

3

Critérios de estabilidade para domínios de Superfícies e Hipersuperfícies Mínimas.

Além dos resultados estudados no capítulo anterior a partir dos quais podemos realizar a análise da estabilidade existem outros critérios que facilitam o estudo quando o uso da definição ou as caracterizações mais simples sejam inviáveis. Mas, sem dúvida alguma qualquer critério de análise de estabilidade está influenciado pelo critério da não negatividade do operador de Jacobi ou dos autovalores associados ao mesmo. Neste capítulo apresentamos alguns destes outros critérios.

3.1

Critério do mínimo do funcional de segunda variação da área para superfícies mínimas.

Segundo o corolário 2.1.1 uma hipersuperfície mínima estritamente estável pode ser analisada como um mínimo local da área. Reciprocamente se uma hipersuperfície mínima representa um mínimo local podemos concluir sobre a estabilidade da mesma como veremos nesta seção.

Como o funcional da área é uma aplicação real, podemos estabelecer a noção de mínimo como para funções reais.

Definição 3.1.1 (Mínimo do funcional da área). *Sejam S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com variações dadas pela imersão (2.4) e F_t variação normal de S com variação da área dada por $A(t)$. A variação da hipersuperfície no instante $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, F_{t_0} , é um mínimo local do funcional da área se*

$$A(t_0) \leq A(t) \quad \forall t \text{ numa vizinhança } U \text{ de } t_0. \quad (3.1)$$

Se $A(t_0) < A(t)$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{t_0\}$ então é um mínimo local estrito.

Teorema 3.1.1. *Seja S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, logo:*

- (i) *Se S é estritamente estável então S é um mínimo local estrito do funcional da área.*
- (ii) *Se S é um mínimo local do funcional da área então S é estável.*

Demonstração.

- (i) Seja S hipersuperfície estritamente estável, então, tomando uma variação normal qualquer da mesma temos por definição que ($t_0 = 0$):

$$A''(0) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (A(t)) > 0.$$

Ora, fazendo um desenvolvimento de Taylor de ordem 2 ao redor de $t = 0$ do funcional de variação da área resulta que:

$$A(t) = A(0) + tA'(0) + t^2 A''(0) + O(t^3) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Como a hipersuperfície é mínima o termo $A'(0)$ que corresponde à primeira variação do funcional da área pelo corolário 2.1.1 é nulo. Logo

$$A(t) = A(0) + t^2 A''(0) + O(t^3) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Portanto,

$$A(t) > A(0) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}. \quad (3.2)$$

Daí, a hipersuperfície S é um mínimo local estrito do funcional da área.

- (ii) Se S for um mínimo local do funcional da área temos que

$$A''(0) \geq 0.$$

Portanto, podemos concluir a estabilidade da hipersuperfície. $\square$

Observação 3.1.1. *O teorema acima é usado frequentemente para determinar regiões de instabilidade numa hipersuperfície. Pois nestos casos é suficiente usar uma função teste conveniente de modo que $A''(0) < 0$.*

Exemplo 3.1.1. *Seja $n = 2$, e S a superfície dada pelo catenoide em $\mathbb{R}^3$ definido pela parametrização*

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(u, v) &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \end{aligned} \quad (3.3)$$

i.e., da família descrita por (1.45) no exemplo 1.1.6 tomamos o catenoide obtido para $a = 1$.

Considerando uma variação normal sobre este catenoide a primeira variação do funcional da área é dada por

$$A'(0) = \int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 + 2K\phi) dA \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Consideremos agora o domínio do catenoide entre dois paralelos à distância $2d \geq 2$. Tomemos a função teste $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que

$$\phi(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u < d-1 \\ d-u & \text{se } u \in [d-1, d] \\ 0 & \text{se } u > d, \end{cases}$$

ou seja, ϕ tem suporte compacto em $\{u < d\} \times \mathbb{R}$. Como ϕ depende somente de u para $u \in [d-1, d]$ e não depende de v , no momento de calcular os coeficientes g_{ij} somente vamos-nos interessar pelo coeficiente g_{11} pois os restantes serão irrelevantes.

Calculando obtemos

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u) \quad e \quad \det(g) = \cosh^4 u.$$

Assim, no intervalo $[d-1, d]$

$$\begin{aligned} |\nabla_X \phi|^2 &= \frac{1}{\det(g)} g^{11} |\nabla \phi|^2 = g^{11} \phi_u \phi_u \\ &= \frac{1}{\cosh^2(u)} (-1)^2 = \frac{1}{\cosh^2(u)}. \end{aligned}$$

Além disso, $dA(u, v) = \cosh^2(u) du dv$ logo:

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{d-1}^d \frac{1}{\cosh^2(u)} \cosh^2(u) du dv = \pi. \quad (3.4)$$

Finalmente, dado que a curvatura total do catenoide num domínio principal é -4π , ou seja $\int_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]} K = -4\pi$ com K a curvatura Gaussiana, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \phi^2 K dA &= \int_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 dA + \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi^2 K dA \\ &= \pi + \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K dA \\ &= \pi - 4\pi = -3\pi < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, para d suficientemente grande não são satisfeitas as condições de estabilidade, o que mostra que, uma grande peça do catenoide em $\mathbb{R}^3$ não é um mínimo local, i.e., não é estável.

No próximo capítulo estudaremos precisamente os domínios de estabilidade simétricos por rotação, do catenoide atingindo o caso geral dos catenoides em $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.2

Critério de estabilidade para folheações de uma hipersuperfície mínima.

Nem sempre é possível de maneira simples verificar a estabilidade usando diretamente o teorema 3.1.1.

Uma maneira de estudar a estabilidade, quando isto acontece, é a partir do estudo da estabilidade das folhas de uma folheação dada pelas variações da hipersuperfície como veremos a seguir. Outras formas serão estudadas no decorrer deste capítulo.

O estudo será realizado desde uma noção simplificada do conceito de folheação, como apresentamos a seguir.

Definição 3.2.1 (Folheação). *Seja S variedade diferenciável de dimensão n e seja $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um mergulho. Logo $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ as aplicações*

$$F_t : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.6)$$

são mergulhos. O difeomorfismo F é chamado folheação com folhas $F_t = F|_t$. Dizemos que a folheação é mínima se cada uma de suas folhas F_t é mínima.

