quad & 0 \leq d \leq 1 \\ & 0 < t \leq 1 \end{aligned} \quad (3-12)$$

Derivando a expressão (3-12) em t encontra-se a seguinte condição de otimalidade.

$$R \cdot \phi'(t) = C'(\theta_i, t) \quad (3-13)$$

Esta é necessária porém não suficiente, pois em algumas situações a solução pode ser de canto. Define-se \hat{t}_{θ_i} como,

$$\hat{t}_{\theta_i} \equiv \operatorname{argmax}_t R \cdot \phi(t) - C(\theta_i, t) \quad (3-14)$$

Seja $\bar{\theta}$ tal que $R \cdot \phi'(1) = C'(\bar{\theta}, 1)$ e $\bar{\theta}$ tal que $\phi(t_{\bar{\theta}}) = s_i$. A partir de \hat{t}_{θ_i} , $\bar{\theta}$ e $\bar{\theta}$ encontra-se a trajetória ótima da variável t para cada s_i possível:

$$t_{\theta_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\theta} < \theta_i \\ \hat{t}_{\theta_i} & \text{se } \bar{\theta} \leq \theta_i \leq \bar{\theta} \\ \phi^{-1}(\bar{s}_i) & \text{se } \theta_i < \bar{\theta} \end{cases} \quad (3-15)$$

Percebe-se que t_{θ_i} quando escolhido de forma ótima independe da escolha de d . Por outro lado, a determinação de d sempre será residual em função de t e sempre não negativo:

$$d_i^* = \begin{cases} s_i & \text{se } \bar{\theta} < \theta_i \\ \bar{s}_i - \phi(t_{\theta_i}) & \text{se } \bar{\theta} \leq \theta_i \leq \bar{\theta} \\ 0 & \text{se } \theta_i < \bar{\theta} \end{cases} \quad (3-16)$$

Por isso, existe uma função $\Psi : \mathfrak{R}^2 \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathfrak{R}^2 : \Psi(\bar{s}_i, \theta_i) \rightarrow (d_i^*, t_{\theta_i})$ que representa a trajetória ótima de (d, t) para cada lance s_i do tipo de comprador θ_i .

Che e Asker assumem por hipótese que as restrições do problema (3-12) não são ativas e portanto apenas a condição (3-13) é suficiente para definir a trajetória do tempo diretamente e da taxa de desconto residualmente. Como eles tinham como objetivo definir e caracterizar o equilíbrio nos leilões multi-dimensional, esta simplificação não interfere em seus resultados. Entretanto, assume-se parcialmente essa hipótese. O que se quer é observar a transição da escolha do tempo máximo do leilão unidimensional para uma possível redução

no caso bidimensional. Por isso pode-se considerar a restrição do tempo como ativa. Por outro lado, o problema é simplificado quando se assume que a restrição da taxa de desconto não é ativa. A solução de canto obtida com esta restrição ativa está no apêndice.

Esta simplificação foi feita por três motivos. Primeiro, não é muito frequente os casos onde a taxa de desconto na tarifa é escolhida de forma nula, seria necessário um grande incentivo à redução do tempo por parte do governo e um tipo muito ineficiente do licitante. Em segundo lugar, assim como no caso unidimensional, a escolha do lance dependerá da trajetória dos custos dos demais jogadores que possuem custos maiores. Portanto, caso a restrição se torne ativa, a diferença do lance com a restrição e o lance sem a restrição é muito pequena. Por último, não há motivo para o governo escolher uma regra de ordenamento que incentive em excesso a variável tempo o suficiente para gerar tal distorção. Se o objetivo do leiloeiro fosse este, seria melhor escolher um leilão unidimensional com a variável tempo.

Pode-se, então, reescrever a trajetória de t e d :

$$t_{\theta_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\theta} < \theta_i \\ \hat{t}_{\theta_i} & \text{se } \theta_i \leq \bar{\theta} \end{cases} \quad (3-17)$$

$$d_i = \bar{s}_i - \phi(t_{\theta_i}) \quad (3-18)$$

Resta encontrar qual é o s_i^* que maximiza payoff esperado do comprador $\forall \theta \in \Theta$. Pela expressão (3-12) obtêm-se o limite superior de s_i , ou seja, para que o payoff seja não negativo é necessário que $0 \leq s_i \leq 1 + \phi(t_{\theta_i}) - \frac{C(\theta_i, t_{\theta_i})}{R}$ sempre. Caso contrário o licitante preferiria não participar do leilão.

De acordo com (Asker and Cantillon, 2008) para continuar a análise deve-se definir o pseudotipo dos jogadores. Pela expressão (3-12) nota-se que a trajetoria da curva de custo quando escolhida de forma ótima depende apenas de θ . Por isso a notação $C(\theta_i) \equiv C(\theta_i, t_{\theta_i})$ é usada doravante. Define-se, então, o pseudotipo por:

$$k(\theta_i) = R \cdot \phi(t_{\theta_i}) - C(\theta_i) \quad (3-19)$$

$R + \frac{k(\theta_i)}{R}$ representa o nível máximo de desconto que o licitante θ_i consegue atingir escolhendo t de forma ótima. Ela representa o trade-off entre o aumento dos custos gerados pela redução dos prazos de entrega e o crescimento da receita dado um s_i fixo. O pseudotipo é bem definido de acordo com a função score e a função de distribuição é relacionada com a densidade dos θ^7 .

⁷ $\forall \theta \in [0, R] \quad \exists t \in (0, 1]$ que satisfaz (3-17) e as funções $\phi(\cdot)$ e $C(\cdot)$ são por definição contínuas monotonas decrescente no intervalo $(0, 1]$. Portanto existe um $k(\theta)$ para cada $\theta \in \Theta$.

Dado $k(\theta_i)$, pode-se caracterizar o problema original do comprador em função do pseudotipo. Ele se resume a maximizar o lucro esperado já incorporando a regra do leilão.

$$\max_{s_i} P(s_i \geq \max s_{-i})(R(1 - s_i) + k(\theta_i)) \quad (3-20)$$

Novamente $P(s_i \geq \max s_{-i})$ é a probabilidade de vencer o leilão. Sabe-se que β é decrescente em θ . Seja $\beta(\theta_{-i}) = (\beta(\theta_1), \beta(\theta_2), \dots, \beta(\theta_{i-1}), \beta(\theta_{i+1}), \dots, \beta(\theta_N))$, tem-se $\max \beta(\theta_{-i}) = \beta(\min \theta_{-i}) = \beta(Y_\theta^{N-1})$, tal que Y_θ^{N-1} é a distribuição do mínimo dos θ_i dos $N - 1$ jogadores. Sabe-se que o comprador i ganha quando $\beta(Y_\theta^{N-1}) < s_i$ ou equivalentemente, $Y_\theta^{N-1} > \beta^{-1}(s_i)$. Portanto pode-se reescrever o lucro esperado como

$$E(\pi(s_i, s_{-i})) = H(\beta^{-1}(s_i)) \cdot (R(1 - s_i) + k(\theta_i)) \quad (3-21)$$

Novamente H é a função de densidade acumulada de Y_θ^{N-1} .

Derivando em relação a s_i tem-se,

$$\frac{h(\beta^{-1}(s_i))}{\beta'(\beta^{-1}(s_i))} \cdot (R(1 - s_i) + k(\theta_i)) - H(\beta^{-1}(s_i)) \cdot R = 0$$

Pela hipótese de simetria entre os licitantes $s_i = \beta(\theta_i)$. Substituindo na equação acima, encontra-se,

$$\frac{h(\theta_i)}{\beta'(\theta_i)} \cdot (R(1 - \beta(\theta_i)) + k(\theta_i)) - H(\theta_i) \cdot R = 0$$

Essa condição pode ser reescrita como:

$$h(\theta_i)\beta(\theta_i) + H(\theta_i)\beta'(\theta_i) = h(\theta_i) \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R} \right)$$

$$\frac{\partial(H(\theta_i)\beta(\theta_i))}{\partial\theta_i} = h(\theta_i) \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R} \right)$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} h(y)(1 + \frac{k(y)}{R})dy}{H(\theta_i)}$$

$$\beta(\theta_i) = E \left(1 + \frac{k(Y_\theta^{N-1})}{R} \mid \theta_i < Y_\theta^{N-1} \right) \quad (3-22)$$

Substituindo o pseudotipo,

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} h(y) \left(1 + \frac{R\phi(t_{\theta_i}) - C(y)}{R} \right) dy}{H(\theta_i)}$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} h(y) \left(1 + \phi(t_{\theta_i}) - \frac{C(y)}{R}\right) dy}{H(\theta_i)}$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} h(y) \left(1 - \frac{C(y)}{R}\right) dy}{H(\theta_i)} + \frac{\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}} h(y) \phi(t_y) dy}{H(\theta_i)} \quad (3-23)$$

$$\beta(\theta_i) = E\left(1 - \frac{C(Y_{\theta}^{N-1})}{R} \mid \theta_i < Y_{\theta}^{N-1}\right) + E(\phi(t_{Y_{\theta}^{N-1}}) \mid \theta_i < Y_{\theta}^{N-1}) \quad (3-24)$$

Esta é a fórmula geral do lance para qualquer distribuição de θ e qualquer formato das funções $C(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$. O primeiro termo, o valor esperado condicional dos custos, é sempre menor ou igual a oferta no caso do leilão com desconto na tarira, pois $C(\theta, t_{\theta}) \geq \theta \quad \forall \theta$. Entretanto o segundo termo é não negativo, pois $\phi(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0, 1]$, portanto não se sabe a principio se o valor absoluto do lance, quando comparado ao caso anterior, aumenta ou diminui.

