

## 2

### Autovalores e Estabilidade de hipersuperfícies mínimas.

Um problema de notável importância é decidir quando uma hipersuperfície mínima está minimizando a área, i.e, quando é um mínimo total ou pelo menos um mínimo relativo do funcional da área sobre todas as hipersuperfícies definidas sobre o mesmo domínio e com a mesma fronteira. Este problema é o que se entende por análise da estabilidade de uma hipersuperfície mínima. Com exatidão, a análise da estabilidade pode ser feita em casos mais gerais por exemplo em hipersuperfícies de curvatura média constante não necessariamente nula. Para este tipo de casos pode consultar [18, 22, 28].

Neste capítulo começaremos o estudo da estabilidade de hipersuperfícies mínimas introduzindo a primeira e segunda variação do funcional da área a partir da qual é definida a noção de estabilidade. Em particular, mostramos como a segunda variação do funcional da área pode ser estudada como a forma quadrática de um operador peculiar, o operador de estabilidade. Assim, a estabilidade poderá ser analisada segundo dito operador. Para aprofundar neste contexto na última seção introduzimos a teoria espectral mais relevante associada ao operador de estabilidade. Este será o ponto de partida dos critérios a serem tratados no próximo capítulo.

#### 2.1

##### Variação de uma hipersuperfície. Primeira e segunda variação do funcional da área.

###### 2.1.1

###### Variação de uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão de  $S$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com métrica induzida dada por  $g = f^*(g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ , tal que  $g_{\mathbb{R}^{n+1}}$  é a métrica do espaço ambiente  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  conjunto aberto relativamente compacto. A variação de  $f(S)$  com suporte compacto e fronteira fixada na hipersuperfície pode-se entender como uma família a um parâmetro de hipersuperfícies definida pela aplicação

$$\begin{aligned} F : S \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \epsilon > 0 \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

suave com as seguintes propriedades

- (i)  $F(x, 0) = f(x)$ .
- (ii)  $F(x, t) = f(x), \quad \forall x$  fora de  $\Omega, t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

**Observação 2.1.1.** *Antes de prosseguir façamos algumas observações importantes sobre esta definição:*

- Se  $S$  for compacta podemos considerar o conjunto  $\Omega$  como sendo ela mesma.
- O membro da família obtido para  $t = 0$  corresponde à imersão original  $(f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1})$ , o que significa que nesse instante não se está a realizar variação alguma.

O descrito anteriormente pode ser visualizado no seguinte desenho.

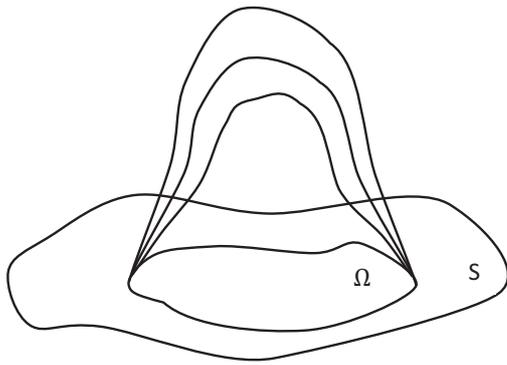


Figura 2.1:  $\Omega \subset S$ .

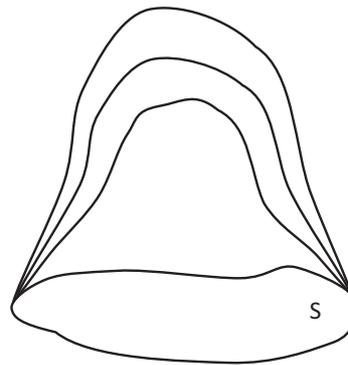


Figura 2.2:  $\Omega = S$ .

Assim, usando a expansão de Taylor definimos o campo variacional associado à variação como:

**Definição 2.1.1** (Campo variacional). *Seja  $F$  a variação de uma hipersuperfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada por (2.1) então esta pode ser escrita como*

$$F(x, t) = F(x, 0) + t \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + t^2 R(x, t) \tag{2.2}$$

com  $R(x, t) = O(1)$  quando  $t \rightarrow 0$ . O campo vetorial

$$Y(x) = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.3}$$

é chamado campo vetorial da primeira variação da família a um parâmetro de hipersuperfícies  $F(., t)$  ou simplesmente campo variacional.

**Observação 2.1.2.** *Note que o campo vetorial associado à variação pode ser decomposto em uma componente tangente e em uma componente normal. Portanto, poderemos falar de variação normal e variação tangente à hipersuperfície. Obtemos uma variação normal quando o campo vetorial definido acima seja normal à hipersuperfície em todo ponto da mesma.*

Mais precisamente:

**Definição 2.1.2** (Variação normal). *Uma variação  $F$  da hipersuperfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é dita normal quando o campo vetorial variacional  $Y(x) = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$  é normal à hipersuperfície em todo ponto.*

Para maiores detalhes veja [10, 11].

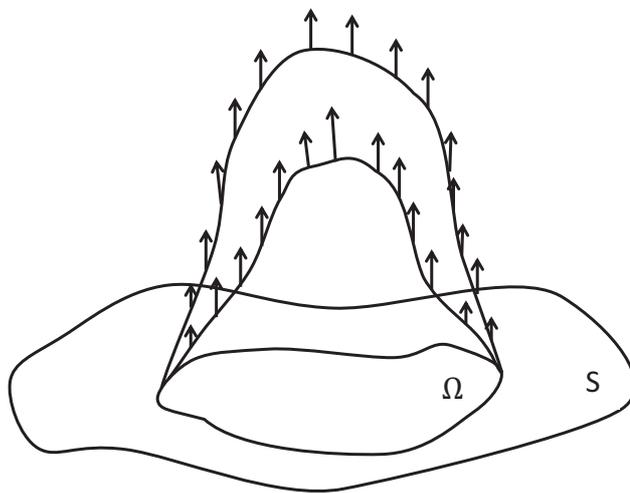


Figura 2.3: Variação Normal.

### 2.1.2

#### Primeira variação do funcional da área.

Vamos obter agora, de forma acurada, a primeira variação do funcional da área, mostrando que, resultarão relevantes somente as variações normais. Suponhamos que para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  fixado a aplicação

$$\begin{aligned}
 F_t : S &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \epsilon > 0 \\
 x &\mapsto F_t(x) = F(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

é uma imersão. Consideremos  $S$  munida da métrica induzida  $g_t$  por  $F_t$ ,  $g_t = F_t^*(g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ , tal que  $g_0 = g$ . Então, tomando a restrição de  $F_t$  a  $\Omega \subseteq S$ , a fórmula da área para a variação da hipersuperfície (que em dimensão  $n > 2$  representa um volume), é:

$$A(t) = Vol(\Omega) = \int_{\Omega} \omega_t, \tag{2.5}$$

com  $\omega_t$  a forma de volume associada a  $g_t$ . Sendo a área da hipersuperfície original  $A(0) = \int_{\Omega} \omega_0$  com  $\omega_0$  a forma de volume em  $S$  associada a  $g$ .

Tomemos agora o referencial canônico ortonormal  $\{X_1, \dots, X_n\}$  em  $S$  e o campo vetorial variacional  $Y = \frac{dF(x, t)}{dt} \in T\mathbb{R}^{n+1}|_{F_t(S)}$ . Com isto a métrica induzida em  $S$  é dada por

$$g_{ij}(t) = \langle X_i, X_j \rangle_{g_t}. \tag{2.6}$$

Então, a primeira variação do funcional da área se expressa como

$$A'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(\Omega), \tag{2.7}$$

logo,  $A'(0) = \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_t$ .

Denotando  $g(t) = \det(g_{ij}(t))$ , num ponto  $x \in \Omega \subset S$  podemos obter a forma explícita de  $\omega_t$  como segue:

$$\begin{aligned} \omega_t(x)(X_1(x), \dots, X_n(x)) &= \sqrt{\det \langle dF_t(x)X_i, dF_t(x)X_j \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}} \\ &= \sqrt{\det \langle X_i, X_j \rangle_{g_t}} \\ &= \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \\ &= \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

Dado que  $\det g_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij} G_{ij}$  com  $G_{ij}$  o menor  $ij$ -ésimo da matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtida a partir da matriz original omitindo a  $i$ -ésima fila e a  $j$ -ésima coluna temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d \det g_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{dg_{ij}(0)}{dt} G_{ij}(0) + \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij}(0) \frac{dG_{ij}(0)}{dt} \\ &= \frac{dg_{ii}(0)}{dt} + \frac{dG_{ii}(0)}{dt}, \end{aligned}$$

fazendo este procedimento  $n-1$  vezes e notando que em cada passo se obtém um dos elementos  $ii$ -ésimos, ( $i = 1, \dots, n$ ), resulta que

$$\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = \text{traço } g'(0) = \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \tag{2.8}$$

daí,

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_t \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sqrt{g(t)}) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \omega_0.
 \end{aligned}$$