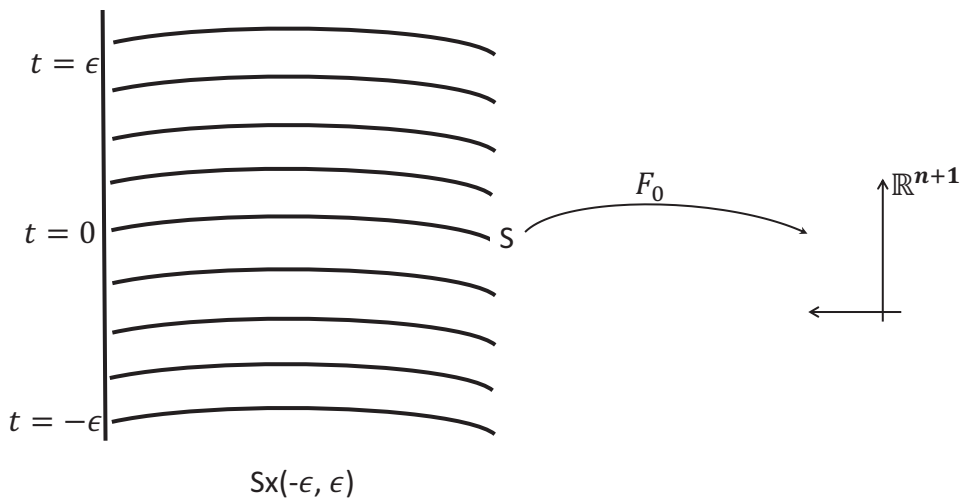


Figura 3.1: Folheação da variedade $S \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Segundo a definição acima é claro que cada uma das folhas é uma hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lema 3.2.1. *Suponhamos que o difeomorfismo $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma folheação mínima. Seja N o normal unitário à folheação, i.e., $\forall F(p) \in F(S \times (-\epsilon, \epsilon)), N(p)$ é o normal unitário à folha passando por $F(p)$. Então este normal unitário satisfaz que*

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N(p) = 0 \quad \forall p \in F(S \times (-\epsilon, \epsilon)). \quad (3.7)$$

Demonstração.

Dado o mergulho definido por F , e seja $Y \in T_p X(D)$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N(p) &= \operatorname{traço}(Y \rightarrow \bar{\nabla}_Y N(p)) \\
 &= \sum_i \langle \bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle + \langle \bar{\nabla}_N N, N \rangle \\
 &= - \sum_i \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle \\
 &= -\operatorname{traço}(a_{ij}) \\
 &= -nH(p),
 \end{aligned}$$

com (a_{ij}) a matriz associada ao operador de Weingarten ($AX(p) = -\bar{\nabla}_{X(p)} N$). Como a folheação é mínima $H(p) = 0 \forall p$, portanto $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N(p) = 0$, como desejado. $\square$

Exemplo 3.2.1 (Folheação de um gráfico mínimo). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $G = (x, u(x))$, o gráfico mínimo da função $u(x)$, com $x \in U$ ou seja, $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.*

Então uma folheação por translação do gráfico é dada por:

$$X : D = U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

com folhas $X_t(x) := (x, u(x) + t)$, e segundo o exemplo 1.1.4

$$nH = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right).$$

Finalmente como o gráfico é mínimo resulta que

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Desta maneira reobtemos a equação de uma superfície mínima de forma da divergência como no teorema 1.1.2.

Teorema 3.2.1. *Seja S uma folha de uma folheação mínima. Seja $\Omega \subset S$ relativamente compacto. Então Ω é um mínimo do funcional da área.*

Demonstração.

Seja $\Omega \subset S$ relativamente compacto e seja $\tilde{\Omega}$ variação de Ω ($t = 0$) no instante $t = t_1$. Seja Δ domínio de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Delta = \Omega \setminus \tilde{\Omega}$. Tomemos as aplicações normais de Gauss $\nu, \tilde{\nu}$ para Ω e $\tilde{\Omega}$ respectivamente tal que ν é exterior e $\tilde{\nu}$ é interior a Δ como se observa no desenho.

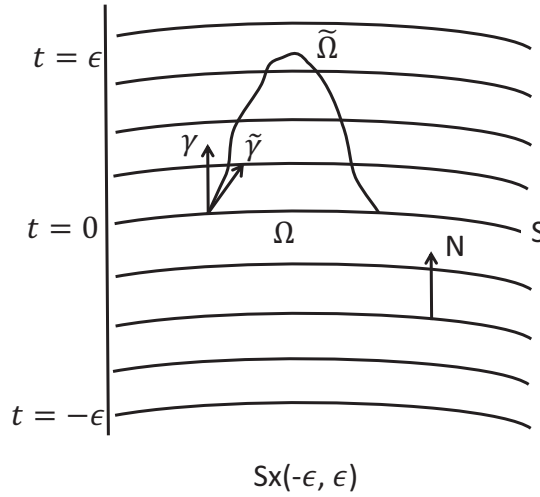


Figura 3.2: Folheação e Variação.

Pelo lema anterior $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N(p) = 0$, $\forall p \in \overline{\Delta}$. Por outro lado usando o teorema da divergência sobre o conjunto compacto $\overline{\Delta}$ obtemos

$$0 \stackrel{\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N=0}{=} \int_{\Delta} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} N dx = \int_{\partial\Delta} \langle N, \nu_{\partial\Delta} \rangle dS = \int_{\Omega} \langle N, \nu \rangle dS - \int_{\tilde{\Omega}} \langle N, \tilde{\nu} \rangle dS,$$

com $\nu_{\partial\Delta}$ o normal unitário à fronteira $\partial\Delta$, ou seja,

$$\int_{\Omega} \langle N, \nu \rangle dS = \int_{\tilde{\Omega}} \langle N, \tilde{\nu} \rangle dS. \quad (3.8)$$

Usando que $\nu = N|_{\Omega}$ e que $\langle N, \tilde{\nu} \rangle \leq |N| |\tilde{\nu}| = 1$:

$$A(0) = \int_{\Omega} dS = \int_{\Omega} \langle N, \nu \rangle dS = \int_{\tilde{\Omega}} \langle N, \tilde{\nu} \rangle dS \leq \int_{\tilde{\Omega}} dS = A(t_1). \quad \square$$

Corolário 3.2.1. *Qualquer subconjunto compacto de um gráfico mínimo em $\mathbb{R}^{n+1}$ é estritamente estável.*

Demonstração.

