



Mauricio Sant'Anna dos Santos

**Um Jogo de Opção Real Evolucionária
Com a Opção de Adiar o Investimento**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: Prof. André Barreira da Silva Rocha

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

Mauricio Sant'Anna dos Santos

Um Jogo de Opção Real Evolucionária Com a Opção de Adiar o Investimento

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. André Barreira da Silva Rocha

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Carlos Patricio Samanez

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Marco Antonio Guimarães Dias

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 03 de setembro de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Mauricio Sant'Anna dos Santos

Mauricio Sant'Anna dos Santos graduado em Engenharia de Produção da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Santos, Mauricio Sant'Anna dos

Um jogo de opção real evolucionária com a opção de adiar o investimento / Mauricio Sant'Anna dos Santos; orientador: André Barreira da Silva Rocha. – 2015.

70 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2015.

Inclui bibliografia

CDD: 658.5

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou
durante todo o caminho em busca do conhecimento.

Agradecimentos

São muitos os que eu gostaria de agradecer ao fim dessa jornada. Sei também que não haveria espaço para os adjetivos que estas pessoas realmente merecem. Portanto, deixo registrado nessa página uma pequena parcela da minha imensa gratidão.

Sou grato primeiramente a minha família, pelo amor, exemplo e entusiasmo, em especial a minha mãe Denyse Sant'Anna Mauricio dos Santos e meu pai Irineu Silvio dos Santos. Agradeço aos inúmeros colegas do mestrado e da graduação pela torcida, conversas, troca de conhecimento e também pelos desabafos, dentre eles Anna Rosa, Rafael Capano, Douglas Sad, Erick Meira e Jessica Ristow amigos que me acompanharam e auxiliaram nessa jornada. Agradeço a equipe profissional e competente da PUC, sem a qual este trabalho não seria possível. Ao longo do programa diversos professores contribuíram com seus conhecimentos, críticas e reflexões. Entretanto deixo agradecimentos especiais para àqueles que foram não só professores, como também amigos.

Sou grato a CAPES pelo apoio financeiro. Finalmente, agradeço a Deus e N. Sra. de Sant'Anna por proverem força e alegria para a realização deste trabalho.

Resumo

Santos, Mauricio Sant'Anna; Rocha, André Barreira da Silva (Orientador). **Um jogo de opção real evolucionária com a opção de adiar o investimento.** Rio de Janeiro, 2015. 70p. MSc. Dissertação - Departamento de Engenharia Industrial. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta dissertação é demonstrar que mesmo em ambientes em que a decisão do indivíduo não segue a racionalidade, podemos obter uma estratégia ótima. Com o auxílio do equilíbrio evolucionariamente estável (ESS), conseguimos analisar casos diferentes da literatura usual de teoria dos jogos em que mesmo com escolhas sem racionalidade, encontramos a melhor estratégia, para tal usaremos a metodologia do jogo de opções, união entre a teoria dos jogos e a metodologia de opções reais, juntamente com o conceito de equilíbrio evolucionariamente estável (ESS). Isso é demonstrado através da modelagem de um mercado duopolista assimétrico, sujeito a incertezas. Neste trabalho as firmas são diferentes, existe um duopólio assimétrico. Aqui as empresas são não homogêneas porque uma empresa tem custo operacional mais baixo do que a outra para o mesmo investimento. Isto significa que uma empresa tem vantagem competitiva sobre a rival. Os resultados do modelo mostram que, dependendo do tipo de estratégia assumida pela empresa, é possível que a empresa de baixo custo se torne líder como na literatura usual e em alguns casos encontramos que diferente da expectativa usual é possível que a empresa de alto custo venha a se tornar líder e demonstra que a premissa de racionalidade não é necessária para a escolha inicial da empresa utilizando o conceito de ESS para definir o equilíbrio assim como foi feito no trabalho de Xiao e Yu (2006).

Palavras-Chave

Opções Reais; Equilíbrio Evolucionariamente Estável (ESS); Teoria dos Jogos; Duopólio Assimétrico, Jogos de opções reais.