Para prosseguir a análise, assume-se formas específicas para os custos, regra de ordenamento e distribuição dos tipos. Pela formula do caso geral (3-24), percebe-se que cada participante procura estimar qual é o maior lance possível do segundo participante mais eficiente, assumindo que ele possui o menor custo.

Novamente admite-se que a variável que define o tipo dos jogadores, θ , é uma variável aleatória extraída independentemente de uma distribuição uniforme $[0, R]$. Portanto a função de probabilidade acumulada de Y_{θ}^{N-1} é dada por:

$$H(\theta_i) = P(C(\theta_i) < \min C(\theta_{-i}))$$

$$H(\theta_i) = (1 - P(C(\theta) < C(\theta_i)))^{N-1}$$

$$H(\theta_i) = (1 - P(\theta < C^{-1}(C(\theta_i))))^{N-1}$$

$$H(\theta_i) = (1 - P(\theta < \theta_i))^{N-1}$$

$$H(\theta_i) = \left(1 - \int_0^{\theta_i} \frac{1}{R} dx\right)^{N-1}$$

$$H(\theta_i) = \left(1 - \frac{\theta_i}{R}\right)^{N-1} \quad (3-25)$$

Assume-se que a função custo é expressa por $C(\theta_i, t) = \frac{\theta_i}{t}$ e que a função que gera a pontuação de t seja linear $\phi(t) = a(1 - t)$, com $a > 0$. Inicialmente,

calcula-se t_{θ_i} usando (3-13) para todos os θ possíveis.

$$R(-a) = -\frac{\theta_i}{\hat{t}_{\theta_i}^2}$$

$$\hat{t}_{\theta_i} = \sqrt{\frac{\theta_i}{Ra}}$$

$$t_{\theta_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\theta_i}{R} \geq a \\ \sqrt{\frac{\theta_i}{Ra}} & \text{se } \frac{\theta_i}{R} < a \end{cases} \quad (3-26)$$

Dado t_{θ_i} calcula-se a trajetória do custo ótima em função apenas do seu tipo.

$$C(\theta_i) = \begin{cases} \theta_i & \text{se } \frac{\theta_i}{R} \geq a \\ \sqrt{\theta_i Ra} & \text{se } \frac{\theta_i}{R} < a \end{cases} \quad (3-27)$$

$$\frac{k(\theta_i)}{R} = \begin{cases} -\frac{\theta_i}{R} & \text{se } \frac{\theta_i}{R} \geq a \\ a - 2\sqrt{\frac{\theta_i}{R}a} & \text{se } \frac{\theta_i}{R} < a \end{cases} \quad (3-28)$$

Resta encontrar o valor esperado condicional de $1 + k(\theta)$. A princípio considere $a < \frac{\theta_i}{R} < 1$. Logo, $d = 1$, $C(\theta) = \theta$ e $\phi(t_\theta) = 0$. Retomando da equação 3-22.

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta}^{\bar{\theta}} h(y)(1 + \frac{k(y)}{R})dy}{H(\theta_i)}$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^R h(y)(1 - \frac{\theta}{R} + 0)dy}{H(\theta_i)}$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{\theta_i}{R}\right) \quad (3-29)$$

Para $\frac{\theta_i}{R} < a < 1$,⁸

$$E\left(1 + \frac{k(Y_{\theta_i}^{N-1})}{R} \mid \theta_i < Y_{\theta_i}^{N-1}\right) = -\frac{\int_{\theta_i}^R h(y) \left(1 + \frac{k(y)}{R}\right) dy}{H(\theta_i)} \quad (3-30)$$

$$= -\frac{\left[H(y) \left(1 + \frac{k(y)}{R}\right)\right]_{\theta_i}^R - \int_{\theta_i}^R H(y) \frac{k'(y)}{R} dy}{H(\theta_i)}$$

$$= \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \frac{\sqrt{\frac{a}{R}} \int_{\theta_i}^{Ra} \frac{H(y)}{\sqrt{y}} + \int_{Ra}^R \frac{H(y)}{R} dy}{H(\theta_i)}$$

⁸Devido aos limites de integração percorrerem o intervalo da direita para a esquerda o sinal do valor esperado se inverte. A notação é mantida para enfatizar que apenas os casos em os custos superiores aos individuais são relevantes privadamente.

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \frac{\sqrt{\frac{a}{R}} \int_{\theta_i}^{Ra} \frac{H(y)}{\sqrt{y}}}{H(\theta_i)} - \frac{\left[\frac{-(1-\frac{y}{R})^N}{N}\right]_{Ra}^R}{H(\theta_i)} \\
 &= \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \frac{\sqrt{\frac{a}{R}} \int_{\theta_i}^{Ra} \frac{H(y)}{\sqrt{y}}}{H(\theta_i)} - \frac{(1-a)^N}{H(\theta_i)N}
 \end{aligned}$$

Se $\frac{\theta_i}{R} < 1 < a$

$$E\left(1 + \frac{k(Y_{\theta_i}^{N-1})}{R} \mid \theta_i < Y_{\theta_i}^{N-1}\right) = \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \frac{\sqrt{\frac{a}{R}} \int_{\theta_i}^R \frac{H(y)}{\sqrt{y}}}{H(\theta_i)} \quad (3-31)$$

Não existe uma fórmula fechada para a integral $\int_{\theta_i}^R \frac{H(y)}{\sqrt{y}} dy$, mas $\forall \theta \in [0, 1]$, $0 \leq \int_{\theta}^R h(y)(1-\frac{y}{d_y}) dy \leq \int_{\theta}^R h(y)(1-y) dy$, pois $0 < d_y \leq 1$ portanto β é limitado. Além disso, $h(y)(1-\frac{r}{d_y}) \geq 0 \quad \forall y \in [1, R]$, ou seja apenas termos positivos são adicionados. Por esse motivo, a integral nunca diverge.

Para simplificar a notação define-se b como:

$$b(\theta_i) \equiv \frac{\int_{\theta_i}^{\min(Ra, R)} \frac{H(y)}{\sqrt{y}} dy}{H(\theta)}$$

Resumindo todos os casos, a estratégia ótima é:

$$\beta(\theta_i) = \begin{cases} \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{\theta_i}{R}\right) & \text{se } a < \frac{\theta_i}{R} < 1 \\ \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \sqrt{\frac{a}{R}} b(\theta_i) - \frac{(1-a)^N}{H(\theta_i)N} & \text{se } \frac{\theta_i}{R} < a < 1 \\ \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) - \sqrt{\frac{a}{R}} b(\theta_i) & \text{se } \frac{\theta_i}{R} < 1 < a \end{cases} \quad (3-32)$$

E o equilíbrio $(d_{\theta_i}, t_{\theta_i}) \forall i \in I$ é:

$$t_{\theta_i} = \min \left(\operatorname{argmax}_t R \cdot \phi(t) - C(\theta_i, t), 1 \right) \quad (3-33)$$

$$d_{\theta_i} = \beta(\theta_i) - \phi(t_{\theta_i}) \quad (3-34)$$

Novamente, o aumento da competição, entrada de novos compradores, faz com que em equilíbrio o $\beta^*(\theta_i)$ se aproxime do seu limite superior $1 - \frac{k(\theta_i, d_{\theta_i})}{R}$.

Se o peso relativo do tempo na função score for menor do que o retorno marginal da taxa de desconto na tarifa, ou seja se $0 < a < 1$, existe uma quebra estrutura na função de estratégia ótima individual. Essa quebra estrutural é representada pelas duas primeiras linhas da equação (3-32), no primeiro caso, $0 < a < \frac{\theta_i}{R}$, o incentivo gerado por a não é grande o suficiente para que o participante submeta um lance diferente ao do caso unidimensional.

No segundo caso, quando $\frac{\theta_i}{R} < a < 1$, existe um incentivo individual de mudança no lance, pois uma redução da variável tempo se torna mais atrativa; entretanto, essa possibilidade de inclusão do tempo com certa probabilidade

não é viável a todos os participantes. Por exemplo, caso $a = 0,5$ então em média $\frac{N}{2}$ participantes possuem $\frac{\theta}{R} < a$ e analogamente $\frac{N}{2}$ participantes possuem $\frac{\theta}{R} > a$. Por isso, participantes mais eficientes incorporam essa possibilidade em suas estratégias, podendo reduzir seus lances por entender que seus competidores se encontram em uma situação desfavorável.

Por fim, quando $\frac{\theta_i}{R} < 1 < a$, todos os participantes possuem incentivos grandes o suficientes para incluir o tempo como variável atuante nos lances. A função de estratégia ótima pode ser entendida como uma tentativa de estimar a maior pontuação possível dos seus concorrentes dado que este é o mais eficiente.

O lucro do vencedor é calculado de forma análoga ao primeiro caso, substituindo o lance ótimo (3-32) na expressão do payoff. Quando $a < \frac{\theta_i}{R} < 1$ caímos no caso anterior, então basta analisar quando $\frac{\theta_i}{R} \leq a$

$$\pi_i = R(1 - \beta(\theta_i) + \phi(d_{\theta_i})) - C(\theta_i, d_{\theta_i})$$

$$\frac{\pi_i}{R} = 1 + k(\theta_i) - \beta(\theta_i)$$

$$\frac{\pi_i}{R} = 1 + k(\theta_i) - \left(1 + \frac{k(\theta_i)}{R}\right) + \sqrt{\frac{a}{R}}b(\theta_i) + \frac{(1-a)^N}{H(\theta_i)N}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi_i}{R} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{R}}b(\theta_i) + \frac{(1-a)^N}{H(\theta_i)N}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi_i}{R} = 0$$

Os gráficos abaixo, da figura 3.4 à 3.12, foram construídos a partir do equilíbrio encontrado variando o N e o a .