Seja $G = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico mínimo dado pela função $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto como no exemplo 3.2.1.

Para folheações mínimas por translações de G temos pelo teorema anterior que qualquer subconjunto compacto de G é estável. Ou seja um mínimo do funcional da área ($A(t) \geq A(0)$).

Ora, se existe $t \in (-\epsilon, \epsilon)$; $t \neq 0$ tal que $A(t) = A(0)$, temos que para dito t :

$$N(G_t) = N(G)$$

com G_t a variação compacta do gráfico G no instante t e $N(G_t), N(G)$ os

normais unitários à variação e ao gráfico respectivamente. Daí, pela forma do normal unitário do gráfico dado no exemplo 1.1.4 temos

$$\nabla u_t = \nabla u \text{ em } G.$$

E como a variação é tomada de forma que a fronteira fique fixada temos que

$$u_t|_{\partial G} = u|_{\partial G}.$$

Logo, $u_t = u$ em G . Concluimos que $G_t = G$. Portanto o gráfico mínimo é estritamente estável. $\square$

Observação 3.2.1. *O corolário anterior pode também ser demonstrado usando o lema 3.3.1.*

Como já tínhamos mencionado no início da seção nem sempre é possível mostrar de maneira simples se uma hipersuperfície mínima é um mínimo do funcional da área. Porém, isto se verifica imediatamente em pequenas vizinhanças da hipersuperfície.

Teorema 3.2.2. *Seja S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, então $\forall x \in S$ existe uma vizinhança que é um mínimo local estrito do funcional da área.*

Demonstração.

Seja $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação que determina a imersão da hipersuperfície S em $\mathbb{R}^{n+1}$. Logo para $x \in S$ qualquer

$$dF(x) : T_x S \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{R}^{n+1}$$

é injetora. Então, pelo teorema da função implícita existe uma vizinhança de $x \in S$ que pode ser representada localmente como um gráfico. Portanto, pelo corolário anterior temos que dita vizinhança é um mínimo local estrito do funcional da área. $\square$

3.3

Critério de estabilidade por monotonicidade dos autovalores.

O mais relevante a destacar deste critério é o fato de poder garantir estabilidade estrita num subdomínio da hipersuperfície mesmo tendo somente estabilidade do domínio maior. Mas, por outro lado o argumento exige conhecer previamente a estabilidade do domínio maior. Assim, esta ferramenta resulta ser mais útil quando se tem alguma conclusão de estabilidade em algum domínio da hipersuperfície com antecedência.

Lema 3.3.1. *Sejam Ω_0 e Ω_1 dois domínios relativamente compactos na hipersuperfície mínima S tais que $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1$. Se o domínio Ω_1 for estável então o domínio Ω_0 é estritamente estável.*

Demonstração.

Sejam Ω_0 e Ω_1 domínios relativamente compactos tais que $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1$ então pelo corolário 2.3.3 do capítulo 2 temos

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1),$$

com L o operador de Jacobi. Por outro lado como o domínio Ω_1 é estável pela proposição 2.3.1 temos que $\lambda_1(L, \Omega_1) \geq 0$. Assim,

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1) \geq 0,$$

ou seja, $\lambda_1(L, \Omega_0) > 0$. Portanto, Ω_0 é um domínio estritamente estável da hipersuperfície. $\square$

3.4

Critério de estabilidade da existência de uma função u positiva até a fronteira do domínio satisfazendo $Lu \geq 0$.

Lema 3.4.1. *Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja L o operador de estabilidade definido sobre S como $L = -\Delta_S - |A|^2$, com Δ_S o Laplaciano associado e $\Omega \subseteq S$ conjunto relativamente compacto com fronteira suave.*

Se existe uma função $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaz:

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \overline{\Omega} \end{cases} \quad (3.9)$$

então $\lambda_1(L, \Omega) > 0$. Por conseguinte Ω vai ser estritamente estável.

Demonstração.

Seja $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaz (3.9).

Definamos $\omega = \Delta_S u + |A|^2 u$ então $\omega \leq 0$ em Ω . Além disso tomemos uma função $h \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $u > 0$ em $\overline{\Omega}$ podemos escrever $h = \psi u$ com $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. No que segue omitimos o subíndice s do Laplaciano por comodidade, mas, entende-se que o Laplaciano a tratar é definido sobre a hipersuperfície.

Usando a fórmula de integração por partes:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \omega_0 &= - \int_{\Omega} h \Delta h \omega_0 + \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial h}{\partial \nu} d\omega_0 \\
 &= - \int_{\Omega} h \Delta h \omega_0 = - \int_{\Omega} \psi u \Delta(\psi u) \omega_0 \\
 &= - \int_{\Omega} \psi u (u \Delta \psi + \psi \Delta u + 2 \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle) \omega_0 \\
 &= - \int_{\Omega} (\psi u^2 \Delta \psi + \psi^2 u (\omega - |A|^2 u) + 2u \psi \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle) \omega_0
 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (|\nabla h|^2 - |A|^2 h^2) \omega_0 &= - \int_{\Omega} (\psi u^2 \Delta \psi + 2u \psi \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle) \omega_0 - \int_{\Omega} (\omega \psi^2 u) \omega_0 \\
 &\geq - \int_{\Omega} (\psi u^2 \Delta \psi + 2u \psi \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle) \omega_0
 \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida pois desde que $\omega \leq 0$ e $u > 0$ temos $\int_{\Omega} (\omega \psi^2 u) \omega_0 \leq 0$. Usando novamente fórmula de integração por partes:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\psi u^2 \Delta \psi) \omega_0 &= - \int_{\Omega} (\nabla(\psi u^2) \nabla \psi) \omega_0 + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \psi u^2 d\omega_0 \\
 &= - \int_{\Omega} (\nabla(\psi u^2) \nabla \psi) \omega_0 \\
 &= - \int_{\Omega} (2u \psi \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle + u^2 |\nabla \psi|^2) \omega_0
 \end{aligned}$$

daí

$$\int_{\Omega} (|\nabla h|^2 - |A|^2 h^2) \omega_0 \geq \int_{\Omega} u^2 |\nabla \psi|^2 \omega_0 \geq 0. \quad (3.10)$$

Logo, o domínio Ω é estável.