Abstract

Santos, Mauricio Sant'Anna; Rocha, André Barreira da Silva (Advisor). **A real option evolutionary game with the option to defer investment**. Rio de Janeiro, 2015. 70p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Industrial. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this dissertation is show that even in environments where the decision of the individual not follow rationality, we can get a optimal strategy. with the help of evolutionarily stable strategy, we analyze different cases of the usual literature on game theory that even with choices without rationality, we find the best strategy, for that we will use the option game methodology, which is the union between gaming theory methodology and option game methodology, with the concept of evolutionarily stable strategy (ESS). This is demonstrated through modeling of a duopolistic market, with uncertainties, in this dissertation firms are different. Here companies has no-Homogeneous cost because a company has lower operating costs than the other for the same investment. This means that a company has competitive advantage over rival. The model results show that, depending on the strategy assumed by the company it is possible that the low-cost company to become leader as usual in the literature and in some cases also shows that is possible to the high cost company to become leader and demonstrates that the premise of rationality are not necessary for choosing initial strategy, the company can find equilibrium using the concept of ESS to set the balance as was done in the paper of Xiao and YU (2006).

Keywords

Real Options; Evolutionarily Stable Strategy (ESS); Game Theory; Asymmetric Duopoly, Real option game.

Sumário

1. Introdução	14
2. Referencial teórico	19
2.1. Teoria das opções reais	19
2.2. Teoria dos jogos	24
2.2.1. Equilíbrio de Nash	29
2.2.2. Equilíbrio em estratégias mistas.....	31
2.3. Equilíbrio evolucionariamente estável	32
2.4. Jogos de opções	36
2.5. Momento ótimo de investimento	38
3. Modelo	40
4. Dados e resultados	49
4.1. Caso PP	50
4.2. Caso RR	54
4.3. Caso PR.....	57
5. Conclusão	60
6. Referências bibliográficas	62
7. Apêndice A	68

Lista de figuras

Figura 1 –Assimetria na Opção de Compra

21

Lista de gráficos

Gráfico 1 – Curvas de líder e seguidor, alternando entre empresas A e B.	51
Gráfico 2 – Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresas A e B.	52
Gráfico 3 – Curvas de líder e seguidor, alternando entre empresas A e B.	55
Gráfico 4 – Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresas A e B.	56
Gráfico 5 – Curvas de líder e seguidor, alternando entre empresas A e B.	58
Gráfico 6 – Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresas A e B.	59

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Jogo estratégico (Fonte: dissertação Menasché D. S.)	27
Tabela 2.2 – Matriz de resultados para o Dilema do Prisioneiro	27
Tabela 3.1 – Equilíbrio ESS para cada situação	44
Tabela 3.2 – Equilíbrio ESS para cada situação válida	45
Tabela 3.3 – Líder e seguidor para cada caso	46

Lista de siglas e abreviaturas

GBM	Movimento geométrico browniano
OR	Opções Reais
VP	Valor Presente
VPL	Valor Presente Líquido
EN	Equilíbrio de Nash
ROG	Jogo de Opção Real
ESS	Estratégia Evolucionariamente Estável

“A simplicidade é a máxima da sofisticação”.

Leonardo da Vinci

1. Introdução

Em mercados competitivos cada ação executada entre as empresas é como um jogo, uma vez que na tomada de decisões de investimento, as empresas implicitamente tem que levar em conta o que elas consideram o que as outras empresas farão em reação as suas próprias ações de investimento. Perceber que os seus concorrentes pensam da mesma forma. Por conseguinte, como a teoria dos jogos tem como objetivo fornecer uma estratégia em um quadro abstrato para situações de modelagem envolvendo escolhas interdependentes e a teoria das opções reais é uma ferramenta adequada para a maioria das decisões de investimento, uma combinação destas duas teorias produzirá resultados promissores e complementares.

Esta combinação é chamada de jogo de opção e é onde o valor do projeto é tratado como um estado variável que segue um processo estocástico conhecido. Aqui se considera o tempo infinito (opção perpétua) e contínuo, o custo de investimento é afundado, indivisível e conhecido, as empresas não estão restritas financeiramente, o problema de investimento é estudado em isolamento como se fosse o único ativo no balanço das empresas (o jogo é jogado em um único projeto) e geralmente há duas empresas com a opção de investir.