E usando propriedades das conexões (veja apêndice)

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{d\langle dF X_i, dF X_i \rangle}{dt} \Big|_{t=0} \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \langle X_i, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i \langle \bar{\nabla}_Y X_i, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i \langle \bar{\nabla}_{X_i} Y, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \left( \sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, \bar{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \right) \omega_0.
 \end{aligned}$$

Decompondo  $\bar{\nabla}$  em sua parte tangente  $\nabla$  e sua parte normal  $\bar{\nabla}^\perp$  segundo a equação de Gauss (5.18) do apêndice e notando que  $\langle Y, \nabla_{X_i} X_i \rangle = 0$  e

$$\sum_i A(X_i, X_i) = \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle = \text{traço} A = n H$$

onde  $A$  é o operador de Weingarten e  $H$  a curvatura média de  $S$ :

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \left( \sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, A(X_i, X_i) N \rangle \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \left( \sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, n H N \rangle \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) \omega_0 - n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle H \omega_0. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Se consideramos somente variações normais  $\langle Y, X_i \rangle = 0 \quad \forall i, i = 1, \dots, n$  pois  $\langle Y, X_i \rangle$  mede as variações tangentes, assim, obtemos finalmente a fórmula da primeira variação da área para variações normais:

$$A'(0) = -n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle H \omega_0. \tag{2.10}$$

**Observação 2.1.3.** *A rigor deve-se notar que a fórmula (2.10) da primeira variação da área é a mesma para variações próprias. Sendo que as variações próprias correspondem a variações com fronteira fixada e campo variacional escolhido em qualquer direção. Isto se deve a que em qualquer caso,*

$$\sum_i X_i(\langle Y, X_i \rangle) = \operatorname{div}_{\Omega}(Y^T),$$

então, usando o Teorema de Stokes,

$$\int_{\Omega} \sum_i X_i(\langle Y, X_i \rangle) \omega_0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\Omega}(Y^T) \omega_0 = \int_{\partial\Omega} \langle Y^T, \eta \rangle = 0.$$

Ou seja, o primeiro somando em (2.9) é sempre nulo.

Denotemos por  $\phi$  a função  $\langle Y, N \rangle$  de (2.10), ou seja,  $\phi$  corresponde à componente normal do campo variacional. Note que  $\phi$  de classe  $C^{\infty}$  e com suporte compacto em  $S$  dado que  $Y(x) = 0$  para  $x \in S \setminus \Omega$ . Daí, obtemos diretamente uma condição necessária e suficiente para a nulidade desta variação: o Teorema Fundamental do Cálculo de Variações. Por conseguinte podemos mostrar como os pontos estacionários do funcional da área, em particular seus mínimos, são hipersuperfícies de curvatura média zero. Esta é a razão pela qual é usado o termo de mínimo para nomear às hipersuperfícies de curvatura média zero. Em resumo, obtemos uma outra caracterização de hipersuperfícies mínimas.

**Teorema 2.1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo de Variações). *A primeira variação  $A'(0)$  do funcional da área da hipersuperfície  $S$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  se anula se e somente se a curvatura média  $H$  de  $S$  é identicamente nula.*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $A'(0) = 0$ , suponhamos por absurdo que existe  $p \in S$  tal que  $H(p) \neq 0$ .

Para fixar ideias suponhamos que  $H(p) > 0$ , em outro caso a prova se repete. Como  $H$  é uma função contínua existe  $V_1$  vizinhança de  $p$  tal que para todo  $x \in V_1$  temos  $H(x) > 0$ . Escolhamos uma função suave  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} H & \text{em } V_1 \\ 0 & \text{em } V_2^c \end{cases} \quad (2.11)$$

com  $V_2$  tal que  $V_1 \subsetneq V_2$ . Ou seja,  $\phi(x) \geq 0$  e  $\phi(x) > 0$  em  $V_1$ . A existência desta  $\phi$  com campo variacional normal  $Y$  tal que  $\phi = \langle Y, N \rangle$  é dada como um caso particular do lema 2.2 em [2].

Seja  $Y$  o campo variacional, decompondo  $Y$  em sua parte tangente e sua parte normal obtemos:  $Y = Y^T + Y^\perp$ , assim,

$$\langle Y, N \rangle = \langle Y^T + Y^\perp, N \rangle = \langle Y^T, N \rangle + \langle Y^\perp, N \rangle = \langle Y^\perp, N \rangle, \quad (2.12)$$

daí,

$$\phi = \langle Y, N \rangle = \langle Y^\perp, N \rangle = \begin{cases} H & \text{em } V_1 \\ 0 & \text{em } V_2^c. \end{cases} \quad (2.13)$$

Logo,

$$A'(0) = -n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle \omega_0 = -n \int_{\Omega} \phi H \omega_0 = -n \int_{V_1} H^2 \omega_0 < 0 \quad (2.14)$$

o que contradiz a hipótese. Portanto  $H \equiv 0$ .

( $\Leftarrow$ ) É imediato que se  $H \equiv 0$  então  $A'(0) = 0$ . □

**Corolário 2.1.1.** *S é uma hipersuperfície mínima, se e somente se, para toda variação  $F_t$  temos*

$$A'(0) = 0. \quad (2.15)$$

**Demonstração.**

*Sabemos que uma hipersuperfície  $S$  é mínima por definição se e somente se  $H \equiv 0$ . E pelo teorema fundamental do cálculo de variações podemos concluir que  $H = 0$  se e somente se  $A'(0) = 0$ .* □

Doravante trataremos apenas variações normais ou próprias.

### 2.1.3

#### Segunda variação do funcional da área.

Como vimos, o conceito de primeira variação do funcional da área está estreitamente ligado com o conceito de hipersuperfícies mínimas. Agora veremos como o conceito de segunda variação está estreitamente ligado à estabilidade de hipersuperfícies mínimas.

Para fazer a dedução da fórmula da segunda variação vamos proceder usando a fórmula da primeira variação (2.10).

Seja a hipersuperfície  $S$  com variações  $F_t$  dadas pelas imersões (2.4). Assumamos que estas são variações normais de  $S$ , ou seja, para  $N$  a aplicação normal à hipersuperfície o campo vetorial variacional tem a forma  $Y = \phi N$

com  $\phi \in C^\infty$ .

Escrevendo  $\vec{H} = HN$  (equação (1.29)), temos que a primeira variação do funcional pode ser reescrito como:

$$A'(t) = -n \int_{\Omega} \langle Y, \vec{H} \rangle \omega_t.$$

Derivando de ambos lados para obter a segunda variação do funcional da área obtemos

$$A''(t) = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \omega_t - \int_{\Omega} \langle Y, n \vec{H} \rangle \frac{d}{dt} \omega_t. \quad (2.16)$$

E avaliando em  $t = 0$  observamos que o segundo somando à direita se anula por ser a hipersuperfície mínima. Assim, a segunda variação do funcional da área  $A''(0)$  resulta,

$$A''(0) = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \Big|_{t=0} \omega_0. \quad (2.17)$$

Para explicitar a forma de  $A''(0)$  tomemos  $x \in \Omega$  e o referencial ortonormal local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  definido numa vizinhança de  $x$  e comecemos por calcular  $\frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle$ .

Escrevamos o vetor curvatura média nas coordenadas locais dadas pelo referencial.

$$\begin{aligned} n \vec{H} &= n H N \\ &= \sum_i \langle A X_i, X_i \rangle N \\ &= \sum_i a_{ii} N \\ &= \sum_{i,j} b_{ij} g^{ij} N \\ &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, N \rangle g^{ij} N \end{aligned}$$

i.e,  $n \vec{H} = \left( \sum_{i,j} g^{ij} \bar{\nabla}_{X_i} X_j \right)^\perp$ , com  $A$  o operador de Weingarten tal que  $a_{ii}$  corresponde ao elemento  $ii$ -ésimo da matriz associada ao operador no referencial  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $b_{ij}$  os coeficientes da segunda forma fundamental e  $g^{ij}$  é tal que  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ . Daí,

$$n \langle \vec{H}, Y \rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \quad (2.18)$$

e por conseguinte

$$\frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \Big|_{t=0} = \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \frac{d g^{ij}}{dt} \Big|_{t=0} + \sum_{i,j} g^{ij} \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \Big|_{t=0}. \quad (2.19)$$

Por outro lado usando a relação  $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$  temos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dg^{ij}}{dt} \right|_{t=0} &= -\frac{dg_{ij}(0)}{dt} \\
 &= -\left. \frac{d\langle X_i, X_j \rangle}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= -\left. \frac{d\langle dF X_i, dF X_j \rangle}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= -Y(\langle X_i, X_j \rangle) \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_Y X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \bar{\nabla}_Y X_j \rangle \\
 &= -\phi \langle \bar{\nabla}_N X_i, X_j \rangle - \phi \langle X_i, \bar{\nabla}_N X_j \rangle \\
 &= \phi (\langle -\bar{\nabla}_N X_i, X_j \rangle + \langle X_i, -\bar{\nabla}_N X_j \rangle) \\
 &= \phi (\langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_j \rangle + \langle X_i, -\bar{\nabla}_{X_j} N \rangle) \\
 &= \phi (A(X_i, X_j) + A(X_j, X_i)) \\
 &= 2\phi (A(X_i, X_j))
 \end{aligned}$$

com  $A(X_i, X_j)$  a segunda forma fundamental nos campos  $X_i, X_j$ .