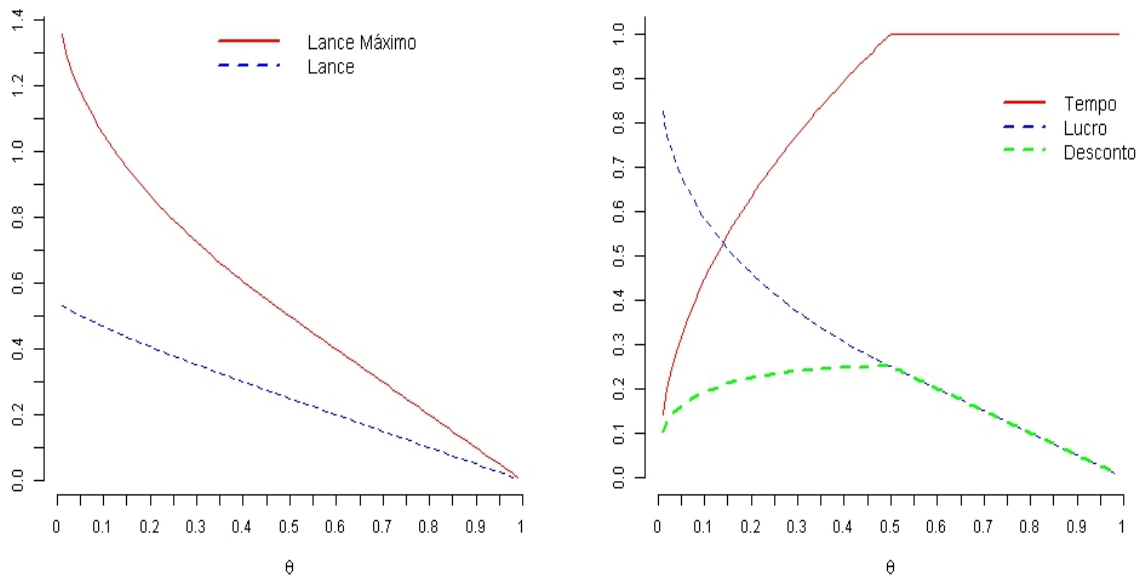


Figura 3.4: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 0.5$

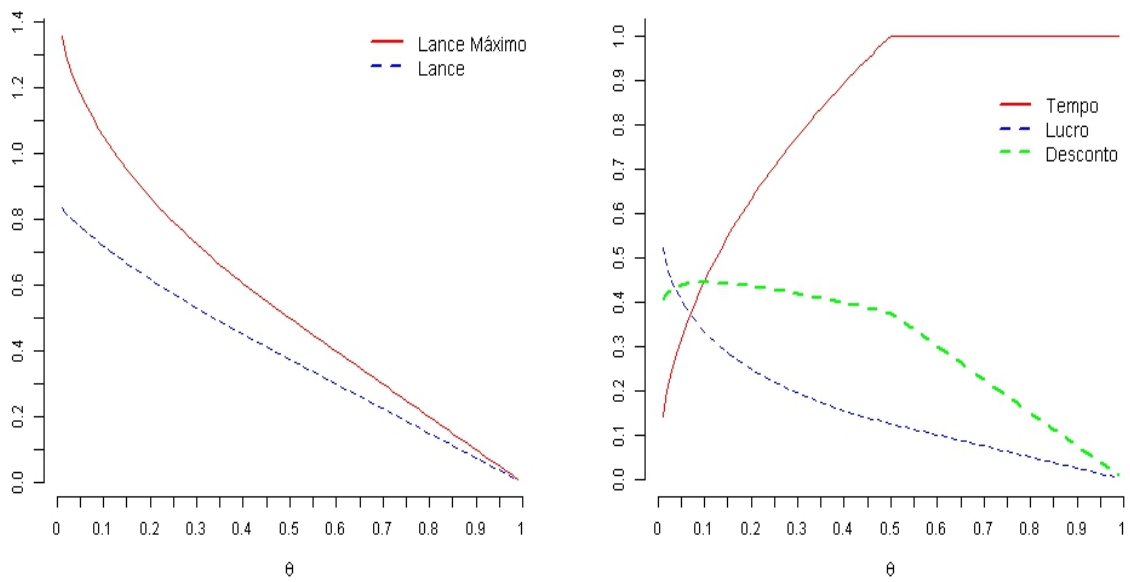


Figura 3.5: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 0.5$

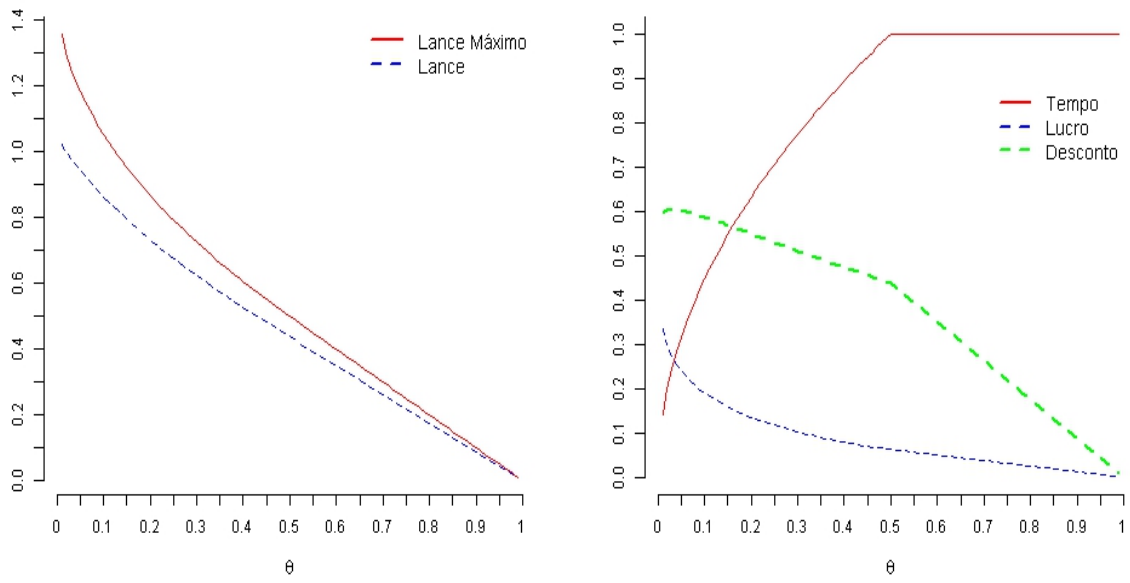


Figura 3.6: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 0.5$

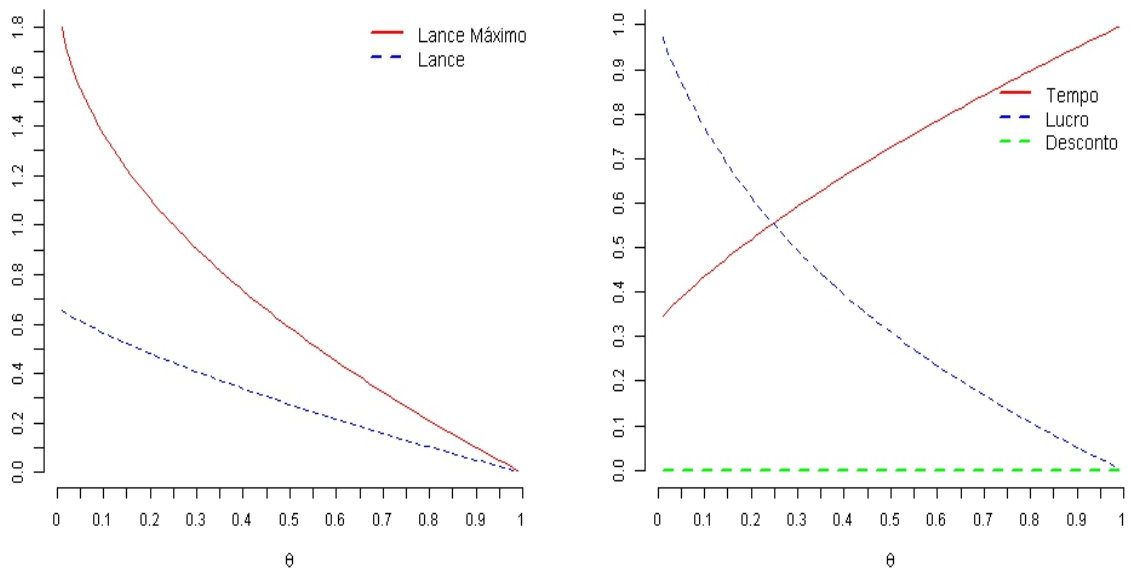


Figura 3.7: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 1$

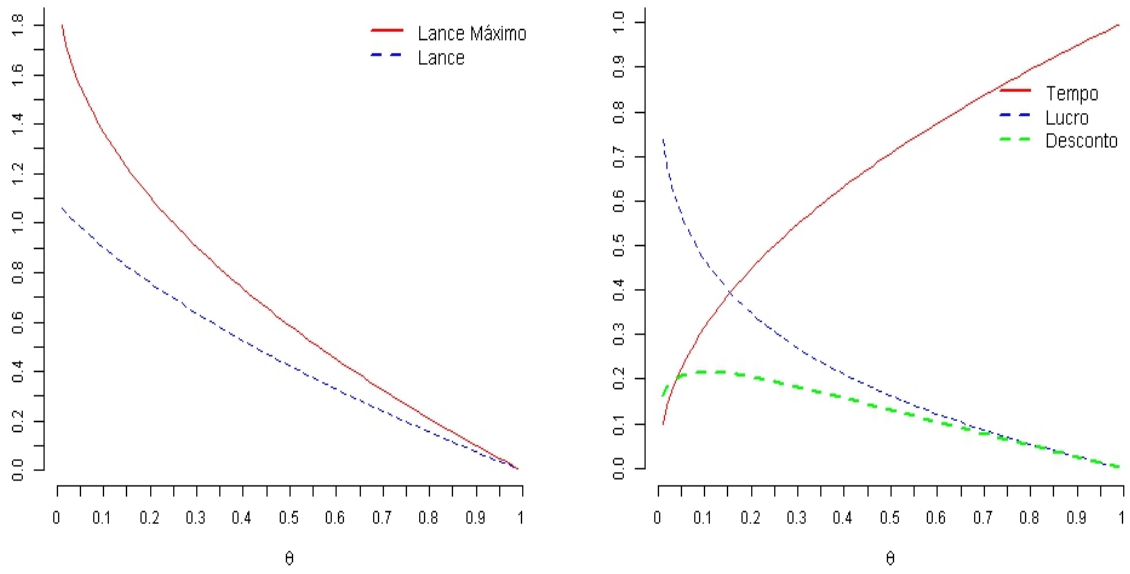


Figura 3.8: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 1$

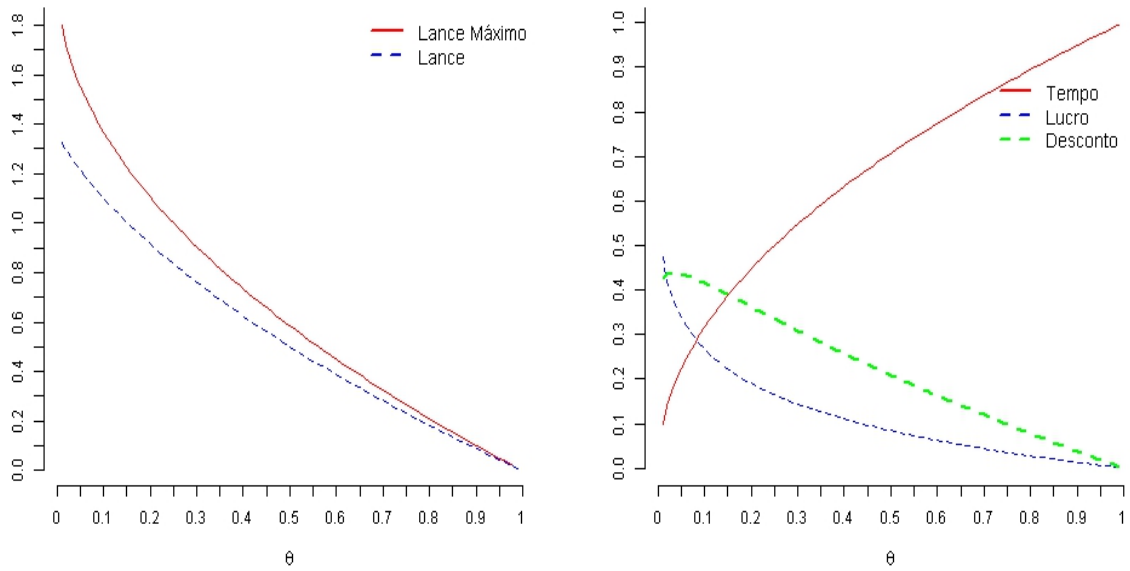


Figura 3.9: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 1$

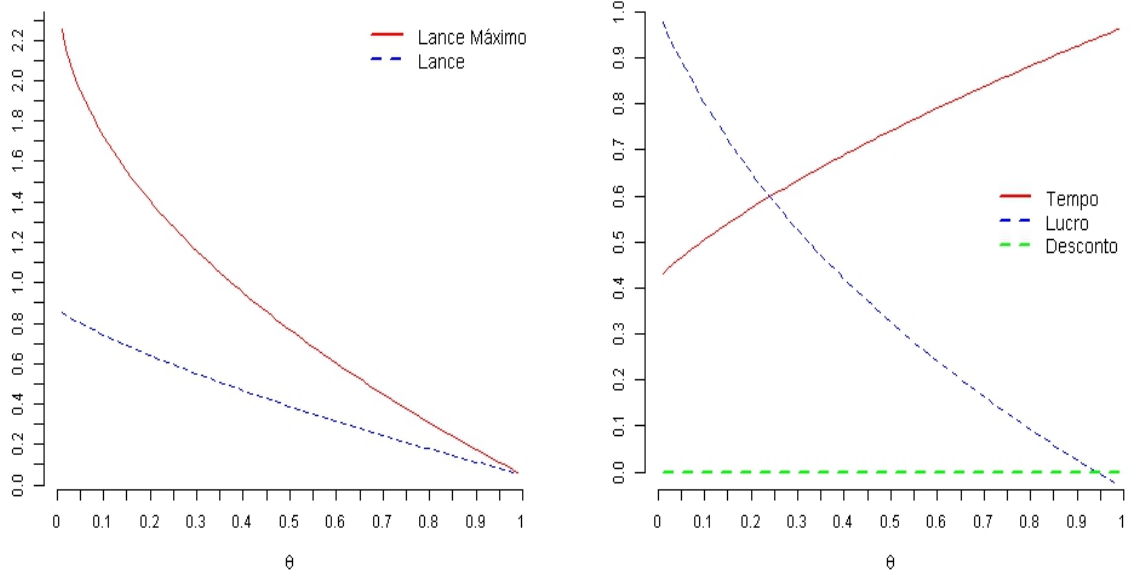


Figura 3.10: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 2$ e $a = 1.5$

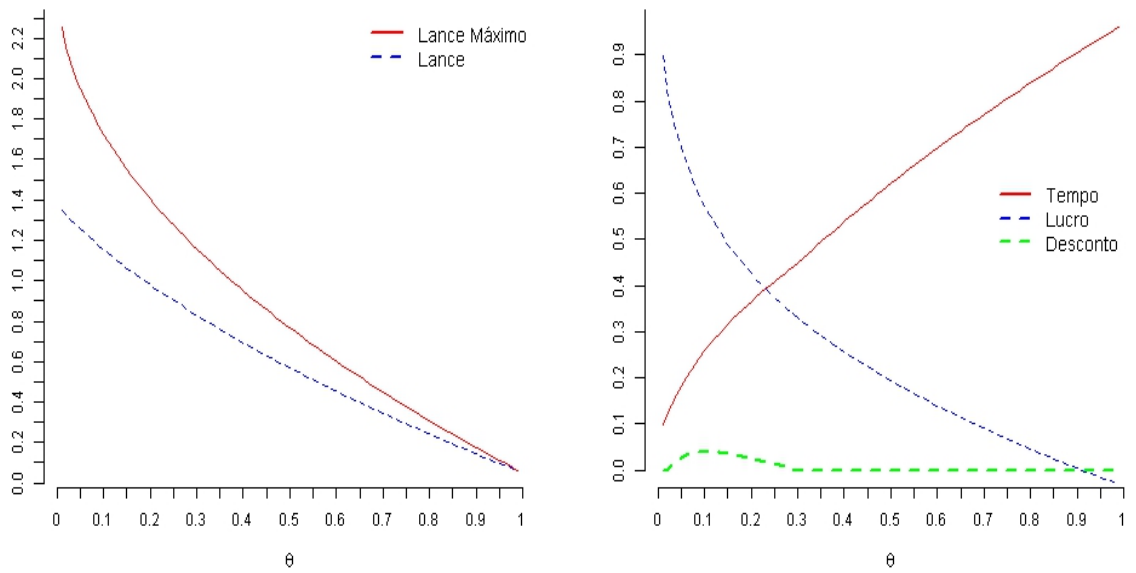


Figura 3.11: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 4$ e $a = 1.5$

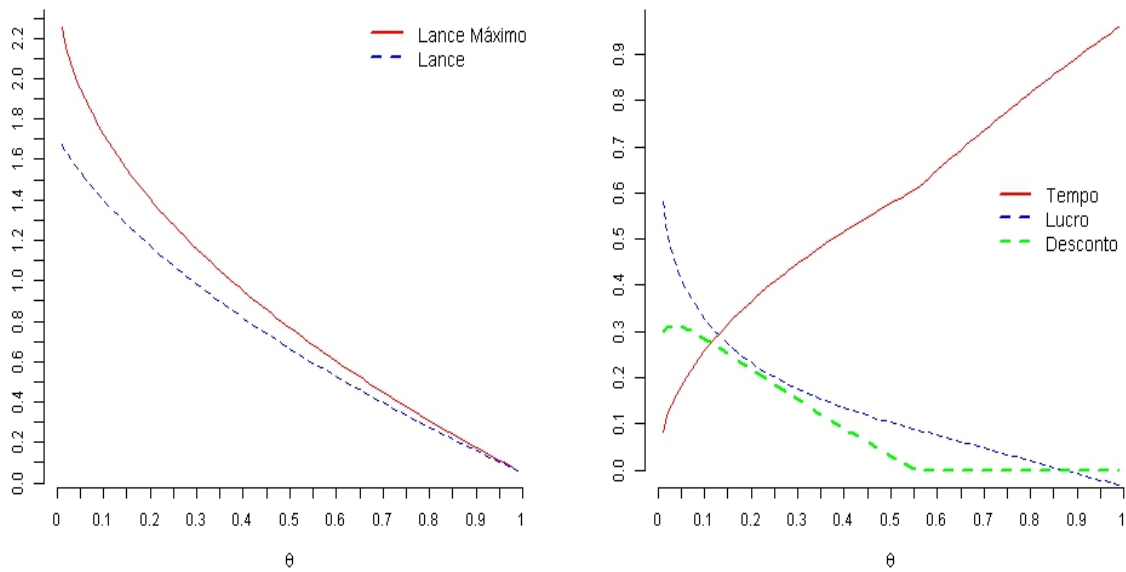


Figura 3.12: Lance ótimo no Leilão Score com $N = 8$ e $a = 1.5$

Uma forma diferente de abordar o problema do licitante é calcular qual o montante do lucro máximo possível que o participante aceita abdicar para ter uma maior probabilidade de vencer o leilão. Por essa ótica, percebe-se que as regras escolhidas no leilão, no nosso caso o a , não interferem diretamente no lucro do vencedor. O raciocínio anterior, utilizado na formação dos lances, gera os mesmos resultados, mas não evidencia com tamanha clareza a escolha de se arriscar, ou não.

Um comportamento mais agressivo nos lances está diretamente ligado ao tamanho da concorrência, ou seja, de quantos participantes (N) existem no leilão. Podemos observar isso claramente nos gráficos, fixado o a a curva lance se aproxima da curva lance máximo conforme o N se eleva. Lembrando que a curva “Lance Máximo” representa o lance que gera lucro zero ao licitante.

Conforme a aumenta, maior é o incentivo à redução do tempo. O lucro se mantém relativamente o mesmo aos demais equilíbrios fixado o N , mas a proporção tempo por taxa de desconto muda consideravelmente com a variação do a .

Quando $0 < a < 1$ existe uma quebra na estrutura dos lances quando $\frac{\theta}{R}$ é maior ou menor do que a . Se $\frac{\theta}{R} > a$ o participante é menos eficiente, possui custos elevados, e o benefício de aumentar a sua pontuação no ranque do leilão via redução do tempo é mais custoso do que pelo aumento na taxa de desconto na tarifa. Por isso a escolha de $t = 1$, e o lance é composto apenas

pelo d escolhido. Quando $\frac{\theta}{R} < a$ o benefício de se reduzir o tempo frente a tarifa ainda é pequeno, mas já é viável. Percebe-se que o lucro nesses casos se eleva rapidamente para os participantes mais eficientes, isso acontece porque a incapacidade dos menos eficientes em ofertar uma redução do tempo gera uma redução na competitividade dos mesmos.