Myers (1977) cunhou o termo “opções reais” para as oportunidades de investimento em projetos (ativos reais). A modelagem utilizando a teoria de Opções Reais começou com Tourinho (1979), Kester (1984), Brennan e Schwartz (1985), McDonald e Siegel (1985), McDonald (1986), Trigeorgis e Mason (1987), e Paddock et al. (1988), apenas para mencionar alguns dos casos mais conhecidos. Sobre a combinação de precificação de opções reais e teoria dos jogos, Ziegler (1999, p.133) escreveu: “A análise da teoria dos jogos de opções em vigor substitui a maximização de utilidade esperada encontrada em modelos da teoria dos jogos clássicos com a maximização do valor de uma opção”, a abordagem de precificação de opções tem a vantagem que leva em conta automaticamente o valor do dinheiro no tempo e precifica o risco.

Modelos de jogos de opções compreendem a combinação de opções reais e teoria dos jogos que são dois importantes trabalhos ganhadores de prêmios Nobel. Embora os modelos de tempo discreto sejam, geralmente, modelos mais intuitivos

do que de tempo contínuo, na maioria dos casos, permitem conclusões mais gerais e o uso de softwares profissionais. A literatura sobre jogos de opções começou com a dissertação de Smets (1993), modelo que se resume no capítulo nove do livro de Dixit e Pindyck (1994). Huisman (2001) foi o primeiro livro com foco em jogos de opções reais e Ziegler (1999) foi o primeiro livro sobre jogos de opções financeiras. Smit e Trigeorgis (2004) é um livro didático mais recente e acessível sobre o assunto. No trabalho de Dias e Teixeira (2010) existe uma revisão bibliográfica mais detalhada.

O modelo de tempo contínuo básico do exercício estratégico de opções reais sob concorrência do produto é apresentado por Smets (1991). Ele considera a decisão das empresas em um mercado duopólista de mudar a produção que ocorre em uma economia desenvolvida para uma economia emergente, onde os custos de produção são mais baratos se comparados com os custos anteriores. Aplicações e extensões do modelo de exercício estratégico de opção real incluem Boyer et al. (2002), Decamps e Mariotti (2000), Grenadier (1996, 1999), e Huisman Kort (1999), Lambrecht e Perraudin (2003), Mason e Weeds (2003), Perotti e Rossetto (2000), Shackleton et.all (2004), e Williams (1993). Contribuições anteriores por Fudenberg e Tirole (1985), e Reinganum (1981) fornecem os fundamentos da teoria dos jogos dentro de um cenário determinístico. Tirole (1988), Ch. 8 fornece uma visão geral dos modelos de dissuasão de entrada relacionados, ao passo que Shaked e Sutton (1990) consideram uma estrutura de mercado do produto como uma função de, entre outros, os custos de entrada.

Recentemente, tem havido um grande interesse em utilizar a teoria dos jogos evolucionários para estudar sistemas econômicos, que remediem alguns inconvenientes

da teoria dos jogos ortodoxa. Separadamente, (a) teoria dos jogos ortodoxa assume que os jogadores são totalmente racionais e podem tomar decisões ótimas (sofisticadas); (b) que têm o conhecimento comum dessa racionalidade; (c) e que sabem as regras do jogo. Mas, na realidade, os jogadores têm muitas vezes racionalidade limitada, não podendo tomar uma ação ótima, não sabendo a racionalidade dos outros e nem as regras do jogo, que são as premissas utilizadas na teoria evolucionária dos jogos. Mesmo os jogadores racionais, muitas vezes cometem erros que afetarão as estratégias de outros jogadores. Nem os jogadores

totalmente racionais estão livres de erros (Young, 1993). Uma vez que podem existir várias soluções gerais para jogos não cooperativos, como que os jogadores escolhem entre várias soluções? A teoria dos jogos ortodoxa não consegue responder esse quesito com clareza e facilidade, todavia é simples para a teoria dos jogos evolucionária. A partir de um ponto específico, um estado estável original será alcançado em um jogo evolucionário. O equilíbrio selecionado é dependente do caminho e depende da condição inicial.

