

Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Barbosa e M. P. do Carmo, *On the size of a stable minimal surface in $\mathbb{R}^3$* , Pacific Journal Math **98** (1976), no. 2, 515–528 (brazilian).
- [2] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo, e J Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds.*, Mathematische Zeitschrift **197** (1988), no. 1, 123–138.
- [3] P. H. Bérard, *Spectral geometry: Direct and inverse problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.
- [4] P. H. Bérard, *An elementary introduction to eigenvalue problems with an application to catenoids in $\mathbb{R}^3$* , http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/D/notes_fortaleza.pdf, 2008, Notas da XV Escola de geometria diferencial, em homenagem aos 80 anos de Manfredo do Carmo, Fortaleza.
- [5] P. H. Bérard e R. Sá Earp, *Minimal hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, total curvature and index.*, <http://arxiv.org/abs/0808.3838>, 2008.
- [6] P. H. Bérard e R. Sá Earp, *Lindelöf's theorem for catenoids revisited.*, <http://arxiv.org/abs/0907.4294>, 2009.
- [7] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.
- [8] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1984.
- [9] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011.
- [10] U. Dierkes, A. Küster, S. Hildebrandt, e F. Sauvigny, *Minimal surfaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2010.
- [11] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1976.

- [12] M. P. do Carmo, *O Índice de morse das superfícies mínimas.*, Revista Matemática Universitaria **9/10** (1989).
- [13] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.
- [14] M. P. do Carmo e C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **1** (1979), no. 6, 903–906.
- [15] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.
- [16] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer, 2001.
- [17] A. Grigor'yan, N. Nadirashvili, e Y. Sire, *A lower bound for the number of negative eigenvalues of Schrödinger operators*, <http://arxiv.org/pdf/1406.0317v1.pdf>, 2014.
- [18] K. Grosse-Brauckmann, *Stable constant mean curvature surfaces minimize area.*, Pacific Journal of Mathematics **175** (1996), no. 2, 527–534.
- [19] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations (Paris. 1996), Diderot Editeur Arts et Sciences, 1997.
- [20] D. Hoffman e H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry V (R. Osserman, ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 90, Springer Berlin Heidelberg, 1997, pp. 5–93.
- [21] J. Jürgen, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [22] H. Mori, *Stable complete constant mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{H}^3$.*, Transactions of The American Mathematical Society **278** (1983), no. 2, 671–687.
- [23] R. Osserman, *The isoperimetric inequality.*, Bulletin of The American Mathematical Society **84** (1978), no. 6, 1182–1238.
- [24] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces.*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
- [25] R. Souam, *Basic geometry of curves and surfaces.*, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/Souam1.pdf>, Notes.

- [26] R. Souam, *Select chapters in classical minimal surfaces theory.*, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/Souam2.pdf>, Notes.
- [27] L-F. Tam e D. Zhou, *Stability properties for the higher dimensional catenoid in $\mathbb{R}^{n+1}$.*, Proceedings of The American Mathematical Society **137** (2009), no. 10, 3451–3461.
- [28] Henry C. Wente, *A note on the stability theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature.*, Pacific Journal of Mathematics **147** (1991), no. 2, 375–379.

Índice Remissivo

- Índice de uma hipersuperfície mínima, 60
- Catenoides
 - em $\mathbb{R}^3$, 31
 - em $\mathbb{R}^{n+1}$, 110
- Construção de Lindelöf, 107
- Folheação, 76
- Hipersuperfície
 - Mínima, 27
 - Totalmente Geodésica, 37
 - Totalmente Umbílica, 37
- Imersão Mínima estável, 52
- Jacobi
 - Campo de, 85
 - Operador de, 53
- Primeiro Autovalor, 55
- Quociente de Rayleigh, 64
- Superfície
 - de Enneper, 19
 - de Scherk, 35
- Teorema
 - de Bernstein, 91
 - de Estabilidade de Barbosa
- Do Carmo, 82
 - de existência de coordenadas conformes, 31
 - de Fischer-Colbrie, 60
 - de Fischer-Colbrie e Schoen, 91
 - de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$, 107
 - de Lindelöf em $\mathbb{R}^{n+1}$, 123
 - Desigualdade de Faber-Krahn, 68
 - EDP superfícies mínimas, 29
 - Forma divergente da EDP das superfícies mínimas, 30
 - Fundamental do Cálculo de Variações, 46
- Variação, 41
 - Normal, 43
 - Primeira, 42
 - Primeira do funcional da área, 46
 - Segunda do funcional da área, 51

A

Apêndice

A.1

Teoremas de convergência

Os resultados a seguir foram tomados do capítulo 3 de [7].