Nomeando os somandos em (2.19) como  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$$\mathcal{A} := \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \left. \frac{dg^{ij}}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} := \sum_{i,j} g^{ij} \left. \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \right|_{t=0}, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \left. \frac{dg^{ij}}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, \phi N \rangle 2\phi A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, N \rangle A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} \langle X_j, -\bar{\nabla}_{X_i} N \rangle A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} A(X_i, X_j)^2 \\
 &= 2\phi^2 |A|^2
 \end{aligned}$$

com  $|A|$  o módulo da segunda forma fundamental dado em (1.25). E,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \sum_{i,j} g^{ij} \left. \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \right|_{t=0} \\
 &= \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, \bar{\nabla}_Y Y \rangle \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_j} X_j, Y \rangle
 \end{aligned}$$

Usando o fato que  $[Y, X_i] = 0$  e as equações de compatibilidade (5.22) do apêndice

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_j} X_j, Y \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{X_j} \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle) - \langle \bar{\nabla}_Y X_j, \bar{\nabla}_{X_j} Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle) - \langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, \bar{\nabla}_{X_j} Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) - |\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2.
 \end{aligned}$$

Calculando os termos desta última diferença obtemos:

$$|\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2 = |\bar{\nabla}_{X_j}(\phi N)|^2 = |\phi \bar{\nabla}_{X_j} N + X_j(\phi) N|^2 = \phi^2 |\bar{\nabla}_{X_j} N|^2 + X_j^2(\phi)$$

$$\begin{aligned}
 X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) &= X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} \phi N, \phi N \rangle) \\
 &= X_j(\langle X_j(\phi) N + \phi \bar{\nabla}_{X_j} N, \phi N \rangle) \\
 &= X_j(X_j(\phi) \phi) \\
 &= X_j(X_j(\phi)) \phi + X_j^2(\phi)
 \end{aligned}$$

e somando por  $j$  cada um deles temos para o fator  $|\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2$

$$\begin{aligned}
 \sum_j |\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2 &= \phi^2 \sum_j |\bar{\nabla}_{X_j} N|^2 + |\nabla \phi|^2 \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_j} N, X_i \rangle^2 \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 \sum_{i,j} A^2(X_i, X_j) \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 |A|^2
 \end{aligned}$$

e para  $X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle)$

$$\begin{aligned}
 \sum_j X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) &= \sum_j X_j(X_j(\phi)) \phi + X_j(\phi)^2 \\
 &= \sum_j X_j(X_j(\phi)) \phi + |\nabla \phi|^2 \\
 &= \phi \left( \sum_j X_j(X_j \phi) - \bar{\nabla}_{X_j} X_j \phi \right) + |\nabla \phi|^2 \\
 &= \phi \Delta_S \phi + |\nabla \phi|^2.
 \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= -|\nabla\phi|^2 - \phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi + |\nabla\phi|^2 \\ &= \phi\Delta_S\phi - \phi^2 |A|^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle Y, n\vec{H} \rangle|_{t=0} &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \\ &= 2\phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi - \phi^2 |A|^2 \\ &= \phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Finalmente podemos expressar explicitamente a segunda variação do funcional da área  $A''(0)$  como:

$$A''(0) = - \int_{\Omega} \phi(\Delta_S\phi + \phi |A|^2)\omega_0, \tag{2.21}$$

ou, equivalentemente, usando fórmulas de Green pois  $\text{supp } \phi \subset \Omega$ ,

$$A''(0) = \int_{\Omega} (|\nabla\phi|^2 - \phi^2 |A|^2)\omega_0. \tag{2.22}$$

**Observação 2.1.4.** *Note que se  $F_t$  são variações próprias obtemos de igual maneira a expressão (2.22) como segunda variação do funcional da área onde  $\phi = \langle Y, N \rangle$  representa a componente normal do campo variacional. Por este motivo desde o início forem consideradas as variações como normais.*

**Observação 2.1.5.** *Para  $n = 2$ , em particular, a segunda variação da área segundo o campo variacional  $Y = \phi N$  com  $\phi$  que tem suporte compacto em  $\Omega$  resulta*

$$A''(0) = \int_{\Omega} (|\nabla_S\phi|^2 + 2K\phi^2)\sqrt{g}du dv = \int_{\Omega} (|\nabla_S\phi|^2 + 2K\phi^2)dA, \tag{2.23}$$

*pois, para uma superfície mínima de  $\mathbb{R}^3$  resulta que  $-|A|^2 = 2K$  com  $K$  a curvatura Gaussiana.*

**Observação 2.1.6.** *É possível deduzir a partir dos cálculos realizados para obter a fórmula da segunda variação do funcional da área (2.21) a equação:*

$$n \frac{\partial H}{\partial t} = \Delta\phi + |A|^2\phi, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.24}$$

*que será usada no capítulo 3.*

**Observação 2.1.7.** *Dada uma variedade Riemanniana  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  com  $M$  uma subvariedade compacta imersa em  $\widehat{M}$  ( $f : M \hookrightarrow \widehat{M}$ ), métrica induzida pela métrica da variedade e na qual é definida a conexão riemanniana. Podemos*

definir uma variação de  $M$  em  $\widehat{M}$  pela aplicação

$$F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M}$$

tal que  $F|_{t=0} = f(M)$  e  $F_t : M \rightarrow \widehat{M}$  são imersões.

Logo, a primeira variação do funcional da área possui a mesma forma. Contudo a segunda variação é dada pela seguinte fórmula:

$$A''(0) = - \int_M \phi(\Delta_M \phi + \phi |A|^2 + \phi \widehat{Ric}_N) \quad (2.25)$$

com  $\widehat{Ric}_N$  o tensor de curvatura de Ricci no vetor normal unitário a  $M$  (mais precisamente a  $f(M)$ ), que representa uma medida de quão não euclideana é uma variedade. No caso de uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$  este termo não aparece pois resulta nulo, para maiores detalhes pode consultar [13].

## 2.2

### Estabilidade de uma Imersão Mínima.

Lembrando os conceitos de mínimo local e mínimo estrito de uma função sabemos que para um mínimo local do funcional da área, a segunda variação deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$A''(0) \geq 0. \quad (2.26)$$

Enquanto que para um mínimo estrito do funcional da área a desigualdade terá que ser estrita, i.e,  $A''(0) > 0$ , o que conduz à seguinte definição:

**Definição 2.2.1** (Estabilidade de uma imersão mínima). *Seja  $S$  uma hipersuperfície mínima imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  pela imersão  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto em  $S$ . Dizemos que o domínio  $\Omega$  da hipersuperfície é estável se para toda variação normal  $F_t$  de  $f$  que fixa  $S \setminus \Omega$ :*

$$A''(0) = A''(\Omega, \phi N) \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}), \quad (2.27)$$

ou, equivalentemente, se

$$- \int_\Omega \phi(\Delta_S \phi + \phi |A|^2) \omega_0 \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}). \quad (2.28)$$

E dizemos que é estritamente estável se em qualquer um dos casos é satisfeita a desigualdade estrita. Se a hipersuperfície for completa e para todo  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto em  $S$  é satisfeita (2.27), ou equivalentemente (2.28), dizemos que a hipersuperfície é estável. Se somente é satisfeita a desigualdade estrita dizemos que a hipersuperfície é estritamente estável.

Uma hipersuperfície mínima pode não ser estável. De fato em [14], foi mostrado como as superfícies mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  são planos. Porém, podemos estabelecer a estabilidade em subdomínios da mesma, segundo a definição acima. Inclusive é possível determinar os domínios maximais de estabilidade.

**Definição 2.2.2** (Domínio maximal de estabilidade). *Um domínio  $D$  em  $\Omega \subseteq S$  é um domínio maximal de estabilidade se satisfaz simultaneamente as seguintes propriedades:*

- (i)  $D$  é estável.
- (ii)  $\forall D' \supset D; D' \neq D$ , aberto, tem-se que  $D'$  não é estável.

Associada à segunda variação do funcional da área temos o operador de estabilidade a partir do qual esta pode ser vista como uma forma quadrática, a rigor, como a forma quadrática associada ao mesmo.