Essa redução de competitividade relativa só acontece porque possibilitamos nas hipóteses que a restrição da variável tempo pudesse ser ativa. Geralmente, assume-se que o ponto do tempo ótimo para cada θ é um ponto interior ao conjunto de lances possíveis facilitando muito a construção da função lance. A escolha de não adotar essa hipótese foi no intuito de mostrar que quando se aumenta a dimensão do leilão sem gerar incentivos suficientes para a variável acrescentada, uma distorção negativa na competitividade pode ser gerada. Por isso, a escolha do a deve ser feita visando todos seus possíveis efeitos.

3.3

Problema do Leiloeiro

O governo atua neste modelo como o leiloeiro. Os instrumentos cabíveis para o leiloeiro são as regras do edital feitas antes do leilão acontecer. De acordo com o princípio da indução retroativa, as escolhas feitas no estágio anterior ao leilão devem antever os efeitos do comportamento estratégico individual em resposta as regras definidas. Em outras palavras, as regras devem ser formadas sabendo que a função lance dos indivíduos depende das mesmas regras. Dessa forma pode-se montar o problema do leiloeiro, ele maximiza o bem estar social sujeito as respectivas estratégias individuais para cada situação.

$$\begin{aligned}
 \max_{\phi(\cdot)} \quad & \Delta SW = SW_2 - SW_1 \\
 \text{sa} \quad & \beta(\theta^*) = E\left(1 - \frac{Y_\theta^{N-1}}{R} \mid Y_\theta^{N-1} > \theta^*\right) \\
 & \beta_s(\theta^*, \phi(t_{\theta^*})) = E\left(1 - \frac{k(Y_\theta^{N-1})}{R} \mid Y_\theta^{N-1} > \theta^*\right) \\
 & S(d, t) = \phi(t_{\theta^*}) + d_s^* \\
 & \psi(\beta_s(\theta^*, \phi(t_{\theta^*}))) = (d^*, t_{\theta^*})
 \end{aligned} \tag{3-35}$$

Onde o sobescrito $*$ representa os valores do participante vencedor e o subscrito s indica os valores do leilão bidimensional. As restrições valem com igualdade, por isso podem ser substituídas na função objetivo.

Quando a escolha de ϕ é a função nula, conseqüentemente $t^* = t_s^*$, $E(1 - \frac{Y_\theta^{N-1}}{R} \mid Y_\theta^{N-1} > \theta^*) = E(1 - \frac{C(Y_\theta^{N-1}, t_{\theta^*})}{R} \mid Y_\theta^{N-1} > \theta^*)$ e $d_{\theta^*s} = d_{\theta^*}$, logo ΔSW também se anula. Com isso, garante-se que apenas funções que aumentem o bem estar serão analisadas como possíveis soluções.

$$\max_{\phi(\cdot)} \quad AE \left(\frac{Y_{\theta}^{N-1} - k(Y_{\theta}^{N-1})}{R} \mid Y_{\theta}^{N-1} > \theta^* \right) - A\phi(t_{\theta^*}) \\ - \left(\frac{C(\theta^*, t_s^*) - C(\theta^*, 1)}{R} \right) - (L(t_s^*) - L(1)) \quad (3-36)$$

$$sa \quad t_{\theta^*} = \min(\operatorname{argmax}_t \quad R \cdot \phi(t) - C(\theta^*, t), 1)$$