Definição A.1.1 (Convergência Fraca). *Seja E um espaço de Banach e x_n sequência definida em E . Se x_n converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ a x dizemos que x_n converge fracamente a x em $\sigma(E, E^*)$ e denotamos por*

$$x_n \rightharpoonup x. \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1.1. (Proposição 3.7 em [7]) *Seja E um espaço de Banach e x_n sequência definida em E . Então:*

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^*)$ se e somente se $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E^*$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ no sentido forte então $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$.
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$ então $\{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \rightarrow f$ no sentido forte em E^* então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Teorema A.1.2. (Teorema 3.18 em [7]) *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$, i.e,*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x. \quad (\text{A.2})$$

A.2

Espaços de Sobolev

Os resultados a seguir foram tomados do capítulo 9 em [7].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Definição A.2.1 (Espaço de Sobolev). *O espaço de Sobolev $W^{1,p}$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); Du \in L^p(\Omega)\}. \quad (\text{A.3})$$

Observação A.2.1.

- (i) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é claramente linear.
- (ii) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.
- (iii) No espaço $W^{1,p}(\Omega)$ o conceito de continuamente diferenciável é substituído pelo conceito de diferenciabilidade fraca e o conceito de Hölder continuidade pelo de p -integrabilidade.
- (iv) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço normado com a norma associada:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}. \quad (\text{A.4})$$

- (v) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.
- (vi) Se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e se $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$ então $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Para o caso especial em que $p = 2$ tem-se que

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega), \quad (\text{A.5})$$

com $H^1(\Omega)$ o espaço de Hilbert definido em Ω .

Teorema A.2.1 (Teorema de Densidade). *(Corolário 9.8 em [7]) Seja Ω domínio de classe C^1 e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência u_n de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que: $u_n|_\Omega \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Em outras palavras, as restrições a Ω das funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ formam um subespaço denso de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Definição A.2.2 (Espaço $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$). *Seja Ω domínio limitado e $1 \leq p < \infty$ o espaço $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$ representa o fecho do conjunto das funções $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Segundo esta definição temos que:

$$\dot{W}^{1,2}(\Omega) = \dot{H}^1(\Omega). \quad (\text{A.6})$$

Teorema A.2.2 (Segundo Teorema de Densidade). *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso no espaço $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$.*

Observação A.2.2.

- (i) Segundo este teorema podemos concluir que na definição do espaço $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$ é equivalente usar $C_c^\infty(\Omega)$ ao invés de $C_c^1(\Omega)$.
- (ii) Este teorema foi usado implicitamente na forma do primeiro autovalor.

Lema A.2.1. *(Lema 9.5 em [7]) Seja Ω domínio limitado e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se o suporte de u é um subconjunto compacto de Ω então $u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$.*

A.2.1**Teorema de Rellich-Kondrakov**

Teorema A.2.3 (Teorema de Rellich-Kondrakov). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e sejam $p, q \geq 1$ dois números reais. Então:*

- (i) *Se $q < n$ e $p < \frac{nq}{n-q}$, a inclusão de $H_1^q(M)$ em $L^p(M)$ é compacta.*
- (ii) *Se $q > n$ a inclusão de $H_1^q(M)$ em $\mathbf{C}^\alpha(M)$ é compacta para todo $\alpha \in]0, 1[$ tal que $(1 - \alpha)q > n$. Em particular, a inclusão de $H_1^q(M)$ em $\mathbf{C}^0(M)$ é compacta.*

Observação A.2.3. *No material temos usado somente o item (i) deste resultado.*

Uma prova rigorosa do teorema pode ser consultada no capítulo 5 seção 5 de [19].

A.3**Fórmula da co-área**

A fórmula da co-área representa uma generalização do Teorema de Fubini, a forma em que temos usado a mesma é dada pelo teorema a seguir o qual pode ser consultado no capítulo IV.2 de [8].

Teorema A.3.1. *Seja Ω domínio relativamente compacto em M variedade Riemanniana e seja $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $\mathbf{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ tal que $f = 0$ em $\partial\Omega$. Para qualquer valor regular t de $|f|$, temos que*

$$\Gamma(t) = |f|^{-1}(t), \quad A(t) = A(\Gamma(t)), \quad (\text{A.7})$$

com dA_t a forma de volume $(n-1)$ -dimensional em $\Gamma(t)$. Então,

$$dV|_{\Gamma(t)} = \frac{dA_t dt}{|\nabla f|} \quad (\text{A.8})$$

e para toda $\phi \in L^1(\Omega)$ tem-se que

$$\int_{\Omega} \phi |\nabla f| dV = \int_0^\infty dt \int_{\Gamma(t)} \phi dA_t \quad (\text{A.9})$$

com V o volume de Ω .

A.4

Teoria dos operadores elípticos

Os resultados apresentados nesta seção e que foram usados no desenvolvimento do texto foram tomados de [16] capítulos 3,6 e 8.