**Definição 2.2.3** (Operador de estabilidade). *Seja  $S$  a hipersuperfície imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Seja a segunda variação do funcional da área da hipersuperfície dada por (2.21). Definimos o operador de estabilidade ou operador de Jacobi da hipersuperfície  $S$  (as vezes referenciado também como operador de segunda variação de  $S$ ) como*

$$L = -\Delta_S - |A|^2, \tag{2.29}$$

com forma quadrática associada dada por

$$J(\phi) = \int_{\Omega} \phi L \phi \omega_0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.30}$$

Em particular, para  $n = 2$  segundo a observação 2.1.5 o operador de Jacobi resulta  $L = -\Delta_S + 2K$ . Com forma quadrática associada

$$J(\phi) = \int_{\Omega} (-\phi \Delta_S \phi + 2K \phi^2) \omega_0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Note que a forma quadrática do operador de estabilidade corresponde exatamente à segunda variação do funcional da área (2.21). Assim, a estabilidade de uma imersão mínima pode ser estudada segundo a não negatividade desta forma quadrática. Mais precisamente, enunciamos uma outra variante de definição de estabilidade para um domínio na hipersuperfície a partir da forma quadrática associada ao operador de Jacobi. Assim como uma outra noção de domínio maximal de estabilidade como segue.

**Definição 2.2.4.** *Seja  $S$  uma hipersuperfície mínima imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  pela imersão  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto em  $S$ . Dizemos que*

(i)  $\Omega$  é estável se  $J(\phi) \geq 0$ ,  $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$

(ii)  $\Omega$  é estritamente estável se  $J(\phi) > 0$ ,  $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ .

**Definição 2.2.5.** *Seja  $S$  uma hipersuperfície mínima imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  pela imersão  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto e estável em  $S$ . Se para todo  $\Omega' \supsetneq \Omega$  existe  $\phi \in C_c^\infty(\Omega', \mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $J(\phi) < 0$  dizemos que  $\Omega$  é um domínio maximal de estabilidade.*

Ora, a forma quadrática de um operador qualquer é definida não negativa se e somente se os autovalores associados ao operador forem não negativos. E autovalores estritamente positivos correspondem a uma forma quadrática estritamente positiva. Por conseguinte teremos estabilidade de uma hipersuperfície mínima imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  se e somente se os autovalores associados ao operador de Jacobi para toda variação da hipersuperfície não forem negativos e estabilidade estrita se os mesmos forem estritamente positivos.

Por esta razão a ferramenta motora no estudo da estabilidade de uma imersão mínima estará baseada na examinação dos autovalores do operador de estabilidade. Mais precisamente, poderemos simplificar o estudo ao exame do primeiro autovalor como mostraremos na próxima seção.

**Observação 2.2.1.** *Em casos mais gerais é definido o operador de Schrödinger que tem a forma  $L_V = -\Delta_S + V$  com  $V$  uma suave (de classe  $C^\infty$ ). Por exemplo, para variedades riemannianas como vimos na observação 2.1.7,  $V = -|A|^2 - \widehat{Ric}_N$ . Já no caso unidimensional o operador apresenta uma forma muito simples dado que ao ter somente uma variável o operador laplaciano se reduz ao operador de segunda derivada. Tal operador é conhecido como operador de Sturm Liouville. O fato de trabalhar no espaço unidimensional facilita consideravelmente os cálculos e o uso de muitas mais propriedades. Daí que, alguns problemas definidos em dimensões maiores são transformados em problemas unidimensionais de modo que possa ser utilizado o operador de Sturm Liouville no análise da estabilidade. No próximo capítulo abordaremos este último ponto aprofundando um pouco nas propriedades do operador.*

Em qualquer caso se obtém a seguinte propriedade:

**Proposição 2.2.1.** *O operador de Jacobi é autoadjunto.*

**Demonstração.**

Pelas propriedades de simetria do operador laplaciano e dado que  $|A|^2$  é suave e não depende de  $\phi$  podemos concluir que a matriz associada a dito operador numa base ortonormal é simétrica. Ou seja, o operador de Jacobi é autoadjunto.  $\square$

## 2.3

### Teoria espectral dos autovalores associados ao operador de Jacobi.

A teoria espectral é bem rica, neste material nos limitaremos a estudar as propriedades dos autovalores associados ao operador de Jacobi que serão de maior utilidade para o desenvolvimento dos critérios de estabilidade a serem tratados. Mostraremos também em alguns casos como estas são válidas em contextos mais gerais.

Usaremos conhecimentos sobre os espaços de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$  e  $\dot{W}^{1,2}(\Omega)$  ([7], capítulo 9).

#### 2.3.1

##### Primeiro Autovalor associado ao operador de Jacobi.

Seja uma hipersuperfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com  $\Omega \subseteq S$  domínio regular relativamente compacto. Tomemos variações normais sobre  $S$  de modo que a forma quadrática associada ao operador de Jacobi  $L$  para  $\phi \in \Omega$  tem a forma

$$J(\phi) = \int_{\Omega} (-\phi \Delta_S \phi + |A|^2 \phi^2) \omega_0 \quad \text{com } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como  $|A|^2$  é uma função  $C^\infty$  sobre o compacto  $\bar{\Omega}$ ,  $|A|^2$  atinge o máximo e o mínimo nesse conjunto. Então podemos definir

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \phi L \phi \omega_0; \phi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} \phi^2 = 1 \right\} \quad (2.31)$$

ou de maneira equivalente

$$\begin{aligned} \lambda_1(L, \Omega) &= \inf_{\phi \in C_c^\infty(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0} \right\} \\ &= \inf_{\phi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Este valor  $\lambda_1(L, \Omega)$  como mostraremos a seguir corresponde ao primeiro autovalor associado ao operador de estabilidade  $L$  sobre o domínio  $\Omega$  da hipersuperfície  $S$ .

**Lema 2.3.1.** *Seja  $L = -\Delta_S - |A|^2$  o operador de estabilidade definido em  $\Omega$ . Seja  $\lambda_1 = \lambda_1(L, \Omega)$ , então, existe  $\psi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$  tal que*

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2\psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \tag{2.33}$$

Além disso,  $\psi$  é suave e vale

$$L(\psi) = \lambda_1\psi. \tag{2.34}$$

Ou seja,  $\lambda_1$  é o menor autovalor do operador de estabilidade  $L$ .

**Demonstração.**

Afirmamos que o ínfimo é atingido em  $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ .

Para mostrar isto tomemos uma sequência minimizante  $\psi_j \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ , i.e,  $\psi_j$  é tal que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi_j|^2 - |A|^2\psi_j^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi_j^2 \omega_0} \right\} = \lambda_1.$$

Pela definição de ínfimo

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi_j|^2 - |A|^2\psi_j^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi_j^2 \omega_0} \leq \lambda_1 + \frac{1}{j}. \tag{2.35}$$

Se substituirmos  $\psi_j$  por  $c\psi_j$  com  $c$  constante obtemos o mesmo resultado, logo, podemos assumir  $\int_{\Omega} \psi_j^2 = 1$  e assim  $\psi_j$  é uma sequência limitada em  $L^2(\Omega)$ .

Como o espaço  $\mathring{W}^{1,2}$  é reflexivo escolhendo uma subsequência se for necessário temos:

- (i)  $\psi_j$  converge no sentido fraco a  $\psi \in W^{1,2}$  e como  $\mathring{W}^{1,2}$  é o fecho de  $\mathbf{C}_c^1$  em  $W^{1,2}$ , resulta que  $\psi_j$  converge no sentido fraco a  $\psi \in \mathring{W}^{1,2}$ .

Pelo teorema de Rellich-Kondrakov (veja apêndice) temos que a inclusão  $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$  é compacta, i.e,  $W^{1,2}$  está incluído de modo compacto em  $L^2$  logo,

- (ii)  $\psi_j$  converge no sentido forte em  $L^2$  a  $\tilde{\psi}$ , em particular  $\int_{\Omega} \tilde{\psi} = 1$ .

Provemos agora que  $\psi = \tilde{\psi}$

Como  $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$  é compacta também é contínua. Logo, toda forma linear e contínua em  $L^2(\Omega)$  é também uma forma linear e contínua em  $W^{1,2}(\Omega)$ . E dado que convergência forte implica convergência fraca temos:

$$\psi_j \xrightarrow{L^2} \tilde{\psi} \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{L^2} \tilde{\psi} \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{W^{1,2}} \tilde{\psi}.$$

Então, pela unicidade do limite concluímos que  $\psi = \tilde{\psi}$ , em particular,  $\int_{\Omega} \psi^2 = 1$ .

Além disso, também pela convergência fraca tem-se que

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_j \|\nabla\psi_j\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 \omega_0 \leq \liminf_j \int_{\Omega} |\nabla\psi_j|^2 \omega_0,$$

i.e, a energia é semicontínua inferiormente. Consequentemente usando a suavidade de  $|A|^2$  e a definição de  $\lambda_1$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2} &\leq \frac{\liminf_j \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla\psi_j|^2 - |A|^2 \psi_j^2) \right\}}{\int_{\Omega} \psi_j^2} \\ &= \lambda_1 \\ &\leq \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2} \leq \lambda_1 \leq \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}. \tag{2.36}$$

Portanto

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}, \tag{2.37}$$

em particular, o ínfimo é atingido em  $\psi$ .