Através da expressão acima pode-se analisar com maior clareza a dinâmica deste modelo. Este formato é válido para todas as distribuições possíveis de θ e regras de ordenamento quase-linear. Existem três termos principais no bem estar social, a diferença de utilidade gerada pela variação do preço, do custo e do tempo.

Na diferença dos custos pode ser visto o efeito direto da elevação de dimensões dos lances. A inclusão do t_{θ} aumenta os custos totais por consequência da redução do tempo. Portanto o participante vencedor presta o serviço com um custo maior comparado a ele mesmo em outra situação, diminuindo o bem estar social.

O primeiro termo é não positivo, a distorção causada pelo aumento no número de dimensões do leilão pode apenas aumentar os custos, por isso, o sinal do parêntese. Mais especificamente, este termo representa o efeito indireto do aumento dos custos refletidos nos descontos na tarifa do serviço. Este efeito tem a magnitude menor do que o segundo parêntese, pois o desconto na tarifa é função valor esperado dos custos. A bidimensionalidade do leilão com maior probabilidade força os competidores a ficarem mais agressivos abrindo mão de uma parcela maior dos lucros.

O último termo da expressão acima representa os ganhos no bem estar social relacionados à redução dos prazos na entrega da obra. Este é o único termo que mostra o benefício do leilão score, portanto ele deve superar os aumentos dos custos relacionados à mudança da regra no leilão. Caso contrário, os benefícios do leilão score não superaram seus malefícios, portanto o leilão bidimensional não deve ser implementado.

A partir de agora, volta-se a adotar as hipóteses usuais sobre a distribuição dos tipos. Considera-se a regra de ordenamento linear. Seja θ^* o participante vencedor, ou seja, aquele que tem o menor custo dentre todos. Se $\theta \sim U[0, R]$ e N pessoas competem entre si, então o valor esperado de $E(\theta^*) = \int_0^{\frac{R}{N}} x \frac{1}{R} dx = \frac{R}{2N^2}$.

Quando $\phi(\cdot)$ é linear com parâmetro a , o problema do leiloeiro é escolher $a \in [0, \infty)$ de forma a maximizar SW . Quanto maior o a maior o incentivo a

diminuição do tempo em relação à tarifa. Se o tempo ótimo para o governo é positivo $t_{gov} > 0$, não há benefícios em incentivar a redução do tempo via regra de ordenamento mais do que t_{gov} . Então $\exists \bar{a}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ a escolha de $a = \bar{a} + \varepsilon$ reduz SW sempre. Mais especificamente, não se quer um a grande o suficiente para que $\sqrt{\frac{\theta^*}{Ra}} < t_{gov}$, por isso $\bar{a} = \frac{\theta^*}{t_{gov}^2 R}$ e $E(\bar{a}) = \frac{1}{2N^2 t_{gov}^2}$. Portanto a escolha ótima do leiloeiro deve estar no intervalo $[0, \bar{a}]$.