Como $h \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função qualquer tomemos, em particular, h como a função que realiza o primeiro autovalor.

Se $\int_{\Omega} (|\nabla h|^2 - |A|^2 h^2) \omega_0 = 0$ como $u > 0$ então da equação (3.10) obtemos $\int_{\Omega} u^2 |\nabla \psi|^2 \omega_0 = 0$ e

$$\int_{\Omega} u^2 |\nabla \psi|^2 \omega_0 = 0 \Leftrightarrow |\nabla \psi|^2 = 0 \Leftrightarrow \psi = cte. \quad (3.11)$$

Como $\psi = cte$ segundo (3.11) e $\psi = 0$ em $\partial\Omega$ pois ψ tem suporte compacto em Ω resulta que $\psi \equiv 0$ e $\psi \equiv 0 \Leftrightarrow h \equiv 0$. Sendo h a função que realiza o primeiro autovalor é distinta de zero. Portanto, $\lambda_1(L, \Omega) > 0$ o que é equivalente a dizer que o domínio Ω é estritamente estável. $\square$

Observação 3.4.1. No lema acima temos usado o operador de Jacobi definido

na hipersuperfície por ser nosso caso em questão. Contudo deve-se notar que o mesmo é válido em cenários mais gerais. Basta ter um operador definido da forma $L = -\Delta_S - V$ com V uma função suave em S . Por exemplo para variedades riemannianas onde o potencial V corresponde a $|A|^2 + \widehat{Ric}(N)$ que é suave.

Observação 3.4.2. Note que no lema resulta indispensável a condição de u ser maior estrita do que zero em $\bar{\Omega}$ pois se:

$$(i) \quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.12)$$

temos que $\lambda_1(L, \Omega) = 0$. Por exemplo, para o catenoide C em $\mathbb{R}^3$ com $\Omega := C([-T_0, T_0[\times [0, 2\pi])$ onde T_0 é o zero positivo da função $e(u) = 1 - u \tanh u$ como estudaremos em detalhes no teorema 4.2.1 do próximo capítulo, ou como para o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado pela parametrização F definida por (4.32) com $\Omega := F([-z, z[, \mathbb{S}^{n-1})$ e z o único zero positivo da função positiva usada como teste como estudaremos na proposição 4.3.6 do próximo capítulo.

$$(ii) \quad \begin{cases} Lu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.13)$$

temos que $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$ como veremos explicitamente ao estabelecer os domínios de estabilidade no teorema e proposição antes citados do próximo capítulo.

3.5

Critério de estabilidade de Barbosa Do Carmo.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Estabilidade de Barbosa Do Carmo). *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima e $\Omega \subseteq S$ um domínio relativamente compacto com fronteira suave. Se a imagem $g(\Omega)$, sendo g a aplicação normal de Gauss definida sobre S , tem área menor do que 2π então Ω é estritamente estável.*

Demonstração.

Se o domínio for um plano podemos concluir que é estritamente estável, pois, no caso de um plano a curvatura Gaussiana é nula. Assim, a equação de segunda variação do funcional da área (2.23) se reduz a

$$A''(0) = \int_{\Omega} |\nabla_S \phi|^2 dA. \quad (3.14)$$

Portanto, como ϕ é escolhida com suporte compacto no domínio, $A''(0) > 0$. Logo, pela definição de estabilidade, o plano é dito estritamente estável.

Suponhamos, então, que o domínio não é um plano nem é um subconjunto dele. Se provarmos a existência de uma função $u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{C}^0(\overline{\Omega})$ com u positiva em $\overline{\Omega}$ tal que u assim definida satisfaz $-\Delta_S u + 2Ku \geq 0$ teríamos $\lambda_1(-\Delta + 2K, \Omega) > 0$ pelo lema 3.4.1. Desta maneira concluiríamos sobre a estabilidade estrita.

Demonstremos a existência de dita função: Seja $\Omega^* = g(\Omega) \subset \mathbb{S}^2$.

Afirmção: g é conforme (preserva ângulos não orientados).

De fato, seja $g : \Omega \subseteq S \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $f|_\Omega : \Omega \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$ a restrição da imersão de S em $\mathbb{R}^3$ ao domínio Ω . Seja $x \in \Omega$ e $v_1, v_2 \in T_x S$. Como $A : T_x S \rightarrow T_x S$ e $dg(p)\omega = -A\omega$, $\forall \omega \in T_x S$ temos

$$\langle dg(v_1), dg(v_2) \rangle = \langle A(v_1), A(v_2) \rangle = I(A(v_1), A(v_2))$$

com A o operador de Weingarten e $I(A(v_1), A(v_2))$ a primeira forma fundamental em $A(v_1)$ e $A(v_2)$. Ora, sabemos que dito operador satisfaz a equação

$$A^2 - 2HA + KE = 0,$$

ou seja, A é raiz do polinômio característico (1.31).

Por outro lado como S é mínima temos que $H = 0$ e $K = -\Lambda^2 \neq 0$. Daí, a equação acima se reduz a

$$A^2 = \Lambda^2 E \quad \text{com} \quad \Lambda \neq 0$$

i.e a aplicação normal de Gauss é conforme em $\Omega \setminus \{K = 0\}$.