Para a verificação da equação de Euler  $L\psi = \lambda_1\psi$ , usaremos uma técnica padrão do cálculo de variações.

Seja  $\theta$  uma função diferenciável com suporte compacto em  $\Omega$  e tal que

$$\int_{\Omega} \theta\psi = 0.$$

Claramente

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_{\Omega} (\psi + t\theta)^2 \right) = 0,$$

logo,

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_{\Omega} (|\nabla\psi + t\theta|^2 - |A|(\psi + t\theta)^2) \right) = 2 \int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\theta \rangle - |A|^2 \psi\theta),$$

ou seja,

$$2 \int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\theta \rangle - |A|^2 \psi\theta) = 0.$$

Sendo esta última expressão válida para todo  $\theta \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} \psi\theta = 0$ .

Em particular, dado  $\xi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  escolhamos  $\theta = \xi - \psi \int_{\Omega} \xi\psi$  e substituimos na expressão acima obtendo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\theta \rangle - |A|^2 \psi\theta) \\ &= \int_{\Omega} \left( \langle \nabla\psi, \nabla\xi - \nabla\psi \int_{\Omega} \xi\psi \rangle - |A|^2 \left( \psi\xi - \psi^2 \int_{\Omega} \xi\psi \right) \right) \\ &= \int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\xi \rangle) - \int_{\Omega} \left( \langle \nabla\psi, \nabla\psi \int_{\Omega} \xi\psi \rangle - |A|^2 \xi\psi + |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi\psi \right) \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\xi \rangle - |A|^2 \psi\xi) &= \int_{\Omega} \left( \langle \nabla\psi, \nabla\psi \int_{\Omega} \xi\psi \rangle - |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi\psi \right) \\ &= \int_{\Omega} \xi\psi \int_{\Omega} \langle \nabla\psi, \nabla\psi \rangle - \int_{\Omega} |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi\psi \\ &= \int_{\Omega} \xi\psi \left( \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2 \right) \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} \xi\psi. \end{aligned}$$

Temos então

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla\psi, \nabla\xi \rangle - |A|^2 \psi\xi) = \lambda_1 \int_{\Omega} \xi\psi \tag{2.38}$$

válida  $\forall \xi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ . Logo,  $\psi$  é uma solução fraca de

$$L\psi = \lambda_1\psi. \tag{2.39}$$

Escolhendo, em particular,  $\xi = \psi$  em (2.38), e pela regularidade dos operadores elípticos,  $\psi$  é suave em  $\Omega$ . Portanto  $\psi$  é solução forte de (2.39). Ou seja, o ínfimo é atingido e vale a equação de Euler.

Por último temos que  $\lambda_1$  é o menor autovalor correspondente ao operador pois se existir qualquer autovalor menor do que este teríamos uma contradição com a definição de  $\lambda_1$  dada por (2.32).  $\square$

**Observação 2.3.1.** *A partir da demonstração realizada podemos deduzir que*

no caso de um operador de estabilidade do tipo  $L = -\Delta + V$  com  $V \in C^\infty$  (Operador de Schrödinger) definido num domínio  $\Omega$ , existe  $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 + V\psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \quad (2.40)$$

Por exemplo, para uma imersão  $S \hookrightarrow \widehat{M}$  com  $\widehat{M}$  variedade Riemanniana de dimensão  $n+1$  e  $\Omega \subset S$  relativamente compacto temos

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - |A|^2 \psi^2 - \widehat{Ric}_N \psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \quad (2.41)$$

**Observação 2.3.2.** Se a fronteira do domínio  $\Omega$  for suficientemente regular, i.e,  $\partial\Omega \in C^2$  podemos concluir também que  $\psi = 0$  em  $\partial\Omega$ .

**Resumo:**

A segunda variação do funcional da área  $A''(0)$  para a hipersuperfície  $S$  pode ser considerada como uma forma quadrática no espaço de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$ . E restringindo  $J(\phi) := A''(0)$  ao espaço de Sobolev  $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  das funções  $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$  com valores de fronteira nulos, a solução do problema variacional que resulta de minimizar  $J(\phi)$  para  $\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  impondo condição de normalização  $\int_{\Omega} \phi^2 dA = 1$  satisfaz o problema

$$\begin{cases} L\phi = \lambda\phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.42)$$

com  $\lambda = \lambda_1$  o primeiro autovalor dado por (2.31).

**Observação 2.3.3.** Como  $\lambda_1$  é o primeiro e menor autovalor, a sinal da forma quadrática associada ao operador de Jacobi é determinada pela sinal de  $\lambda_1$ . Com isto, podemos concluir sobre a estabilidade num domínio da hipersuperfície se o primeiro autovalor associado  $\lambda_1$  for positivo e sobre a estabilidade estrita se este fosse estritamente positivo, ou seja, basta analisar a sinal do primeiro autovalor. Esta observação pode ser resumida na seguinte proposição:

**Proposição 2.3.1.** Seja  $S$  hipersuperfície imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto e  $L$  o operador de Jacobi definido em  $\Omega$ . O domínio  $\Omega$  é dito estritamente estável se satisfaz que  $\lambda_1(L, \Omega) > 0$ . Se  $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$  então  $\Omega$  é chamado de estável. Se  $S$  for completa, não necessariamente compacta, e se todo  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto é estritamente estável dizemos que  $S$

é estritamente estável. Se todo  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto é estável  $S$  é chamado de estável.

**Observação 2.3.4.** A proposição acima continua sendo válida para  $S$  hipersuperfície dada pela imersão em uma variedade riemanniana  $\widehat{M}$  com  $\lambda_1$  como em (2.41).

Em qualquer caso para um domínio compacto  $\Omega$  o operador de Jacobi associado possui um número finito de autovalores negativos (veja a proposição 2.3.2 mais adiante). O número de autovalores negativos é definido da seguinte forma:

**Definição 2.3.1** (Índice de uma hipersuperfície mínima). *Seja  $L$  o operador de Jacobi definido sobre o domínio  $\Omega$  da hipersuperfície mínima  $S$ . O número de autovalores negativos de  $L$  em  $\Omega$  é dito índice de  $\Omega$  e se denota por  $Ind(\Omega)$ . Para a hipersuperfície mínima  $S$  o índice corresponde ao supremo de todos os índices sobre todos os domínios compactos em  $S$ , i.e*

$$Ind(S) := \sup \{Ind(\Omega); \Omega \Subset S\}. \quad (2.43)$$

**Observação 2.3.5.** *Note que se a hipersuperfície  $S$  não for compacta o índice de Morse da mesma poderia não ser finito. Para superfícies mínimas de  $\mathbb{R}^3$ , não necessariamente compactas o caráter do índice ser finito ou não pode ser estudado a partir da curvatura total da superfície o que é mostrado pelo seguinte teorema (veja [12]):*

**Teorema 2.3.1** (Teorema de Fischer-Colbrie). *Seja  $S$  superfície mínima orientável e completa em  $\mathbb{R}^3$ . Então*

$$Ind(S) < \infty \Leftrightarrow \left| \int_S K dS \right| < \infty. \quad (2.44)$$

**Observação 2.3.6.** *Em uma variedade compacta  $M$  o número de autovalores negativos é também finito. Mais precisamente podem ser estabelecidas estimativas para o número de autovalores negativos associados ao operador de Schrödinger definido na mesma (veja [17]).*

**Observação 2.3.7.** *A definição de índice de uma hipersuperfície nos fornece de uma outra caracterização de estabilidade: dizemos que uma hipersuperfície é estável se possui índice zero. O inconveniente desta é que a mesma não permite discernir entre a estabilidade ou a estabilidade estrita.*

### 2.3.2

#### Outras propriedades dos autovalores.

Como já mostramos podemos estabelecer antecipadamente sob hipóteses não muito restritivas a forma do primeiro autovalor. A seguir obtemos a forma explícita dos restantes autovalores.

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $L$  o operador de Jacobi definido sobre a hipersuperfície  $S$  e  $\lambda_1$  o seu primeiro autovalor definido por (2.32). Os restantes autovalores correspondentes ao operador  $L$  com autofunções associadas  $u_k, k \geq 2$  podem ser escritos indutivamente como*

$$\lambda_k = \inf \left\{ \frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}; \phi \in G_{k-1}^\perp, \phi \neq 0 \right\}; k \geq 2 \quad (2.45)$$

com  $G_{k-1} = [u_1, \dots, u_{k-1}]$ , i.e, o subespaço gerado pelas  $k - 1$  primeiras autofunções, e  $u_k \in G_{k-1}^\perp$ .

#### Demonstração.

Seja  $\lambda_1$  o primeiro autovalor associado ao operador de estabilidade  $L$ , dado por (2.32), com  $u_1$  a autofunção onde  $\lambda_1$  é realizado.