Para resolver o problema do leiloeiro basta maximizar SW_2 em relação a a , pois SW_1 não depende de a . Para uma melhor análise, calcula-se SW_1 para poder comparar a ordem de grandeza.

$$SW_1 = A \cdot d - \frac{C(\theta^*, 1)}{R} - late(1 - t_{gov})$$

$$SW_1 = A \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{\theta^*}{R}\right) - \frac{\theta^*}{R} - late(1 - t_{gov}) \quad (3-37)$$

Sabe-se pela seção anterior que as estratégias individuais mudam de acordo com o a imposto aos licitantes. A função lance é continua em todos os seus pontos, mas não necessariamente derivável, pode existir um ponto onde não existe derivada. Isso acontece quando $a < 1$, neste caso, a função $\beta(\cdot)$ sofre uma quebra em sua estrutura para os casos em que $\frac{\theta}{R}$ é maior ou menor do que a .

Inicialmente, analisando o caso $a > 1$, sob esta condição não existe descontinuidade das funções $\beta(\theta^*)$ e t_{θ^*} . Portanto SW_2 pode ser calculado da seguinte forma.

$$SW_2 = A \cdot d_{\theta^*} - \frac{C(\theta^*, t_{\theta^*})}{R} - late(t_{\theta^*} - t_{gov})$$

$$SW_2 = A \left(\left(1 + \frac{k(\theta^*)}{R}\right) - \sqrt{\frac{a}{R}} b(\theta^*) - \phi\left(\sqrt{\frac{\theta^*}{Ra}}\right) \right) - \frac{\theta^*}{R \sqrt{\frac{\theta^*}{Ra}}} - late\left(\sqrt{\frac{\theta^*}{Ra}} - t_{gov}\right)$$

$$SW_2 = A \left(1 - \sqrt{\frac{\theta^* a}{R}} - \sqrt{\frac{a}{R}} b(\theta^*) \right) - \sqrt{\frac{\theta^* a}{R}} - late\left(\sqrt{\frac{\theta^*}{Ra}} - t_{gov}\right) \quad (3-38)$$

Derivando em relação a a e igualando a zero:

$$a = \frac{late}{A + 1 + \frac{b(\theta^*)}{\sqrt{\theta^*}}}$$

$$E(a) = \frac{late}{A + 1 + N t_{gov} \sqrt{2} b\left(\frac{R}{2N^2}\right)}$$

A escolha do governo é denominada como a_{gov} , lembrando que a é limitado por \bar{a} , tem-se que:

$$a_{gov} = \min \left(\frac{late}{A + 1 + Nt_{gov}\sqrt{2}b(\frac{R}{2N^2})}, \frac{1}{2N^2t_{gov}^2} \right) \quad (3-39)$$

Existe a possibilidade do a ótimo pertencer a $[0, 1]$. Neste caso $\frac{\theta^*}{R}$ pode ser maior ou menor que a , se $\frac{\theta^*}{R} > a$ volta-se no caso anterior unidimensional com $t_s = 1$ e $d_s = d$, por isso $SW_1 = SW_2$ e portanto $\Delta SW = 0$. Conclui-se que quando a é muito pequeno a inclusão da dimensão tempo não altera o resultado final quando comparado ao caso unidimensional. Se $\frac{\theta^*}{R} < a$ a expressão de SW_2 é dada por (3-38), mas $b(\theta^*)$ agora depende de a nos limites de integração impossibilitando encontrar uma fórmula fechada para a . A análise deve seguir numericamente nestes casos.

A seguir foi plotado as diferenças dos custos, a diferença da taxa de desconto na tarifa e o tempo para todos os tipos, a variando no intervalo $[0, 2]$ e $N = 8$.

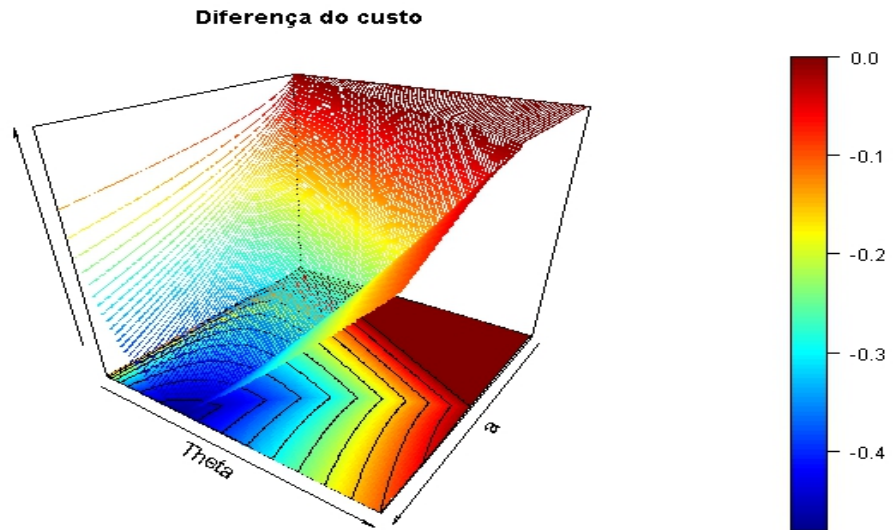


Figura 3.13: Diferença dos custos entre os leilões

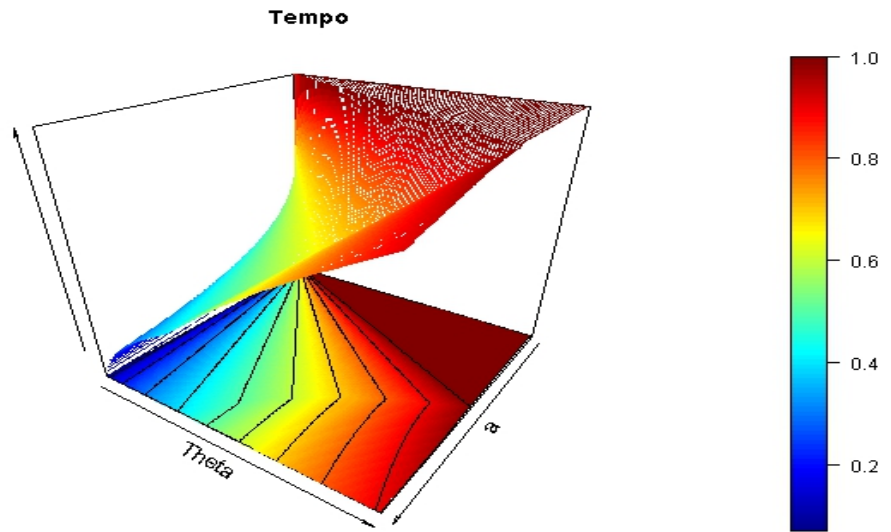


Figura 3.14: Tempo do leilão Score

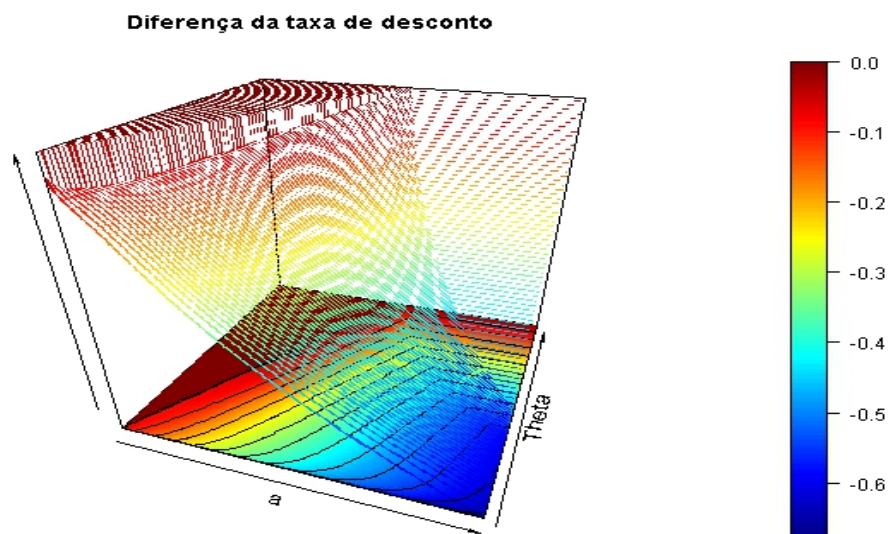


Figura 3.15: Diferença dos descontos da tarifa dos serviços entre os leilões

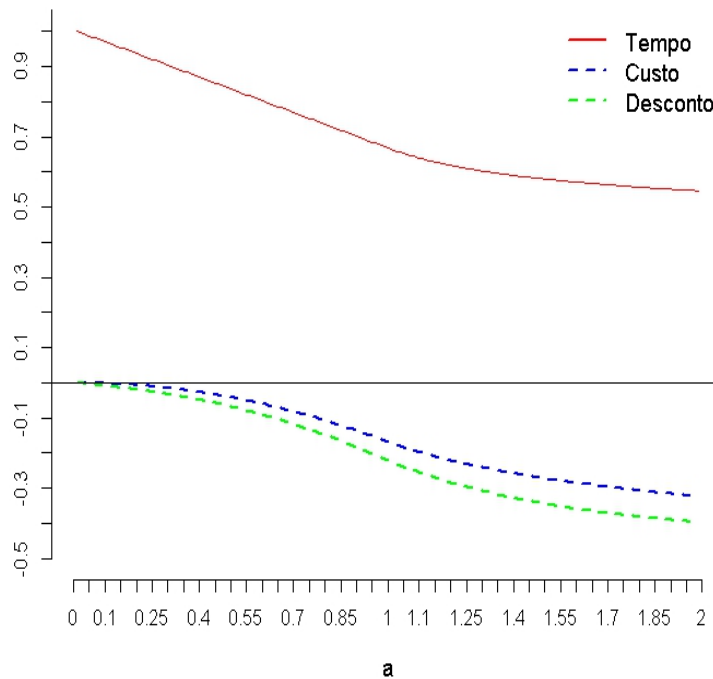


Figura 3.16: Médias dos custos e taxas de desconto das tarifas, variando em função de a

Pelos gráficos podemos ver as trajetórias das diferenças entre os leilões das principais variáveis relevantes para a utilidade do leiloeiro. Todas as trajetórias estão vinculadas diretamente à trajetória do tempo, pois é ela que distorce as demais variáveis quando comparada ao leilão unidimensional.