Então, $\Omega^* \subset \mathbb{S}^2$ é um conjunto aberto com fronteira suave por partes com área $A(\Omega^*) < 2\pi$. Consideremos agora o domínio $\tilde{\Omega}$ com fronteira suave por partes tal que $\overline{(\Omega^*)} \subset \tilde{\Omega}$ e com área $A(\tilde{\Omega}) < 2\pi$. Daí, pelo corolário 2.3.4 temos

$$\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \tilde{\Omega}) > 2.$$

Seja v a autofunção não trivial de classe $\mathbf{C}^\infty$ associada a $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \tilde{\Omega})$. Segundo o lema 2.3.2 podemos supor $v > 0$ no interior de $\tilde{\Omega}$. Então, para o Laplaciano esférico $\Delta_{\mathbb{S}^2}$, temos

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} v + 2v < \Delta_{\mathbb{S}^2} v + \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \tilde{\Omega})v = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{\Omega} \quad \text{e} \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \tilde{\Omega}, \quad (3.15)$$

com a igualdade válida pelo fato que v é autofunção não trivial associada ao autovalor $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \tilde{\Omega})$. Em particular,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} v + 2v < 0 \quad \text{em} \quad \overline{(\Omega^*)} \quad \text{e} \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \overline{(\Omega^*)}. \quad (3.16)$$

No conjunto $\Omega_0 = \Omega - \{K = 0\}$ a aplicação normal de Gauss é um difeomorfismo local, então, podemos considerar a métrica induzida pelo *pull-back*:

$$ds_2^2 = g^* ds_{\mathbb{S}^2}^2. \quad (3.17)$$

Logo, para o Laplaciano Δ_2 associado a ds_2^2 é satisfeita a seguinte relação:

$$\Delta_2(v \circ g) = \Delta_{\mathbb{S}^2} v. \quad (3.18)$$

Definindo $u := v \circ g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e usando (3.16) podemos comprovar que $u > 0$ em $\bar{\Omega}$ e satisfaz a seguinte relação:

$$\Delta_2 u + 2u < 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.19)$$

Além disso, como g é conforme temos:

$$ds_2^2 = g^* ds_{\mathbb{S}^2}^2 = -K ds^2 \quad e \quad \Delta_2 = -\frac{1}{K} \Delta_S, \quad (3.20)$$

com ds^2 a métrica em S e a última igualdade válida desde que a superfície é mínima. Pois como vimos, neste caso o fator conforme da métrica Λ tem a propriedade de que $\Lambda^2 = -K$ com $K < 0$, pois estamos excluindo o caso em que $K = 0$. Logo,

$$\Delta_S u - 2Ku = -K(\Delta_2 u + 2u), \quad (3.21)$$

assim, u satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\Delta_S u - 2Ku < 0 \quad \text{em } \Omega_0. \quad (3.22)$$

Ora, os zeros da curvatura Gaussiana para uma superfície mínima não plana são isolados, então, por continuidade

$$\Delta_S u - 2Ku \leq 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.23)$$

o que resulta equivalente a $-\Delta_S u + 2Ku \geq 0$ em Ω e por construção $u > 0$ em $\bar{\Omega}$. Logo, usando o lema 3.4.1 concluímos a demonstração. $\square$

Corolário 3.5.1. *Seja Ω um domínio regular relativamente compacto numa superfície mínima de $\mathbb{R}^3$. Se $\left| \int_{\Omega} K dA \right| < 2\pi$ então Ω é estritamente estável.*

Demonstração.

Sabemos que a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima não plana tem uma orientação que inverte o difeomorfismo local exceto nos zeros isolados da curvatura Gaussiana. Daí que:

$$A(g(\Omega)) = \int_{g(\Omega)} dA_{\mathbb{S}^2} \leq \int_{\Omega} g^*(dA_{\mathbb{S}^2}) \quad (3.24)$$

com $dA_{\mathbb{S}^2}$ o elemento de área em $\mathbb{S}^2$. Ora, o *pullback* da aplicação normal de Gauss do elemento de área na esfera é tal que dados $v_1, v_2 \in T_x \Omega$ para $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} g^* dA_{\mathbb{S}^2} &= dA_{\mathbb{S}^2}(dg(v_1), dg(v_2)) \\ &= \det(dg(v_1), dg(v_2), g) \\ &= \det(dg) \det(v_1, v_2, g) \\ &= -\det(A) \det(v_1, v_2, g) \\ &= -K dA \end{aligned}$$

com dA o elemento de área sobre o domínio Ω da superfície. O que implica que:

$$A(g(\Omega)) = \int_{g(\Omega)} dA_{\mathbb{S}^2} \leq \int_{\Omega} -K dA = \left| \int_{\Omega} K dA \right| < 2\pi. \quad (3.25)$$

Então, pelo teorema de estabilidade de Barbosa-Do Carmo estudado anteriormente Ω é estritamente estável. $\square$

Observação 3.5.1. *É importante notar que para aplicações de Gauss injetivas, como é o caso do catenoide, domínios estáveis estão associados a aqueles que tem curvatura total absoluta menor do que 2π .*

3.6

Critério de estabilidade segundo os campos de Jacobi em uma hipersuperfície mínima.

Definição 3.6.1 (Campo de Jacobi). *Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto com L o operador de Jacobi definido em Ω . Seja u uma função suave em Ω e contínua até a fronteira tal que $Lu = 0$ em Ω . Dizemos que u com tais propriedades é um campo de Jacobi em Ω .*

Pela linearidade do operador elíptico L obtemos diretamente a seguinte propriedade para os campos de Jacobi.

Proposição 3.6.1. *Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com L o operador de Jacobi definido na mesma. Sejam u e v dois campos de Jacobi em S , então, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se que $\alpha u + \beta v$ é também um campo de Jacobi. Ou seja, as combinações lineares de campos de Jacobi são campos de Jacobi.*

Estudemos dois casos particulares de campos de Jacobi.

Proposição 3.6.2. *Seja $F_t : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma família a um parâmetro de imersões mínimas com campo vetorial variacional $Y = \frac{\partial F_t}{\partial t}$ e normal unitária N_t . Então para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\langle Y, N_t \rangle$ é um campo de Jacobi em S o qual recebe o nome de campo de variação de Jacobi.*

Demonstração.

Seja $x \in \Omega$ um ponto qualquer e

$$F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

a aplicação definida por:

$$F(x, t) = F_t(x).$$

Seja o campo vetorial variacional $Y = \frac{\partial F_t}{\partial t}$ com N_t o normal unitário da família no ponto x . Ou seja, a família a um parâmetro de imersões mínimas orientadas está dada pela variação de uma imersão mínima, a correspondente ao valor $t = t_0$ e cada membro da família pode ser entendido como uma folha particular.