Definamos  $G_1 = \mathbb{R}u_1$  o subespaço gerado por  $u_1$ , então,  $Lu_1 = \lambda_1 u_1$  e  $L$  deixa invariantes aos subespaços  $G_1$  e  $G_1^\perp$ . Então, tomando o primeiro autovalor sobre o subespaço  $G_1^\perp \subset \mathring{W}^{1,2}$ , obtemos o nosso segundo autovalor  $\lambda_2$  com autofunção associada  $u_2$ . Definindo  $G_2 = G_1 \oplus \mathbb{R}u_2$  temos  $Lu_2 = \lambda_2 u_2$  com  $L$  deixando invariantes aos subespaços  $G_2$  e  $G_2^\perp$ . Repetindo este processo  $(k - 2)$  vezes obtemos todos os autovalores associados a nosso problema, os que podem ser escritos em forma crescente segundo

$$\lambda_1 < \lambda_2 \dots \leq \lambda_k \quad (2.46)$$

assim como suas autofunções associadas que constituem uma base de  $W^{1,2}(\Omega)$ .  $\square$

Esta sequência de autovalores também satisfaz a seguinte propriedade:

**Proposição 2.3.2.** *Seja  $\{\lambda_k\}, k \geq 1$  a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi obtidos em ordem crescente segundo o teorema 2.3.2 então  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  consiste em uma sequência infinita, i.e,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \dots \leq \lambda_k \rightarrow +\infty. \quad (2.47)$$

Além disso,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  é discreto.

#### Demonstração.

Seja  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi

obtidos em ordem crescente segundo o teorema 2.3.2, então,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  é limitada ou tende para o infinito.

Suponhamos que a sequência  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  é limitada, i.e,

$$\exists M > 0; \forall k \geq 1, |\lambda_k| \leq M. \quad (2.48)$$

Como  $Lu_k = \lambda_k u_k$ ,  $\forall k \geq 1$  temos diretamente da expressão (2.45) e de (2.48) que a sequência de autofunções  $\{u_k\}_{k \geq 1}$  é limitada uniformemente com a norma de  $W^{1,2}$ . Ora  $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ , com inclusão compacta, então  $\{u_k\}_{k \geq 1}$  é também limitada uniformemente com a norma de  $L^2$ . Logo, tomando uma subsequência se for necessário pelo teorema de Arselá-Ascoli,  $\{u_k\}_{k \geq 1}$ , converge uniformemente com a norma de  $L^2$ . Por conseguinte é de Cauchy nesta norma, i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0, \|u_n - u_m\|_{L^2} < \epsilon. \quad (2.49)$$

Por outro lado, como  $\{u_k\}_{k \geq 1}$  é uma sequência ortonormal temos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{L^2}^2 &= \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle_{L^2} \\ &= \langle u_n, u_n \rangle_{L^2} - 2\langle u_n, u_m \rangle_{L^2} + \langle u_m, u_m \rangle_{L^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

que contradiz (2.49). Portanto a sequência tende ao infinito.

Além disso como o conjunto dos autovalores consiste em uma sequência crescente infinita cada autovalor é isolado. Portanto, o conjunto de autovalores  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  é discreto.  $\square$

A forma de obter a sequência de autovalores segundo o teorema prévio pode resultar um tanto complicada à hora de procurar os autovalores para  $k \geq 3$ . Isto se deve a que dita construção exige que em cada passo sejam conhecidos o autovalor e autofunção associada do passo precedente. Um modo de evitar esta problemática é dado pelo resultado a seguir, conhecido como teorema de min – max. Estas e outras alternativas tem sido rigorosamente estudadas no capítulo 3 de [3].

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  o espaço de Sobolev das funções com suporte compacto em  $\Omega$ . Seja  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi, escritos em ordem crescente. Denotemos por  $G_k$  o conjunto de todos os subespaços lineares  $H_k$  de  $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  de dimensão  $k$ . Então o  $k$ -ésimo autovalor  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$  se caracteriza por*

$$\lambda_k(L, \Omega) = \inf_{H_k \subset G_k} \sup \left\{ \frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}; \phi \in H_k \subset G_k, \phi \neq 0 \right\}. \quad (2.50)$$

**Demonstração.**

Seja  $\{u_1, \dots, u_k\}$  uma base ortonormal de  $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  associada aos autovalores  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$  do operador. Seja  $G_k = [u_1, \dots, u_k]$  o subespaço gerado pelas autofunções  $u_k$ .

Denotemos o quociente  $\frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}$  por  $R_L(\phi)$ , ou seja,

$$R_L(\phi) = \frac{\langle L\phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle}, \quad (2.51)$$

e definamos

$$I_k := \inf_{H_k \subset G_k} \sup \{R_L(\phi); \phi \in H_k \subset G_k\}.$$

Seja  $\tilde{u} \in \mathring{H}_k := \{\phi \in H_k \subset G_k; \phi \neq 0\}$  um elemento qualquer. Então,

$$\tilde{u} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k, \quad \text{com } a_j = \langle \tilde{u}, u_j \rangle, \forall j = 1, \dots, k.$$

Usando (2.51) e a ortonormalidade de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  temos que

$$R_L(\tilde{u}) = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j a_j^2}{\sum_{j=1}^k a_j^2}.$$

Logo,  $R_L(\tilde{u}) \leq \lambda_k$ , portanto tomando o supremo dos  $\tilde{u} \in \mathring{H}_k$  temos

$$\sup_{\tilde{u} \in \mathring{H}_k} \{R_L(\tilde{u})\} \leq \lambda_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Como o resultado é válido  $\forall k \geq 1$ , em particular, vale para o ínfimo sobre todos  $\tilde{u} \in H_k \subset G_k, \tilde{u} \neq 0$ , i.e,

$$\inf_{H_k \subset G_k} \sup_{\tilde{u} \in \mathring{H}_k} \{R_L(\tilde{u}), \tilde{u} \neq 0\} \leq \lambda_k,$$

ou seja,

$$I_k \leq \lambda_k.$$

Para mostrar a desigualdade contrária notemos que  $H_k$  é um subespaço  $k$ -dimensional de  $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$  com  $\Omega$  de dimensão  $n$ , daí

$$\dim \mathring{H}_{k-1}^\perp = n + 1 - k.$$

Consequentemente, existe  $\tilde{u} \in \mathring{H}_k \cap \mathring{H}_{k-1}^\perp$ , i.e, existe  $\tilde{u} \in \mathring{H}_k$  que é ortogonal a cada uma das autofunções  $u_j, j = 1, \dots, k - 1$ . Portanto para  $\tilde{u}$  o quociente  $R_L(\tilde{u})$  é

$$R_L(\tilde{u}) = \frac{\sum_{j=k}^\infty \lambda_j a_j^2}{\sum_{j=k}^\infty a_j^2}$$

com  $a_j = \langle \tilde{u}, u_j \rangle$  como na primeira parte da demonstração. Daí,

$$R_L(\tilde{u}) \geq \inf_{u \in \mathring{H}_{k-1}^\perp} \{R_L(u); u \neq 0\} =: \lambda_k,$$

ou seja,  $R_L(\tilde{u}) \geq \lambda_k$  em qualquer subespaço,  $k$ -dimensional. Então,

$$\sup_{\tilde{u} \in \mathring{H}_k} \{R_L(\tilde{u}); \tilde{u} \neq 0\} \geq \lambda_k$$

também em qualquer subespaço  $k$ -dimensional. Como a desigualdade é válida em qualquer subespaço  $k$ -dimensional  $H_k$ , segue que  $I_k \geq \lambda_k$ .

Portanto  $I_k = \lambda_k$  como desejado. □

**Observação 2.3.8.** *A notação  $R_L$  não foi escolhida ao acaso, para simplificar a escritura, deve-se à notação a partir da qual é definido o quociente de Rayleigh, que para o operador de Jacobi adquire esta forma particular. Mais precisamente,*

**Definição 2.3.2** (Quociente de Rayleigh). *Seja  $A$  um endomorfismo simétrico de um espaço  $E$ , definimos o quociente de Rayleigh associado a  $A$  para todo  $x \in E$  como*

$$R_A := \frac{\langle A(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \text{ para } x \neq 0. \tag{2.52}$$

com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representando o produto escalar definido no espaço  $E$ .

Note que o termo  $\langle A(x), x \rangle$  representa uma forma quadrática. Assim, dado que o operador de Jacobi  $L = -\Delta_S - |A|^2$  é simétrico, o quociente de Rayleigh para  $L$  na hipersuperfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $\Omega \subseteq S$  relativamente compacto se define por

$$R_L(\phi) = \frac{\langle L\phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle} = \frac{\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_\Omega \phi^2 \omega_0} \tag{2.53}$$

como tínhamos usado.

E no caso de uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  teríamos

$$R_L(\phi) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\phi|^2 - 2K\phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0}.$$

Com isto a forma do primeiro autovalor (2.32) pode-se reescrever como

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} R_L(\phi). \tag{2.54}$$

Para um operador elíptico autoadjunto geral, i.e, um operador simétrico da forma

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} + c$$

de maneira semelhante a como foi provado no lema 2.3.1 (veja [16] capítulo 8.12) se prova que o primeiro autovalor num domínio  $\Omega$  pode ser definido como

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf_{u \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} R_L(u) \tag{2.55}$$

com  $R_L(u)$  o quociente de Rayleigh associado a este operador mais geral. Precisamente a prova do lema 2.3.1 mostra este resultado para  $R_L(u)$  definido como em (2.53).