As provas dos mesmos podem ser consultadas na referência citada.

Considerações Iniciais

Suponhamos Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$. Consideremos o operador L definido em Ω

$$L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} - \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i - c(x) \quad (\text{A.10})$$

para $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Assumamos que a_{ij}, b_i e c são contínuos então limitados em $\bar{\Omega}$ e L uniformemente elíptico em Ω no seguinte sentido:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.11})$$

ou equivalentemente se a matriz $(a_{ij}(x))$ é definida uniformemente positiva em x para alguma constante positiva λ .

Observação A.4.1. *No caso de um operador autoadjunto com respeito a $L^2(\Omega)$, como nosso caso em questão, o operador adquire a forma particular*

$$L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} - c(x). \quad (\text{A.12})$$

A.4.1

Princípio do Máximo

Teorema A.4.1 (Princípio do Máximo (capítulo 3 [16])). *Seja Ω domínio limitado e*

$$L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} - \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i - c(x). \quad (\text{A.13})$$

um operador linear uniformemente elíptico com coeficientes limitados. Se $c(x) \geq 0$ em Ω então $\forall u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

$u \geq 0$ em Ω . Neste caso dizemos que L satisfaz o princípio do máximo.

A.4.2**Desigualdade de Harnack**

Teorema A.4.2 (Desigualdade de Harnack (Teorema 8.20 de [16])). *Seja o operador L , como em (A.10) e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz que:*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Então $\forall B_{4R}(x) \subset \Omega$ tem-se a seguinte desigualdade

$$\sup_{B_R(x)} u \leq C \inf_{B_R(x)} u \quad (\text{A.14})$$

com C constante.

A.4.3**Estimativa global de Schauder**

Teorema A.4.3. (Teorema 6.6 de [16]) *Seja Ω domínio $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução de $Lu = f$ em Ω onde $f \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ e L é definido como no início tal que os coeficientes também satisfazem a seguinte propriedade*

$$|a_{ij}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha,\Omega}}, |b_i|_{\mathcal{C}^{0,\alpha,\Omega}}, |c|_{\mathcal{C}^{0,\alpha,\Omega}} \leq \Lambda. \quad (\text{A.15})$$

Seja $\varphi(x) \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e suponhamos que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Então,

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha,\Omega}} \leq C(\|u\|_{\mathcal{C}^0,\Omega} + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha,\Omega}} + \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha,\Omega}}) \quad (\text{A.16})$$

com $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

A.4.4**Existência de solução não trivial para os problemas homogêneo e não homogêneo**

Teorema A.4.4. (Teorema 6.15 de [16]) *Seja o operador estritamente elíptico*

$$L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} - \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i - c(x) \quad (\text{A.17})$$

com coeficientes em $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ com Ω domínio $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então é satisfeita uma das seguintes afirmações:

(i) O problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui somente a solução trivial. Neste caso a solução do problema não homogêneo

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\forall f \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

(ii) O problema homogêneo possui soluções não triviais as quais constituem um subespaço finito dimensional de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

A.5

Equações fundamentais numa imersão: Equações de Gauss e Codazzi

Esta seção do apêndice foi elaborada com mais detalhes visto que estes resultados tem uma maior incidência no trabalho desenvolvido.

Dada a imersão isométrica $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ da superfície S de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ definimos

$$\mathcal{X}(S) = \{\text{campos de vetores tangentes em } S\}$$

então $\forall p \in S$ temos a decomposição do espaço tangente dada por $T_p S = T_p S \oplus (T_p S)^\perp$. Com isto dados $X, Y \in \mathcal{X}(S)$ obtemos a equação de Gauss a seguir que representa a decomposição da conexão em sua parte tangente e sua parte normal

$$\bar{\nabla}_Y X = (\bar{\nabla}_Y X)^T + (\bar{\nabla}_Y X)^\perp \quad (\text{A.18})$$

Mais precisamente, notando que $\bar{\nabla}$ representa a conexão do ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\nabla_Y X$ a conexão na hipersuperfície.

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + B(X, Y)N \quad \text{com} \quad B(X, Y)N = II_p(X, Y). \quad (\text{A.19})$$

E tomando $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas locais num ponto $x \in S$ e o referencial local adaptado $\{X_1, \dots, X_n\}$ a equação se escreve como

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} = \bar{\nabla}_{X_k} X_i = \nabla_{X_k} X_i + b_{ik} N$$

com $b_{ik} N = \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_i, N \rangle N$.

A partir destas equações obtemos as equações fundamentais numa imersão isométrica ou equações de compatibilidade: as equações de curvatura de Gauss e as equações de Codazzi Mainardi.