Quanto menor o θ , mais eficiente é o competidor e maior é o impacto do aumento do a na redução do tempo. O leiloeiro calcula a sua utilidade baseado no lance do vencedor e quanto maior o N , maior é a probabilidade do θ^* ser menor. Por isso podemos focar nossa análise na região do gráfico onde o θ se aproxima de zero. Nessa região as trajetórias são muito mais bruscas devido à redução acentuada do tempo.

Pode-se ver pelo gráfico das médias que a diferença da taxa de desconto nas tarifas é sempre não positiva e por isso existe uma necessidade de que a redução do tempo gere de fato benefícios. A bidimensionabilidade não gera, por si, um aumento na concorrência relativa suficiente para manter o preço do serviço a padrões anteriores.

A identificação de que se a variação do bem estar social, SW , é positiva ou negativa dependerá diretamente das variáveis de preferência, A , $late$. Mas, com os gráficos pode-se identificar uma tendência dependente do parâmetro a .

4

Conclusão

Esse trabalho modelou a atribuição de uma concessão de um serviço público. O processo foi estruturado como um jogo dinâmico no qual na primeira fase o governo, no papel de leiloeiro, escolhe as regras da licitação. Na segunda fase os participantes tomam ciência das regras do leilão via edital, e agem de acordo com os incentivos dados a eles no momento da decisão. O leiloeiro, objetivando a maximização de sua utilidade, escolhe as regras sabendo que essas interferem no comportamento estratégico dos licitantes.

Os serviços públicos, aqui em questão, são aqueles que geram benefícios sociais quando o tempo de espera por eles é reduzido, ou como aqui descrito, reduzem um custo pelo atraso que seria imposto a sociedade.

A modelagem identificou qual o conjunto de informações que deveria ser dado a cada agente, para que no momento da decisão se pudesse caracterizar a consequência das escolhas no resultado final; ou seja, quais os incentivos que devem ser dados aos licitantes durante o leilão e quais as consequências para o próprio governo quando da escolha do desenho do edital.

Apenas o leilão do tipo selado de primeiro preço com valores privados foi analisado, porém a dimensionalidade dos lances é constituiu elemento diferencial. No modelo, o governo avalia se um leilão bidimensional deve ou não ser implementado, tendo como base de comparação o leilão unidimensional. No leilão unidimensional, a variável que determina o vencedor é a maior taxa de desconto na tarifa, ou seja, quem prestará o serviço público com um menor preço no futuro. Já no leilão bidimensional, o lance dos participantes é composto por duas variáveis: taxa de desconto na tarifa e a data limite para iniciar prestação de serviços. O leiloeiro tem preferências no sentido de maior taxa de desconto e menor tempo na entrega.

A mesma linha de modelagem de leilões multidimensionais utilizada por Che (Che, 1991) foi adotada. Nela, a informação privada dos licitantes é referente aos seus próprios custos e apenas um objeto é leiloado. Assim como Che, este trabalho encontra qual a regra ótima de ordenamento do ponto de vista do governo. O desenvolvimento do modelo para se encontrar os lances ótimos individuais seguiu procedimentos análogos aos desenvolvidos por Asker

(Asker and Cantillon, 2008) através do conceito de pseudo-tipo. Com base nos equilíbrios encontrados, o governo pode entender quais são as situações em que a mudança de regime nos leilões gera benefícios à sociedade como um todo; ou seja, uma metodologia de análise foi desenvolvida. Além disso, identifica-se quais são as mudanças na qualidade do serviço e em seu preço para cada regra possível.

Uma extensão possível desse trabalho é uma aplicação direta do modelo proposto ao mercado de energia elétrica. A Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) através de licitação de concessões de instalações de transmissão de energia elétrica objetiva integrar o sistema elétrico brasileiro de forma a aproveitar a sazonalidade dos rios e permutar os excedentes de energia elétrica durante o período das cheias em cada região. A interligação entre os subsistemas ou sistemas isolados brasileiros diminui os riscos de falta de energia.

O modelo escolhido pelo Ministério de Minas e Energia para a otimização da escolha na proporção de fontes de energia provindas de hidráulicas e térmicas é o Valor Condicionado a um Dado Risco (Conditioned Value at Risk - CVaR). A unificação dos sistemas possibilita uma redução do acionamento das térmicas e, conseqüentemente, dos custos totais de produção, pois as usinas termoelétricas possuem custos muito elevados se comparados às usinas hidroelétricas. Através do CVaR é possível estimar uma redução dos preços da energia caso o sistema fosse interligado, o que, no modelo desse trabalho, representa o custo do atraso.

Usando dados de licitações de transmissões de energia já feitos, um exercício contra factual poderia ser feito com o objetivo de verificar se a implementação de um leilão bidimensional seria benéfico ou não. É possível ver, no modelo proposto nesse trabalho, que o preço cobrado pela transmissão de energia aumentaria ao adicionar a dimensão tempo no leilão, por outro lado, a redução do tempo diminuiria os custos de produzir energia por um tempo considerável.

Referências Bibliográficas

- [Asker and Cantillon, 2004] ASKER, J.; CANTILLON, E.. **Equilibrium in Scoring Auctions**. Working Papers 2004.148, Fondazione Eni Enrico Mattei, December 2004. 1, 2.2.1
- [Asker e Cantillon,2006] ASKER, J.; CANTILLON, E.. **Procurement When Price and Quality Matter**. Working Papers 06-24, New York University, Leonard N. Stern School of Business, Department of Economics, 2006. 2.2.1
- [Asker and Cantillon, 2008] ASKER, J.; CANTILLON, E.. **Properties of scoring auctions**. RAND Journal of Economics, 39(1):69–85, 2008. 2.2.1, 5, 3.2, 4
- [Bajari and Lewis, 2011] BAJARI, P.; LEWIS, G.. **Procurement Contracting with Time Incentives: Theory and Evidence**. NBER Working Papers 14855, National Bureau of Economic Research, Inc, Apr 2011. 2.3
- [Bushnell et al, 1994] BUSHNELL, J. B.; OREN, S. S.. **Bidder Cost Revelation in Electric Power Auctions**. Journal of Regulatory Economics, 6(1):5–26, February 1994. 2.3
- [Che, 1991] CHE, Y.. **Design Competition through Multidimensional Auctions**. Working papers 9123, Wisconsin Madison - Social Systems, 1991. 1, 2.2.1, 2.3, 4
- [Gibbons, 1992] GIBBONS, R.. **Game Theory for Applied Economists**. Princeton University Press, 1992. 2.1
- [Harsanyi, 1967] HARSANYI, J. C.. **Games with Incomplete Information Played by “Bayesian” Players, I-III Part I. The Basic Model**. Management Science, 14(3):159–182, November 1967. 2.1
- [ICMBIO, 2014] PARA A BIODIVERSIDADE, I. . I. C. M.. **CONTRATOS DE CONCESSÃO ATUALMENTE EM VIGOR NOS PARQUES NACIONAIS**. Technical report, ICMBIO â Instituto Chico Mendes para a Biodiversidade, 2014. 2.3

- [Krishna, 2009] KRISHNA, V.. **Auction Theory**. Elsevier Science, 2009. 2.2, 3.1, 3.1
- [Lewis and Bajari, 2013] LEWIS, G.; BAJARI, P.. **Moral Hazard, Incentive Contracts and Risk: Evidence from Procurement**. NBER Working Papers 17647, National Bureau of Economic Research, Inc, December 2013. 1, 2.3
- [MasColell, 1995] MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D. ; GREEN, J. R.. **Microeconomic Theory**. Número 9780195102680 em OUP Catalogue. Oxford University Press, 1995. 2.1
- [Menezes, 2008] MENEZES, F.; MONTEIRO, P.. **An Introduction to Auction Theory**. Número 9780199275991 em OUP Catalogue. Oxford University Press, 2008. 2.2
- [Milgrom, 2004] MILGROM, P.. **Putting Auction Theory to Work**. Número 9780521536721 em Cambridge Books. Cambridge University Press, October 2004. 2.2
- [Rezende, 2009] REZENDE, L.. **Biased procurement auctions**. *Economic Theory*, 38(1):169–185, January 2009. 1, 2.2.1
- [Vickrey, 1961] VICKREY, W.. **Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders**. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37, 1961. 2.2
- [Wilson, 2002] WILSON, R.. **Architecture of Power Markets**. *Econometrica*, 70(4):1299–1340, July 2002. 2.3