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $\mathbb{S}_+^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2, x_3 \geq 0\}$ . Procuraremos o primeiro autovalor do operador Laplaciano  $\Delta_{\mathbb{S}_+^2}$  em  $\mathbb{S}_+^2$ .

Note que em este caso o operador elíptico se reduz ao laplaciano sobre  $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{R}^3$  tomado com sinal negativa.

Sabemos que  $\mathbb{S}^2$  tem curvatura média  $H = -1$  (veja exemplo 1.1.9) e pela relação (1.48) temos

$$\Delta_{\mathbb{S}_+^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \Delta_{\mathbb{C}} \tag{2.56}$$

pois é possível estabelecer uma parametrização conforme de um aberto de  $\mathbb{R}^2$  na esfera com fator conforme dado por  $\Lambda$  (veja teorema 1.1.3). Logo, segundo a relação  $\Delta X = 2H\Lambda^2 N$  do teorema 1.2.2 tem-se que  $\Delta_{\mathbb{S}_+^2} X = -2N$ . Assim, com respeito ao vetor unitário normal exterior num ponto  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $N = (x_1, x_2, x_3)$ , a restrição  $h$  da função coordenada  $x_3$  a  $\mathbb{S}^2$  satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}_+^2} h + 2h = 0 & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ h = 0 & \text{em } \partial\mathbb{S}_+^2. \end{cases} \tag{2.57}$$

Então, pelo visto anteriormente para o caso de um operador elíptico qualquer

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}_+^2}, \mathbb{S}_+^2) &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} R_{\Delta_{\mathbb{S}_+^2}}(h) \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{\langle -\Delta_{\mathbb{S}_+^2} h, h \rangle}{\langle h, h \rangle} \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{- \int_{\mathbb{S}_+^2} h \Delta_{\mathbb{S}_+^2} h dA}{\int_{\mathbb{S}_+^2} h^2 dA} \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{- \int_{\mathbb{S}_+^2} h(-2h) dA}{\int_{\mathbb{S}_+^2} h^2 dA} = 2.
 \end{aligned}$$

Note que no caso do operador Laplaciano  $R_\Delta > 0$  sempre, assim, associado a este operador o primeiro autovalor é sempre estritamente positivo.

Definindo o problema de Dirichlet associado ao operador de Jacobi obtemos a propriedade a seguir a qual desencadeia em mais dois outras propriedades fundamentais na teoria dos autovalores: a propriedade do primeiro autovalor ser simples e a propriedade de monotonicidade dos autovalores.

**Lema 2.3.2.** *Seja  $\phi$  uma função suave no domínio  $\Omega$  que satisfaz o problema de Dirichlet para o operador de Jacobi:*

$$\begin{cases} L\phi = \lambda_1\phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.58}$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor associado a dito operador em  $\Omega$ . Então  $\phi$  não muda de sinal em  $\Omega$ .

**Demonstração.**

Seja  $\phi$  função suave que satisfaz (2.58). Para mostrar que  $\phi$  não muda de sinal provemos que  $|\phi| > 0$ .

Sabemos que  $|\phi|$  é sempre maior do que igual a zero. Suponhamos sem perda de generalidade, por ser  $\phi$  autofunção associada a  $\lambda_1$ , que  $\phi \neq 0$  em  $\Omega$ .

Como  $\phi = 0$  em  $\partial\Omega$  então  $|\phi|$  também é zero em  $\partial\Omega$ , e, claramente  $|\phi|$  atinge o mínimo em

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 - |A|^2 \phi^2 \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0}.$$

Daí,  $|\phi|$  é suave e  $L|\phi| = \lambda_1 |\phi|$ .

Suponhamos agora por absurdo que existe pelo menos um valor  $x \in \Omega$  para

o qual  $|\phi| = 0$ . Usando a desigualdade de Harnack temos que para toda bola  $B_{4r}(x) \subset \Omega$ , com  $r > 0$  (veja o apêndice)

$$\sup_{B_r(x)} |\phi| \leq c \inf_{B_r(x)} |\phi| = 0 \Rightarrow \sup_{B_r(x)} |\phi| = 0 \Rightarrow |\phi| \equiv 0 \quad \text{em } B_r(x).$$

Como  $r$  é qualquer tem-se que  $|\phi| \equiv 0$  em  $\Omega$  o que contradiz a hipótese de  $\phi$  ser não nula. Portanto,  $|\phi| > 0$  em  $\Omega$  e como  $\phi$  é contínua podemos concluir que não muda de sinal. Ou seja,  $\phi > 0$  ou  $\phi < 0$ .  $\square$

**Observação 2.3.9.** *Na demonstração anterior a forma explícita do operador somente foi usada no cálculo do seu primeiro autovalor. Sendo que pela observação 2.3.8 vimos que o primeiro autovalor pode ser obtido de maneira semelhante em caso de operadores elípticos simétricos em geral o resultado acima é válido em estes contextos. Em particular, é válido para o operador Laplaciano.*

Se observarmos a expressão (2.46) determinada pela construção indutiva dos autovalores obtida no teorema 2.3.2, sutilmente deixamos ao descoberto que o primeiro autovalor era simples. Neste momento, a partir do lema anterior, estamos em condição de provar, a rigor, este fato.

**Corolário 2.3.1.** *O primeiro autovalor associado ao operador de Jacobi é simples.*

**Demonstração.**

Suponhamos por absurdo que o primeiro autovalor  $\lambda_1$  associado ao operador de Jacobi tem multiplicidade maior do que um. Então, associado a este temos autofunções  $\phi_1, \phi_2$  ortogonais. Pelo resultado precedente podemos assumir que ditas autofunções são estritamente positivas, logo

$$\int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 > 0.$$

O que contradiz o fato das autofunções serem ortogonais. Portanto, o primeiro autovalor é simples.  $\square$

Como o primeiro autovalor é simples e autofunções associadas a autovalores diferentes são ortogonais resulta que a única autofunção que não muda de sinal é a primeira autofunção, o que enunciamos como segue.

**Corolário 2.3.2.** *Seja  $\lambda$  autovalor do operador de estabilidade  $L$  e  $u$  autofunção associada, ou seja,  $\lambda$  e  $u$  são tais que*

$$Lu = \lambda u \quad \text{em } \Omega. \tag{2.59}$$

*Se  $\lambda \neq \lambda_1$  então  $u$  muda de sinal em  $\Omega$ .*

**Corolário 2.3.3** (Propriedade de monotonicidade dos autovalores). *Seja  $L$  o operador de Jacobi definido na hipersuperfície  $S$ . Sejam  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$  dois domínios limitados de  $S$  tais que  $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1$ , então*

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1).$$

**Demonstração.**

Pela definição de  $\lambda_1$  temos imediatamente que

$$\lambda_1(L, \Omega_0) \geq \lambda_1(L, \Omega_1).$$

Suponhamos então que  $\lambda_1(L, \Omega_0) = \lambda_1(L, \Omega_1)$  e denotemos por  $\phi_0$  a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $L$  em  $\Omega_0$ . Definamos

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi_0(x) & x \in \Omega_0 \\ 0 & x \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Pelo lema 2.3.1 temos que  $L\phi_1 = \lambda_1\phi_1$  em  $\Omega_1$ . Ou seja,  $\phi_1$  é a autofunção associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $L$  em  $\Omega_1$ . Por outro lado por construção  $\phi_1$  é uma função suave em  $\Omega_1$  que se anula em  $\partial\Omega_1$ . Então, pelo lema 2.3.2 temos que  $\phi_1$  não muda de sinal em  $\Omega_1$ . Por conseguinte podemos supor que  $\phi_1 > 0$  em  $\Omega_1$ , o que é absurdo pois  $\phi_1 = 0$  em  $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ . Portanto,

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1). \quad \square$$

Uma outra propriedade importante é a desigualdade de Faber-Krahn que estabelece a comparação para o primeiro autovalor em domínios bem particulares. Esta desigualdade constitui uma motivação aos problemas isoperimétricos veja [3] capítulo 4 parte B ou [8] capítulo 4 onde é amplamente estudada. Neste material a modo de focar em nosso estudo estaremos nos referindo à desigualdade de Faber-Krahn no espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$  para o operador Laplaciano pois é a versão necessária para a prova do critério de estabilidade de Barbosa-Do Carmo do capítulo 3.

**Teorema 2.3.4** (Desigualdade de Faber-Krahn). *Seja  $\Omega$  um domínio regular da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e seja  $\Omega^*$  um disco circular com a mesma área que  $\Omega$  então*

$$\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega^*)$$

com  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  o laplaciano em  $\mathbb{S}^2$  e a igualdade válida se e somente se  $\Omega$  for também um disco circular.