Definamos a função

$$\begin{aligned} f : S \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, t) &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial t}, N_t(p) \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Fixando $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tomemos $u(x) = f(x, t)$. Observemos que até o momento estamos a seguir a metodologia introdutória do processo do cálculo da segunda variação da área do capítulo 2 com u ao invés de F_t . Seguindo este procedimento e aproveitando os resultados obtidos naquele momento, em particular a equação (2.24) da observação 2.1.6, temos que u satisfaz a equação:

$$\Delta_S u + |A|^2 u = n \frac{\partial H}{\partial t}.$$

E como, os membros da família são mínimos, para cada um deles $H(x) = 0$. Assim, no ponto x u satisfaz a seguinte igualdade

$$\Delta_S u + |A|^2 u = 0,$$

i.e,

$$Lu = 0 \quad \text{em } x.$$

Como o ponto x foi escolhido arbitrariamente $Lu = 0$ para cada um dos membros da família. Portanto $\langle Y(x), N_t(x) \rangle = \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial t}, N_t(p) \right\rangle$ é um campo de Jacobi. $\square$

Exemplo 3.6.1. *Seja a variação de uma hipersuperfície*

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

dada por

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}, t) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1} + t)$$

que representa uma família a 1-parâmetro de isometrias de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então para qualquer hipersuperfície compacta $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a área é constante.

Neste caso o campo vetorial variacional resulta $F_t = (0, \dots, 1)$. Se S for mínima a componente normal do campo vetorial variacional, i.e., $\langle N, (0, \dots, 1) \rangle$ é um campo de Jacobi. Em particular, se S for um gráfico mínimo, com N dado por (1.13) (exemplo 1.1.4)

$$\langle N, (0, \dots, 1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{R}^n} u|^2}}.$$

Logo $\langle N, (0, \dots, 1) \rangle$ é um campo de Jacobi positivo.

Exemplo 3.6.2. Dada a família de catenoides no $\mathbb{R}^3$ como no exemplo 1.1.6, i.e.,

$$\begin{aligned} C_a : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au) \end{aligned} \quad (3.27)$$

com $a > 0$. O operador de Jacobi é dado por

$$L = -\frac{1}{a \cosh^2(u)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{2}{a^2 \cosh^4(u)} \quad (3.28)$$

e o normal unitário resulta

$$N = \frac{1}{\cosh u} (-\cos v, -\sin v, \sinh u).$$

Por outro lado temos que

$$\frac{\partial C_a}{\partial a} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

então,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial C_a}{\partial a}, N \right\rangle &= -\cosh u \cos v \frac{\cos v}{\cosh u} - \frac{\sin v}{\cosh u} \sin v \cosh u + u \frac{\sinh u}{\cosh u} \\ &= -(\cos^2 v + \sin^2 v - \frac{\sinh u}{\cosh u}) \\ &= -(1 - u \tanh u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 L\left\langle \frac{\partial C_a}{\partial a}, N \right\rangle &= -\frac{1}{a \cosh^2(u)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (-(1 - u \tanh u)) - \frac{2(-(1 - u \tanh u))}{a^2 \cosh^4(u)} \\
 &= -\frac{(-2(u \tanh u - 1)) \operatorname{sech}^2 u}{a \cosh^2(u)} - \frac{2(-(1 - u \tanh u))}{a^2 \cosh^4(u)} \\
 &= \frac{(2(u \tanh u - 1))}{a \cosh^4(u)} + \frac{2(1 - u \tanh u)}{a^2 \cosh^4(u)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Daí, a função $e(u) = 1 - u \tanh u$ é um campo de variação de Jacobi da família de catenoides.

Note que a função $e(u)$ possui um zero positivo z_0 e um zero negativo $-z_0$, além disso, $e(u) > 0$ em $(-z_0, z_0)$. Portanto $e(u) = 1 - u \tanh u$ é um campo de Jacobi positivo em $(-z_0, z_0)$.

Outro campo de Jacobi bem particular é o chamado campo *Killing* de Jacobi.

Definição 3.6.2 (Campo Killing.). *Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto. Dizemos que um campo vetorial $\mathcal{K} \in \mathcal{X}(\Omega)$ é um campo de tipo Killing se $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$ é satisfeita a equação de Killing*

$$\langle \nabla_X \mathcal{K}, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \mathcal{K} \rangle = 0. \quad (3.29)$$

Outras definições equivalentes são oferecidas no capítulo 3 de [13].

Uma propriedade importante dos campos de *Killing* é que o fluxo de $\mathcal{K}$ age por isometrias locais (veja capítulo 2 de [21]).

Proposição 3.6.3. *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima da hipersuperfície S e seja $\mathcal{K}$ um campo de tipo Killing em $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto, então $\langle \mathcal{K}, N \rangle$ com N o normal unitário à imersão é um campo de Jacobi em Ω .*

Demonstração.

Seguiremos a dedução dada para o campo de variação de Jacobi usando $u = \langle \mathcal{K}, N \rangle$ na equação $\Delta_S u + |A|^2 u = n \frac{\partial H}{\partial t}$. Como a geometria da hipersuperfície não muda fazendo isometrias do ambiente tem-se que $H(p) = 0 \quad \forall p$, logo $\Delta_S u + |A|^2 u = 0$. Ou seja,

$$Lu = L\langle \mathcal{K}, N \rangle = 0. \quad \square$$

Observação 3.6.1. *Observemos que as proposições 3.6.2 e 3.6.3 continuam sendo válidas em caso de imersões de curvatura média constante, pois, o que é preciso em cada um dos casos para mostrar que ambos $\langle Y(p), N_t(p) \rangle$ e $\langle \mathcal{K}, N \rangle$*

são campos de Jacobi é que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ que é satisfeita para imersões com curvatura média constante em geral, não necessariamente nula.