A Apêndices

A.1 Solução de canto quando o preço é máximo

No problema (3-12) quando a restrição em relação a taxa de desconto na tarifa é ativa a solução para o problema é uma solução de canto onde o lance é função apenas da data da entrega. O preço é o maior possível estipulado pelo leiloeiro $d = 0$. Para facilitar a abordagem redefine-se, apenas neste caso, o lance como $s_i \equiv \frac{1}{i}$. O payoff em termos da receita máxima é:

$$\frac{\pi_i(s_i, s_{-i})}{R} = \begin{cases} 1 - \frac{\theta_i}{R} s_i & \text{se } s_i \geq \max s_{-i} \\ 0 & \text{se } s_i < \max s_{-i} \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

logo os lances são limitados inferiormente, mas não superiormente, $s_i \in [1, \frac{R}{\theta}] \quad \forall i \in I$. Vence o leilao quem fizer a maior oferta, por isso o jogador i vence quando $s_i = \beta(\theta_i) > \max \beta(\theta_{-i})$. Sabe-se que $\beta(\theta)$ é estritamente decrescente em θ , então $\beta^{-1}(s_i) < Y_\theta^{N-1}$. O valor esperado do payoff é :

$$E(\pi_i(s_i, s_{-i})) = H(\beta^{-1}(s_i)) \left(1 - \frac{\theta}{R} s_i\right) \quad (\text{A-2})$$

Derivando em relação a s_i :

$$\frac{h(\beta^{-1}(s_i))}{\beta'(\beta^{-1}(s_i))} \left(1 - \frac{\theta_i}{R} s_i\right) - H(\beta^{-1}(s_i)) \frac{\theta_i}{R} = 0$$

Usando a hipótese de simetria entre os participantes, $s_i = \beta(\theta_i)$ pode ser substituído.

$$\frac{h(\theta)}{\beta'(\theta)} \left(1 - \frac{\theta}{R} \beta(\theta)\right) - H(\theta) \frac{\theta}{R} = 0$$

$$\frac{\partial(H(\theta)\beta(\theta))}{\partial\theta} = h(\theta) \frac{R}{\theta}$$

$$\beta(\theta_i) = \frac{R}{H(\theta_i)} \int_{\theta_i}^R \frac{h(y)}{y} dy \quad (\text{A-3})$$

$$\beta(\theta_i) = E \left(\frac{R}{Y_\theta^{N-1}} \mid \theta_i < \min \theta_{-i} \right) \quad (\text{A-4})$$

supondo as mesmas distribuições para os tipos, ou seja, $\theta \sim U[0, R]$. Tem-se que $H(\theta) = (1 - \frac{\theta}{R})^{N-1}$, substituindo na expressão acima encontra-se a

estratégia ótima:

$$\beta(\theta_i) = \frac{-(N-1)}{\left(1 - \frac{\theta}{R}\right)^{N-1}} \int_{\theta_i}^R \frac{\left(1 - \frac{y}{R}\right)^{N-2}}{y} dy$$

A partir da definição de s_i encontra-se o t^*

$$t^* = \frac{1}{\beta(\theta_i)}$$

O gráfico abaixo é a trajetória ótima de t e do lucro. Este equilíbrio foi encontrado usando $N = 2$ e $R = 1$.

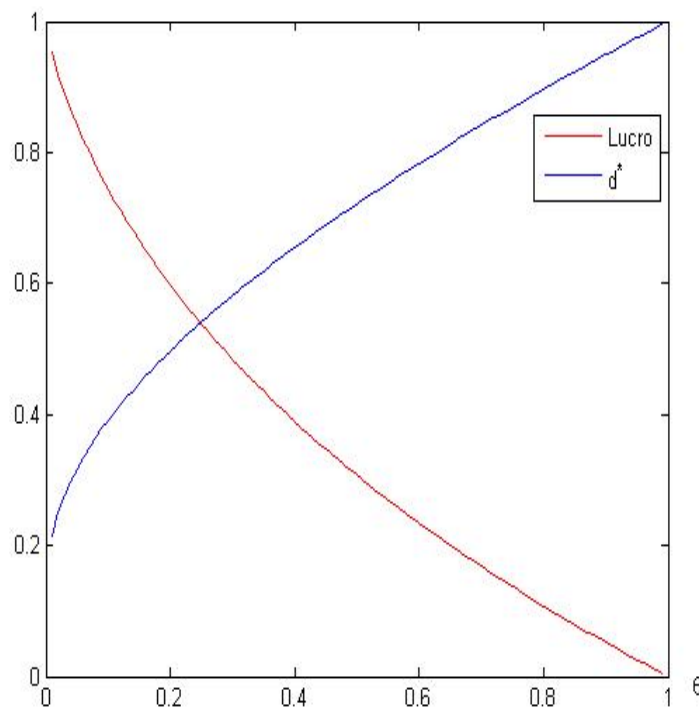


Figura A.1: Equilíbrio Solução de Canto com $N = 2$

A.2 Códigos

Seguem os códigos feitos no matlab para gerar os gráficos do leilão Score e da simulação feita para o leiloeiro.

```
function [Tempo, Custo, Desconto] = ScoreAuction(a, N)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% variáveis de input%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% a   regra definida pelo leiloeiro , a>0 sempre%
      %regra sempre linear phi(d) = a(1-d)
% N   numero de participantes , N>=2 %
%R=1; %tamanho da distribuição uniforme%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% vetores para históricos%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Desconto = zeros(1,99);
Tempo    = zeros(1,99);
Custo    = zeros(1,99);
Lance    = zeros(1,99);
Lucro    = zeros(1,99);
Theta    = (0.01: 0.01: 0.99); % grid da uniforme%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tempo      = min(1, sqrt(Theta/a));
Custo      = Theta./Tempo;

Pseudo_tipo = 1 + a*(1-Tempo) - Custo;
% Pseudo tipo + 1

f = @(x) (( 1 - x ).^(N-1))./sqrt(x) ;
% função para a Integração
```



```

if a>=1

    for i = 1: 99
        Int          = quadgk(f, Theta(1, i), 1) / ( (1
                - Theta(1, i)) ^ (N-1));
        Lance(1, i)  = Pseudo_tipo(1, i) - sqrt(a)*Int;
        Lucro(1, i)  = Pseudo_tipo(1, i) - Lance(1, i);
        Desconto(1, i) = max( Lance(1, i) - a*(1-Tempo(1, i)), 0);
        if Desconto(1, i) == 0
            Tempo(1, i) = 1 - Lance(1, i)/a;
            Custo(1, i) = Theta(1, i)/Tempo(1, i);
            Lucro(1, i) = 1 - Custo(1, i);

        end

    end
end

if a<1
    for j = 1: 99
        if Theta(1, j)>a

            Lance(1, j)    = ((N-1)/N)*(1-Theta(1, j));
            Lucro(1, j)    = 1-Lance(1, j) - Custo(1, j);
            Desconto(1, j) = Lance(1, j);

        end

        if Theta(1, j)<= a

            Int          = quadgk(f, Theta(1, j), 1) / ((1
                - Theta(1, j)) ^ (N-1));
            Lance(1, j)  = Pseudo_tipo(1, j) - sqrt(a)*Int -
                ((1-a)^N)/(N*(1-Theta(1, j)) ^ (N-1));
            Lucro(1, j)  = Pseudo_tipo(1, j) - Lance(1, j);
            Desconto(1, j) = max( Lance(1, j)
                - a*(1-Tempo(1, j)), 0);
        end
    end
end

```

```
        if Desconto(1,j) == 0
            Tempo(1,j) = 1 - Lance(1,j)/a;
        end
    end
end
end
```

```
figure
plot(Theta,Tempo,'b')
hold on
plot(Theta,Desconto,'r')
plot(Theta,Lucro,'g')
legend('Tempo', 'Desconto', 'Lucro' )
legend('Location', 'NorthEast')
xlabel('\theta')
title('Lance Ótimo')
```

```
figure
plot(Theta,Pseudo_tipo,'b')
hold on
plot(Theta,Lance,'r')
legend('Lance Maximo', 'Lance')
legend('Location', 'NorthEast')
xlabel('\theta')
title('Lance')
hold off
```

```

function [ dif_tempo , dif_custo , dif_desconto , Medias ] = Gov
N=8;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% variáveis de input %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%R=1;
%N % quantidade de participantes

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% vetores para históricos%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

dif_tempo      = zeros (199 ,99);
dif_custo      = zeros (199 ,99);
dif_desconto   = zeros (199 ,99);
media_custo    = zeros (1 ,199);
media_tempo    = zeros (1 ,199);
media_desconto = zeros (1 ,199);
a              = (0.01: 0.01: 1.99);
              % grid de valores possíveis de a%
Theta         = (0.01: 0.01: 0.99);
              % grid de theta%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for j = 1:199
    [Tempo, Custo , Desconto] = ScoreAuction (a (1 ,j) ,N);
    dif_tempo (j ,:)          = Tempo;
    dif_custo (j ,:)          = Theta - Custo;
    dif_desconto (j ,:)       = Desconto - ((N-1)/N)*(1-Theta);
    media_tempo (1 ,j)        = mean (dif_tempo (j ,:));
    media_custo (1 ,j)        = mean (dif_custo (j ,:));
    media_desconto (1 ,j)     = mean (dif_desconto (j ,:));
end

Medias = [media_tempo ' media_custo ' media_desconto '];

```

```
figure
surf(dif_tempo);
legend('Tempo')
legend('Location', 'NorthEast')
```

```
figure
surf(dif_custo);
legend('Diferença dos custos')
legend('Location', 'NorthEast')
```

```
figure
surf(dif_desconto);
legend('Diferença dos descontos')
legend('Location', 'NorthEast')
```

```
figure
plot(a, media_custo);
hold on
plot(a, media_tempo, 'r');
plot(a, media_desconto, 'm');
legend('Media da diferença dos custos',
       'Media do tempo', 'Media da diferença dos descontos')
legend('Location', 'NorthEast')
```

```
hold off
```