**Demonstração.**

Seja  $\lambda_1$  o primeiro autovalor associado ao laplaciano  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  no domínio  $\Omega$  da esfera. Como vimos na observação 2.3.8  $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega)$  pode ser calculado a partir do quociente de Rayleigh associado. Seja  $\phi_1$  a autofunção correspondente a  $\lambda_1$ , então

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^2} \phi_1 = \lambda_1 \phi_1 & \text{em } \Omega; \\ \phi_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos que  $\phi_1$  é positiva em  $\Omega$  ( $\phi_1$  não muda de sinal). Além disso,  $\phi_1 \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ , logo, pelo teorema de Sard o conjunto dos valores críticos de  $\phi_1$  tem medida zero. Denotemos  $R_\phi$  ao conjunto dos valores regulares de  $\phi_1$ .

A área do domínio  $\Omega$ ,  $A(\Omega) \in C^0([0, \infty)) \cap C^\infty(R_\phi)$  pois  $\forall x \in \phi_1^{-1}(x) \cap \Omega$  a forma de volume em  $\Omega$  resulta

$$dA = |\nabla \phi_1|^{-1} dA_{\phi_1^{-1}(x)} dx.$$

com  $dA_{\phi_1^{-1}(x)}$  a forma de volume  $(n - 1)$ -dimensional em  $\phi_1^{-1}(x)$ . Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \{p \in \mathbb{S}^2; |\phi_1(p)| > x\} \\ \Gamma(x) &= \{p \in \mathbb{S}^2; |\phi_1(p)| = x\} \end{aligned}$$

com  $x \in R_\phi$  e  $\Gamma(x)$  que representa o conjunto de nível de  $\phi_1$ .

E  $B_\delta$  a bola de raio  $\delta$  em  $\mathbb{S}^2$  com área  $A_\delta$  e sua esfera correspondente  $\partial B_\delta$  com área  $A_\delta(\partial B_\delta)$ .

Seja  $T = \max_\Omega \phi_1$ , para  $0 \leq x \leq T$  e  $\Omega^*(x)$  o disco circular em  $\mathbb{R}^3$  de área  $A(\Omega^*(x)) = A(\Omega(x))$ . Tomando  $r(x)$  como o raio de  $\Omega^*(x)$  temos

$$A(\Omega(x)) = A(\Omega^*(x)) = A_{r(x)}(\Omega(x)). \tag{2.60}$$

Para  $r_0 = r(0)$ , em particular, tomemos  $\Omega^* = B_{r_0}$ .

A função

$$r : [0, T] \rightarrow [0, r_0]$$

é tal que  $r(x) \in C^0([0, T]) \cap C^\infty(R_\phi \cap (0, T))$  e é estritamente decrescente.

Seja  $\psi$  a função inversa de  $r$ , i.e,

$$\psi : [0, r_0] \rightarrow [0, T]$$

e definamos

$$\tilde{\phi} = \psi \circ r \tag{2.61}$$

como a aplicação identidade. Com isto, usando (2.60) e (2.61) se verifica que

$$A'(\Omega(x)) = A'_{r(x)}(\Omega(x))r'(x) = A_{r(x)}(\partial\Omega(x))r'(x) \quad (2.62)$$

e

$$\psi'(r(x))r'(x) = 1. \quad (2.63)$$

Por outro lado usando a fórmula da co-área (veja apêndice),

$$A'(\Omega(x)) = - \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)), \quad (2.64)$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \tilde{\phi}^2 d\tilde{A} &= \int_0^{r_0} \psi^2(r) A_r(\partial\Omega) dr \\ &= - \int_0^T \psi^2(r(x)) A_r(\partial\Omega(x)) r'(x) dx \\ &= - \int_0^T x^2 A'(\Omega(x)) dx \\ &= \int_0^T x^2 \left( \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)) \right) dx \\ &= \int_0^{\sup \Omega \phi_1} \phi_1^2 \left( \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \phi_1^2 dA, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega^*} \tilde{\phi}^2 d\tilde{A} = \int_{\Omega} \phi_1^2 dA, \quad (2.65)$$

e  $\forall x \in R_\phi$  (a partir de (2.64):

$$r'(x) = \frac{A'(\Omega(x))}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} = - \frac{1}{\partial A_{r(x)}(\Omega(x))} \int_{\Gamma(x)} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|}.$$

Definamos

$$p(x) = \begin{cases} \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) & \text{se } x \in R_\phi \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

e lembremos que  $A(\Omega) = A(\Omega^*)$ . Usando a desigualdade isoperimétrica para o domínio  $\Omega$  (veja [23]),

$$A(\partial\Omega) \geq A(\Omega) \quad (2.66)$$

obtemos a seguinte desigualdade isoperimétrica entre as áreas das esferas definidas por  $\Omega$  e  $\Omega^*$

$$A(\partial\Omega) \geq A(\Omega) = A(\Omega^*) = A(\partial\Omega^*).$$

Então para  $x \in R_\phi$ ,

$$\begin{aligned}
 -r'(x)p(x) &= \frac{1}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} \int_{\Gamma(x)} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|} \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|} \left( \int_{\Gamma(x)} dA(\Omega(x)) \right)^2 = \frac{A^2(\Omega(x))}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} \\
 &\geq \frac{A^2(\Omega(x))}{A(\partial\Omega)} \geq A(\Omega(x)) = A(\Omega^*(x)) \geq A(\partial\Omega^*(x)) \\
 &= A_{r(x)}(\partial\Omega(x)).
 \end{aligned}$$

Com isto e usando novamente a fórmula da co-área obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla\phi_1|^2 dA &= \int_0^\infty dx \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) \\
 &= \int_0^T p(x) dx \\
 &\geq - \int_0^T \frac{A_{r(t)}(\partial\Omega(x))}{r'(x)} dx \\
 &= - \int_0^T (\psi'(r(x)))^2 A_{r(t)}(\partial\Omega(x)) r'(x) dx \\
 &= \int_0^{r_0} (\psi'(r))^2 A_r(\partial\Omega) dr \\
 &= \int_{\Omega^*} |\nabla\tilde{\phi}|^2 d\tilde{A},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla\phi_1|^2 dA \geq \int_{\Omega^*} |\nabla\tilde{\phi}|^2 d\tilde{A}. \tag{2.67}$$

Então por (2.65) e por (2.67) obtemos

$$\int_{\Omega} (2K\phi_1^2 + |\nabla\phi_1|^2) dA \geq \int_{\Omega^*} (2K\tilde{\phi}^2 + |\nabla\tilde{\phi}|^2) d\tilde{A}. \tag{2.68}$$

O que significa que a forma quadrática associada à primeira autofunção em  $\Omega$  é maior do que igual que a forma quadrática associada à primeira autofunção em  $\Omega^*$ , logo

$$\lambda_1(\Delta_1, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_1, \Omega^*). \tag{2.69}$$

Ora, se  $\lambda_1(\Delta_1, \Omega) = \lambda_1(\Delta_1, \Omega^*)$

$$A(\Omega(x)) = A_{r(x)}(\partial\Omega(x)), \quad \forall x \in R_\phi.$$

Neste caso  $\Omega(x)$  é isométrico a  $\Omega^*(x)$  pois a igualdade na desigualdade isoperimétrica (2.66) é satisfeita somente se os domínios forem isométricos (veja [23]). Então, como o conjunto dos pontos críticos tem medida nula temos em particular que  $\Omega = \Omega(0)$  é isométrico a  $\Omega^* = \Omega^*(0)$ . Portanto  $\Omega$  é também

um disco circular. Claramente se  $\Omega$  é um disco circular os autovalores associados coincidem.  $\square$

**Observação 2.3.10.** *Note que os resultados usados na demonstração acima são válidos em dimensões maiores. Logo, a propriedade pode ser deduzida nestes casos repetindo a mesma análise. Temos então que para um domínio regular da esfera unitária  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $\Omega^*$  um disco geodésico com área igual à área de  $\Omega$  que  $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^n}, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^n}, \Omega^*)$ . Ou seja, a desigualdade de Faber Krahn continua sendo válida.*

**Corolário 2.3.4.** *Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{S}^2$ . Assumamos que a área de  $\Omega$  é menor que  $2\pi$ . então  $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) > 2$ .*

**Demonstração.**

Sabemos pelo exemplo 2.3.1 que  $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}_+^2}, \mathbb{S}_+^2) = 2$ . Além disso como  $A(\Omega) < 2\pi$  sendo  $\Omega^*$  um disco circular que tem a mesma área de  $\Omega$  temos que  $A(\Omega^*) < 2\pi$ . O que implica que  $\Omega^* \subset \mathbb{S}_+^2$ , assim:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) &\stackrel{\text{Teo2.3.4}}{\geq} \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega^*) \\ &\stackrel{\text{corol2.3.3}}{>} \lambda_1(\Delta_1, \mathbb{S}_+^2) = 2. \end{aligned} \quad \square$$