A teoria dos jogos evolucionários é interpretada biologicamente; os jogadores não escolhem suas estratégias (genótipos) racionalmente ou até mesmo deliberadamente, mas diferentes perfis de estratégias irão levar a diferentes premiações, é natural imitar a seleção de escolhas deliberadas. Smith e Price (1973) introduziram o conceito da estratégia evolucionariamente estável (ESS) para lidar com esses jogos. É uma estratégia, em que se tratando de estratégias puras, se a maioria dos membros de uma população resolve adotá-la (pois possui o melhor retorno), em seguida, nenhuma estratégia mutante (estratégia diferente da já adotada) pode invadir a população sendo a seleção natural que mantém a estratégia com o melhor pagamento como a selecionada por todos na população. O equilíbrio em ESS é, invariavelmente, um equilíbrio de Nash e, portanto, uma solução válida da teoria dos jogos, mas nem todo equilíbrio de Nash é um ESS.

A teoria dos Jogos Evolucionários trata do social, bem como da evolução biológica dos seres vivos. Tem sido estudada intensivamente desde a década de 1970, e é bem compreendida (Hofbauer e Sigmund 1998; Samuelson 1997). Mesmo estudos analíticos podem resolver os problemas e fornecer informações úteis. Jogos evolucionários também têm sido estudados empiricamente (Maynard Smith, 1984), e acima de tudo, computacionalmente, por vezes através da execução de estratégias um contra o outro e transmitindo cópias destas estratégias para as gerações futuras, de acordo com a seu histórico de pagamentos (Axelrod 1984; 1997;. Nowak et al 1995;. Nowak e Sigmund 1993).

As populações de insetos, plantas e, até mesmo, programas de computador podem evoluir para pontos de equilíbrio da teoria dos jogos, e de cooperação sem que se tenha uma tomada de decisão racional. Será estudado o duopólio homogêneo na definição de quantidades. Xiao e Yu (2006) estudaram a estratégia de marketing evolutivamente estável em dois canais verticalmente integrados com

mercadorias diferenciadas. No modelo, eles analisaram os efeitos do tipo de interação estratégica (substitutos estratégicos ou complementares). Nele foi utilizado o conceito de ESS. A população é dita como ESS, se ela não pode ser invadida por uma estratégia invasora, subpopulação de indivíduos usando uma estratégia individual diferente. ESS é uma concepção estática da teoria dos jogos evolucionários. No modelo, investiga-se o caso de quantidades diferentes no duopólio para estratégias diferenciadas. Xiao e Yu (2006) mostraram que a maximização do lucro é um ESS único na competição de preços na situação de duopólio com bens diferenciados e funções de demanda lineares inversas.

O modelo usa uma forma de raciocínio semelhante à indução matemática chamada de “Backward induction” (indução para trás), um método estabelecido para provar teoremas. Foi introduzido na teoria dos jogos por Zermelo (1912), que provou o primeiro grande teorema da teoria dos jogos, para casos em que cada jogo é estritamente competitivo como no jogo de xadrez, em que os jogadores que têm informação perfeita de movimentos anteriores, terão uma estratégia vencedora garantida em relação ao outro, ou que o beneficie de alguma forma.

O modelo de duopólio assimétrico sob incerteza é uma hipótese mais realista na maioria das indústrias. Neste trabalho as firmas são diferentes, existe um duopólio assimétrico em que as empresas são não homogêneas porque uma empresa tem custo mais baixo do que a outra para o mesmo investimento. Isto significa que uma empresa tem vantagem competitiva sobre a rival como em Dias e Teixeira (2010), Huisman (2001), Paxson e Pinto (2005), e Pawlina e Kort (2006). Com poucas exceções, se assume que as empresas podem observar todos os parâmetros do modelo (drift, volatilidade, etc.). Foi assumida uma função de demanda linear inversa em que empresas escolhem a estratégia e encontram as quantidades e o preço de equilíbrio do mercado de acordo com a curva de demanda inversa. Ambas as empresas tem base no mesmo país e ambas estão considerando o investimento no mesmo país estrangeiro como nos trabalhos de Dias e Teixeira (2010) e Joaquin e Butler (2000).