Exemplo 3.6.3. Dado o catenoide no $\mathbb{R}^3$ da família definida em 1.1.6 para $a = 1$, i.e.,

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \end{aligned} \quad (3.30)$$

com operador de Jacobi dado por

$$L = -\frac{1}{\cosh^2(u)}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) - \frac{2}{\cosh^4(u)} \quad (3.31)$$

e normal unitário

$$N = \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u).$$

Afirmamos que o campo $\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial z}$ é um campo de tipo Killing.

De fato, sejam $X, Y \in \mathcal{X}(C)$ com $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. Usando propriedades das conexões, que o colchete entre dois campos é nulo e o fato da parametrização do catenoide ser conforme, obtemos,

$$\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial z}, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \frac{\partial}{\partial z} \rangle = \frac{\partial}{\partial z} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0, \quad (3.32)$$

ou seja, é satisfeita a equação de Killing (3.29) para $\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial z}$. Portanto $\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial z}$ é um campo de tipo Killing e por conseguinte segundo a proposição 3.6.3

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial z}, N \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u) \rangle \\ &= \tanh u \end{aligned}$$

é um campo de Jacobi de tipo Killing do catenoide.

Com isto podemos enunciar um critério de estabilidade baseado na existência de um campo de Jacobi positivo.

Lema 3.6.1. Sejam $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto e L operador de estabilidade definido em Ω . Se existe $u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{C}^0(\overline{\Omega})$ e que satisfaz as seguintes propriedades

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.33)$$

então Ω é estável. Em outras palavras, se existe um campo de Jacobi positivo em Ω temos que Ω é estável.

Demonstração.

Seja $u > 0$ em Ω e tal que $Lu = 0$ em Ω . Definamos a função $w = \log u$ e calculemos Lw .

Substituindo diretamente temos,

$$Lw = -\Delta_S w - |A|^2 w. \quad (3.34)$$

Ora, $Lu = 0 \Rightarrow \Delta_S u = -|A|^2 u$, assim,

$$\begin{aligned} \Delta_S w &= \Delta_S \log u \\ &= -\frac{1}{u^2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{u} \Delta_S u \\ &= -|\nabla w|^2 - |A|^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Seja $f \in C_c^\infty(\Omega)$ multiplicando (3.35) por f^2 obtemos

$$\Delta_S w f^2 = -|\nabla w|^2 f^2 - |A|^2 f^2 \quad (3.36)$$

Integrando (3.36) de ambos lados de esta igualdade obtemos:

$$-\int_{\Omega} |A|^2 f^2 \omega_0 - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 f^2 \omega_0 = \int_{\Omega} \Delta_S w f^2 \omega_0. \quad (3.37)$$

Integrando por partes o termo á direita dado que $f = 0$ em $\partial\Omega$ resulta

$$\int_{\Omega} \Delta_S w f^2 \omega_0 = -\int_{\Omega} \nabla w \nabla(f^2) \omega_0 = -\int_{\Omega} \nabla w 2f \nabla(f) \omega_0 = -2 \int_{\Omega} f \nabla w \nabla(f) \omega_0 \quad (3.38)$$

assim, substituindo em (3.37)

$$-\int_{\Omega} |A|^2 f^2 \omega_0 - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 f^2 \omega_0 = -2 \int_{\Omega} f \nabla w \nabla(f) \omega_0. \quad (3.39)$$

Aplicando desigualdade de Schwarz e desigualdade da média geométrica e média aritmética temos

$$2|f| |\nabla w \nabla f| \leq 2|f| |\nabla w| |\nabla f| \leq 2 \frac{|f|^2 |\nabla w|^2 + |\nabla f|^2}{2} = f^2 |\nabla w|^2 + |\nabla f|^2, \quad (3.40)$$

daí,

$$-\int_{\Omega} |A|^2 f^2 \omega_0 - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 f^2 \omega_0 \geq -\int_{\Omega} |\nabla w|^2 f^2 \omega_0 - \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \omega_0. \quad (3.41)$$

Consequentemente

$$\int_{\Omega} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) \omega_0 \geq 0. \quad (3.42)$$

Como f foi escolhida como uma função arbitrária em $C_c^\infty(\Omega)$ temos que:

$$\int_{\Omega} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) \omega_0 \geq 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega) \quad (3.43)$$

portanto, Ω é estável. $\square$

A partir de este critério podemos concluir:

(i) De uma outra maneira que o gráfico mínimo é estritamente estável.

Corolário 3.6.1. *O gráfico mínimo é estritamente estável.*

Demonstração.

Com efeito, segundo o exemplo 3.6.1 para A aberto com $S = \{(x, f(x)); x \in A\}$ sendo um gráfico mínimo sobre A , temos que $e(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} u|}}$ é um campo de Jacobi positivo em S . Por outro lado para $\Omega \subsetneq \Omega' \subset A$, com $L(e(u)) = 0$ em Ω' temos $\lambda_1(L, \Omega') \geq 0$, ou seja, Ω' é estável. Logo, pelo lema 3.3.1 Ω é estritamente estável. Como Ω é qualquer relativamente compacto do gráfico obtemos que o gráfico é estritamente estável. $\square$

(ii) A estabilidade em um domínio simétrico do catenoide e a estabilidade do semicatenode usando os resultados dos exemplos 3.6.2 e 3.6.3 respectivamente o que será discutido a rigor no próximo capítulo.

(iii) O Teorema de Bernstein:

Teorema 3.6.1 (Teorema de Bernstein). *Seja $u = \langle \frac{\partial}{\partial z}, N \rangle$ campo de Jacobi em Ω , e S gráfico inteiro mínimo com $\Omega \subset S$ relativamente compacto, então, Ω é estritamente estável. Logo, aplicando o teorema de Do Carmo-Peng em [14] S é um plano.*

Observação 3.6.2. *Note que não temos estabelecido condições de fronteira para u . Quando $u > 0$ em $\overline{\Omega}$ obtemos um caso particular do lema 3.4.1. Nesse caso podemos afirmar que Ω é estritamente estável.*

3.7

Teorema de Fischer-Colbrie-Schoen.

Para hipersuperfícies mínimas completas não compactas temos também uma caracterização de estabilidade a partir do primeiro autovalor. Assumamos que a fronteira é regular a menos que seja vazia.