(i) Equações de curvatura de Gauss

Estas equações correspondem à parte tangente do tensor de curvatura que em $\mathbb{R}^{n+1}$ é nulo (veja [13]).

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0 \quad (\text{A.20})$$

com $[X, Y]$ o colchete entre os campos X e Y .

Tomando coordenadas locais de S e o referencial local adaptado e notando que o colchete entre dois campos do referencial se anula, a equação se escreve como

$$\nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_{ik} - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_{jk} = 0$$

E como a conexão pode ser escrita a partir dos símbolos de Christoffel Γ_{ik}^l como $\nabla_{X_i} X_{ik} = \sum_l \Gamma_{ik}^l X_l$, esta equação pode ser vista também a partir destes símbolos.

(ii) Equações de Codazzi Mainardi

Estas equações correspondem à parte normal do tensor de curvatura.

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX = A[X, Y] \quad (\text{A.21})$$

com A representando o operador de Weingarten.

Tomando novamente coordenadas locais e o referencial local adaptado e segundo as observações feitas acima é também possível escrever estas equações localmente.

Em resumo tomando $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas locais de S e o referencial local adaptado $\{X_1, \dots, X_n\}$ notando que o colchete entre dois campos do referencial se anula e usando os símbolos de Christoffel as Equações de curvatura de Gauss e Codazzi Mainardi se expressam respetivamente como:

$$\begin{cases} \sum_l (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^m - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^m = \sum_l g^{ml} (b_{ik} b_{jl} - b_{jk} b_{il}) \\ \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = \sum_l (b_{kl} \Gamma_{ij}^l - b_{lj} \Gamma_{ik}^l) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

A.5.1

Operador de Laplace Beltrami

O operador de Laplace usual tem varias generalizações de forma que possa ser mais amplamente usado, mas, como no caso usual é definido a partir do operador gradiente que em este caso também vai ser descrito de modo mais geral do que no espaço euclidiano pois estaremos estudando ele sobre a hipersuperfície.

Definição A.5.1 (Gradiente sobre a hipersuperfície S). *Seja $f \in C^\infty$ e $p \in S$, $\forall v \in T_p S$ o gradiente de f sobre a hipersuperfície S de dimensão n imersa em*

$\mathbb{R}^{n+1}$ representa o campo vetorial tangente à hipersuperfície no ponto p e se define como

$$\langle \nabla_S f(p), v \rangle = v f(p) = df(p)v. \quad (\text{A.23})$$

Tomando $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas locais numa vizinhança de um ponto p e um referencial local adaptado $X_1, \dots, X_n$ obtemos

$$\nabla_S f(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} X_i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Logo } |\nabla_S f|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Note que a diferença do laplaciano usual tem aparecido o termo g^{ij} que representa a componente ij -ésima da matriz inversa dos coeficientes da métrica (g_{ij}) , isto se deve ao fato de que, como já tínhamos antes mencionado, a métrica euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$ induz uma métrica não propriamente euclideana na hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$.

O Laplaciano é definido de modo geral como a divergência do vetor gradiente, por isto, vamos primeiramente expressar a forma da divergência de um campo vetorial.

Seja $X \in \mathcal{X}(S)$, a divergência na hipersuperfície S do campo vetorial X é definida como o traço da aplicação $Y \rightarrow \bar{\nabla}_Y X$, i.e.,

$$\text{div}_S X := \text{traço}(Y \rightarrow \bar{\nabla}_Y X) \quad (\text{A.25})$$

onde $\bar{\nabla}_Y X$ representa a conexão Riemanniana do ambiente e o endomorfismo $Y \rightarrow \bar{\nabla}_Y X$ é tomado em $T_p S$. Assim em coordenadas locais tomando o referencial local adaptado em $T_p S$

$$\text{div}_S X = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} X, X_i \rangle. \quad (\text{A.26})$$

Definição A.5.2 (Operador de Laplace Beltrami). *Seja S a hipersuperfície de dimensão n imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{F}$ o espaço das funções $\mathbf{C}^\infty$. O operador de Laplace Beltrami em S agindo sobre $f \in \mathcal{F}$ é a aplicação linear definida por:*

$$\begin{aligned} \Delta_S : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto \text{div}_S(\nabla_S f). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Em alguns casos para diferentes aplicações é adotada a convenção de tomar dito operador com sinal negativa.

Tomando coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_n)$ e o referencial local adaptado

$$\begin{aligned}
 \Delta_S f &= \operatorname{div}_S(\nabla_S f) = \operatorname{traço}(Y \mapsto \bar{\nabla}_Y \nabla_S f) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} \nabla_S f, X_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i \langle \nabla_S f, X_i \rangle - \langle \nabla_S f, \bar{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i X_i(f) - \bar{\nabla}_{X_i} X_i(f).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial X_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial X_j}. \quad (\text{A.28})$$