Esta dissertação visa mostrar que mesmo em ambientes em que a decisão do individuo não segue a racionalidade, podemos obter uma estratégia ótima. Com o auxílio do equilíbrio evolucionariamente estável, conseguimos analisar casos diferentes da literatura usual de teoria dos jogos em que mesmo com

escolhas sem racionalidade, encontramos a melhor estratégia, para tal usamos a metodologia do jogo de opções, união entre a teoria dos jogos e a metodologia de opções reais, juntamente com o conceito de equilíbrio evolucionariamente estável, o trabalho esta dividido em cinco tópicos. Nesse primeiro capítulo está a introdução. No segundo capítulo é apresentado o referencial teórico, com uma breve descrição da origem e desenvolvimento das ferramentas e conceitos utilizados no trabalho. No terceiro capítulo é feita a descrição do modelo, os pressupostos, os possíveis casos, a equação empírica com o valor do seguidor e o valor do líder. No capítulo quatro temos os resultados obtidos sobre cada caso e os gráficos encontrados. No capítulo cinco temos a conclusão sobre os cenários de equilíbrio, o que indica o lucro do líder e do seguidor e por ultimo as referências concluem o trabalho.

2. Referencial teórico

2.1 Teoria das Opções Reais

Incertezas de diversos tipos permeiam o ambiente do mundo dos negócios. Os preços das commodities e da energia flutuam, assim como a demanda e preços de produtos, a taxa de juros, a taxa de câmbio dentre outras variáveis. Quando a conjuntura muda, as empresas que têm mais capacidade de se adaptar ao novo cenário (ou seja, as empresas com mais flexibilidades) terão mais valor.

A abordagem do fluxo de caixa descontado, apesar de ser a mais utilizada na avaliação de projetos de investimentos, é questionada por não conseguir capturar a flexibilidade gerencial de adaptar e revisar decisões em resposta a movimentos inesperados do mercado. Diversos projetos possuem uma flexibilidade valiosa para alterar sua estratégia inicial de operação com o intuito de aproveitar oportunidades futuras favoráveis ou para reagir de forma a minimizar possíveis perdas. De posse de novas informações, que chegam a cada período, é possível deferir, expandir, contrair, abandonar, ou alterar de outras formas um projeto em vários estágios de sua vida útil. Diversos autores reconhecem que a avaliação de projetos por opções reais é uma ferramenta mais adequada para quantificar o valor da flexibilidade gerencial e que o uso do fluxo de caixa descontado não é eficiente quando há incertezas no projeto.

Opções Reais (OR), como o nome indica, usa a teoria de opções para avaliar ativos físicos ou reais, ao invés de ativos financeiros, como títulos e ações. Diferentemente do método tradicional, a abordagem das opções reais considera múltiplas trajetórias para o projeto, consequência da alta incerteza e da flexibilidade estratégica gerencial. OR é por definição o direito, mas não a obrigação, que um agente possui quando toma decisões sobre um ativo real. Ou seja, opção é o oposto de obrigação, opção é liberdade de escolha, ter opção é ter flexibilidade de escolha na tomada de decisão. O grande desafio é como quantificar essa flexibilidade, que é valiosa principalmente num ambiente de incerteza. Esse é o principal objetivo da teoria das opções reais.

Na medida que as informações se tornam disponíveis e a incerteza é resolvida, as melhores estratégias são escolhidas e implementadas. Enquanto a

metodologia tradicional assume uma decisão única e estática, a das OR assume uma série dinâmica multidimensional de decisões.

As OR proporcionam um julgamento que vai além do método tradicional. Na pior das hipóteses, ela é um teste para os resultados obtidos usando o fluxo de caixa descontado, e na melhor, ela proporciona uma abordagem robusta para a avaliação de projetos quando combinada com a metodologia tradicional.

Existem muitas razões para aplicar a teoria de opções reais. Uma delas é a consideração do valor do projeto em diversos cenários possíveis, o que aumenta o conjunto de informações da análise. Esta maior quantidade de dados pode gerar um impacto em inúmeras variáveis do estudo, como, por exemplo, a opção de investir no futuro, o momento ótimo do investimento, a taxa de retorno, a taxa de juros, etc. Por ser uma análise bastante flexível, ela ainda pode ser aplicada a diferentes tipos de projetos.