Teorema 3.7.1 (Teorema de Fischer-Colbrie e Schoen). *Seja S uma hipersuperfície mínima completa não compacta, então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$, $\forall \Omega \subset S$ domínio limitado.
- (ii) $\lambda_1(L, \Omega) > 0$, $\forall \Omega \subset S$ domínio limitado.
- (iii) Existe uma função positiva u em S com $Lu = 0$.

O teorema de acima, grosso modo, garante que para hipersuperfícies completas não compactas a existência de um campo de Jacobi se conclui da estabilidade estrita da hipersuperfície e vice-versa, assim como a positividade do primeiro autovalor.

Demonstração.

$i \Rightarrow ii$

Esta implicação é dada pelo corolário 2.3.3.

$ii \Rightarrow i$ óbvia.

$ii \Rightarrow iii$

Esta implicação é a menos trivial pois ao trabalhar com o operador L precisamos do uso de propriedades do mesmo como operador elíptico. Neste caso como veremos a seguir, L é estritamente elíptico o que oferece algumas vantagens com respeito as propriedades que possui.

As propriedades de operador estritamente elíptico a serem usadas serão explicitadas no apêndice.

Fixemos $p \in \Omega$, e para todo $r > 0$ definamos a bola:

$$B_r := \{q \in \Omega; \text{dist}_\Omega(p, q) < r\} \quad (3.44)$$

com $\text{dist}_\Omega(p, q)$ distancia entre os pontos p e q em Ω , que está bem definida por ser Ω um domínio, ou seja, aberto e conexo.

Como $\lambda_1(L, B_r) > 0$ pela hipótese em (ii) e o fato de λ_1 ser o menor autovalor do operador de estabilidade L podemos afirmar que todos os autovalores do operador são positivos.

Por outro lado como $L = -\Delta_S - |A|^2$ o operador é estritamente elíptico e o problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } B_r \\ u = 0 & \text{em } \partial B_r \end{cases}$$

tem apenas a solução trivial. Assim, pelo teorema 6.15 em [16] (veja apêndice), existe uma única função v_r tal que, dada $|A|^2 \in \mathbf{C}^{2,\alpha}$ (pois $|A|^2 \in \mathbf{C}^\infty$), tem se

$$\begin{cases} Lv_r = -|A|^2 & \text{em } B_r \\ v_r = 0 & \text{em } \partial B_r. \end{cases}$$

Tomando $u_r = v_r + 1$ resulta

$$\begin{cases} Lu_r = 0 & \text{em } B_r \\ u_r = 1 & \text{em } \partial B_r. \end{cases}$$

Provemos então que $u_r \geq 0$ em B_r .

Suponhamos, por absurdo que isto não acontece. Ou seja, que existe componente conexa Ω não vazia do aberto

$$\{x \in B_r; u_r(x) < 0\}.$$

Por construção $u_r < 0$ em Ω e $u_r = 0$ em $\partial\Omega$. Logo, u_r não muda de sinal e por conseguinte $\lambda_1(L, \Omega) = 0$. O que é absurdo pois temos suposto o primeiro autovalor estritamente positivo, então $u_r \geq 0$ em B_r .

Afirmamos que $u_r > 0$ em B_r .

De fato, suponhamos que existe $x_0 \in B_r$ tal que $u_r(x_0) = 0$, usando a desigualdade de Harnack, temos que

$$\sup_{B_r} u_r \leq C \inf_{B_r} u_r = 0, \quad (3.45)$$

daí, $u_r \equiv 0$ em B_r , mas, u_r é contínua até a fronteira e $u_r = 1$ em ∂B_r . Portanto, podemos concluir que $u_r > 0$ em B_r .

Definamos, para todo r , uma função positiva w_r a partir da conhecida $u_r > 0$ como

$$w_r = \frac{u_r}{u_r(p)}.$$

Observemos que $w_r(p) = 1$ e

$$Lw_r = L\left(\frac{u_r}{u_r(p)}\right) = \frac{L(u_r)}{u_r(p)} = 0 \text{ em } B_r.$$

Seja K um compacto qualquer tal que $K \subset B_{r_0}$. Aplicando novamente a desigualdade de Harnack, temos para todo $r \geq 2r_0$

$$\sup_K w_r \leq \sup_{B_{r_0}} w_r \leq C_K \inf_{B_{r_0}} w_r \leq C_K. \quad (3.46)$$

Daí, como $Lw_r = 0$ em B_r , com L estritamente elíptico e coeficientes limitados podemos aplicar as estimativas de Schauder para o interior (veja teoremas 6.6 em [16] ou apêndice) obtendo

$$|w_r|_{C_K^{2,\alpha}} \leq C \left(|w_r|_{C_K^0} \right) \leq C'_K.$$

Em resumo, se $K \subset B_{r_0}$ temos estimado uniformemente a partir das estimativas $C_K^{2,\alpha}$ a w_r para todo $r \geq 2r_0$.

Então, usando o fato que $C_K^{2,\alpha} \hookrightarrow C_K^{2,\beta}$, $\beta < \alpha$ com inclusão completamente contínua, temos pelo teorema de Arselá-Ascoli, tomando uma subsequencia se for necessário, que

$$w_r \rightarrow w$$

uniformemente em compactos de $C^{2,\beta}$ com $\beta < \alpha$ e por conseguinte em de $C^{2,\alpha}$. Assim, temos que w satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } \Omega \\ w(p) = 1 > 0 \\ w \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Por último se supomos que existe um x_0 tal que $w(x_0) = 0$. Usando a desigualdade de Harnack como no início obtemos $\forall B_{4r} \subset \Omega$ que

$$\sup_{B_r} w \leq \inf_{B_r} w = 0 \Rightarrow w \equiv 0 \text{ em } B_r. \quad (3.47)$$

Como resulta válido para $\forall B_{4r} \subset \Omega$ com $r > 0$ temos que $w \equiv 0$ em Ω o que é um absurdo pois $w(p) = 1 > 0$. Portanto para $w \in \Omega$ que satisfaz $Lw = 0$ em Ω tem-se que $w > 0$. Concluimos que w é um campo de Jacobi positivo em Ω . $\square$