A teoria das opções reais utiliza técnicas derivadas do modelo de precificação de opções financeiras para ressaltar a importância da flexibilidade da espera. Segundo esta, a gerência deve esperar que grande parte da incerteza seja resolvida para que o projeto seja claramente benéfico, requisitando um prêmio a um projeto com valor presente líquido nulo. Durante a postergação, novas informações possíveis de afetar o projeto podem ser reveladas, dando mais embasamento nas decisões a serem tomadas. Há uma nova visão dos efeitos da incerteza no valor das oportunidades de investimento. As decisões da gerência são assimetricamente posicionadas em relação ao cenário positivo e negativo, de forma que a incerteza possa aumentar o valor da opção, de forma que, ganhos podem ser feitos em mercados muito voláteis e incertos por causa do ganho potencial excepcional e perda limitada, uma vez que a gerência pode desistir dos investimentos planejados ou simplesmente não prosseguir com o próximo estágio. Essa assimetria está representada na figura 1, através de uma opção de compra.

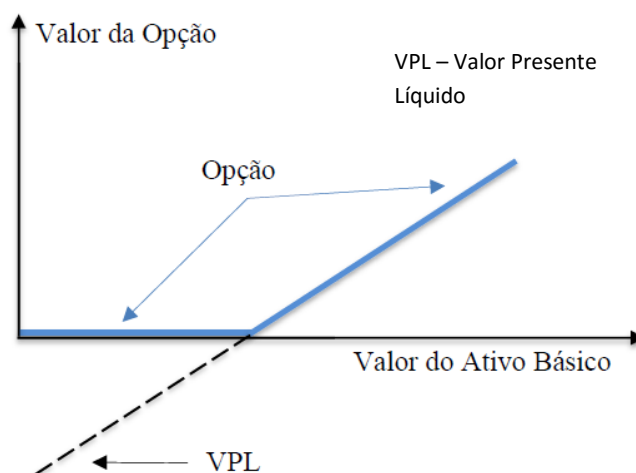


Figura 1 – Assimetria na Opção de Compra (fonte – Dissertação Felipe P. Azevedo, 2013)

A curva azul do gráfico representa o valor de uma opção de compra no momento do exercício, dada pelo máximo entre zero e o valor do ativo básico subtraído pelo preço de exercício. Já o valor presente líquido equivale somente à diferença entre o valor do ativo básico e o preço de exercício. Dessa forma, o valor da opção equivale ao máximo entre zero e o valor presente líquido.

Os gerentes podem se beneficiar de diferentes tipos de opções reais. Algumas dessas opções são:

Opção de abandono - Se as condições de mercado piorarem drasticamente, a gerência pode abandonar permanentemente as operações correntes e vender os equipamentos ou outros ativos a um valor residual.

Opção de fechar temporariamente um projeto - Se as condições de mercado são instáveis, uma empresa pode não operar continuamente por todo tempo. Por exemplo, se os preços de minérios são tais que os fluxos de caixa não são suficientes para cobrir os custos variáveis de operação, pode ser melhor suspender temporariamente as operações, principalmente se os custos de troca entre os modos operação e suspensão das operações são pequenos. Se os preços aumentarem suficientemente, as operações podem ser retomadas.

Opção de troca de um conjunto de produto ou insumo por outro - Se os preços ou o perfil da demanda mudarem, o gerente pode mudar o mix de produtos da empresa (flexibilidade no produto), ou alternativamente, manter a

produção do mesmo produto e usar diferentes tipos de matéria-prima ou fornecedores (flexibilidade na troca de insumos).

Opção de crescimento - Consiste em uma opção de compra no qual o valor das oportunidades de crescimento depende do investimento futuro efetuado pela empresa.

Opção de adiar o investimento - Uma das opções mais frequentes nos investimentos em ativos reais é a opção de adiar o investimento, pois, muitas vezes, a avaliação do projeto resulta VPL negativo (ou positivo mais baixo). A gerência possui a opção de esperar antes de fazer o investimento para ver se as condições de mercado futuras o justificam. Não basta $VPL > 0$, ele precisa ser suficientemente acima de zero.

Opção de expansão - Ao iniciar um projeto, os gerentes podem ter flexibilidade para alterá-lo de diversas formas ao longo de sua vida útil, ou seja, caso as condições de mercado se tornem mais favoráveis do que o esperado, a empresa pode expandir a escala de produção ou acelerar a utilização dos recursos incorrendo no custo necessário para esta expansão.

Opção de contração - De modo análogo à opção de expansão, existe a opção de contrair o investimento se as condições de mercado se tornarem mais fracas do que originalmente esperadas, a gerência pode operar abaixo da capacidade ou até mesmo reduzir a escala de operações, salvando dessa forma parte dos investimentos planejados.

O dois modelos de precificação de opção mais conhecidos são os de Black e Scholes (1973) e de Cox, Ross e Rubinstein (1979). O primeiro envolve matemática avançada e noções de teoria financeira em tempo contínuo, enquanto o segundo oferece uma explicação mais intuitiva da precificação de opções em tempo discreto. Esses modelos foram desenvolvidos para precificar opções financeiras, porém, seu uso foi ampliado para a valoração de opções reais.

Os modelos em tempo contínuo e discreto oferecem caminhos alternativos para se avaliar um projeto. Os modelos em tempo discreto podem ser mais adequados para problemas práticos ou de avaliações mais complexas. Eles são mais fáceis de serem implementados. Mas os modelos em tempo contínuo também tem suas vantagens, pois, quando o problema é estruturado, se torna mais simples e intuitivo compreender os princípios básicos do investimento, identificar

quais são os geradores de valor e examinar os “*trade-offs*” do projeto. As abordagens em tempo discreto e contínuo não competem entre si, elas enxergam o mesmo problema sob perspectivas matemáticas diferentes.

Apesar de apresentar uma visão muito mais realística do que a metodologia tradicional, a análise pelas opções reais também possui suas limitações. Uma de suas premissas é o caráter exógeno da competição: a gerência possui um problema de otimização no qual precisa incorporar e se antecipar ao impacto erosivo da competição, porém pode ignorar quaisquer efeitos recíprocos dessa decisão nas ações dos competidores. A teoria das opções reais não consegue modelar problemas nos quais as decisões dos competidores dependem das ações dos outros.

2.2 Teoria dos Jogos

Teoria dos Jogos é utilizada para melhorar o entendimento e interpretação das formas de como os agentes que tomam decisões interagem entre si. Um jogo pode ser descrito como uma situação entre N pessoas ou grupos, chamados jogadores, que são conduzidos por um conjunto prévio de regras com pagamentos conhecidos. As regras definem atividades elementares ou lances do jogo.

Cada jogador possui um conjunto de ações que poderá selecionar. Estas ações são conhecidas como estratégias puras, cada jogador também possui informações sobre as estratégias dos outros, bem como o pagamento das combinações de tais estratégias.

Um jogo simétrico é aquele no qual os pagamentos para os jogadores em uma estratégia particular dependem somente da estratégia escolhida, e não de quem está jogando. Se as identidades dos jogadores puderem ser trocadas sem alterar os pagamentos obtidos pela aplicação das suas estratégias, então este é um jogo simétrico. Muitos dos jogos dois por dois comumente estudados são simétricos. As representações padrões do Jogo do medroso, do Dilema do Prisioneiro, e da Caça ao Veado são todos jogos simétricos.

Os jogos assimétricos mais comuns são jogos onde existem grupos de estratégias diferentes para cada jogador. Por exemplo, o Jogo do Ultimato e seu similar, o Jogo do Ditador tem estratégias diferentes para ambos os jogadores.

Jogos simultâneos são jogos onde ambos os jogadores movem-se simultaneamente, ou se eles não se movem simultaneamente, ao menos os jogadores desconhecem previamente as ações de seus adversários (tornando-os efetivamente simultâneos). Jogos sequenciais (ou dinâmicos) são jogos onde o próximo jogador tem conhecimento da jogada de seu antecessor. Isto não necessita ser conhecimento perfeito acerca de cada ação do jogador antecessor; ele necessita de muito pouca informação. Por exemplo, um jogador deve saber que o jogador anterior não pode realizar uma ação em particular, enquanto ele não sabe quais das outras ações disponíveis que o primeiro jogador irá realmente realizar. A diferença entre jogos simultâneos e sequenciais é capturada nas diferentes representações discutidas. Geralmente a forma normal é usada para representar jogos simultâneos, e a forma extensiva é usada para representar jogos sequenciais.

Num determinado cenário envolvendo conflito de interesses, cada pessoa ou jogador deve fazer suas escolhas dentre conjunto de opções disponíveis. Segundo a nomenclatura da Teoria dos Jogos, a escolha do jogador é a sua estratégia e o conjunto de opções disponíveis é o conjunto de estratégias. O resultado do jogo é determinado, então, em função das escolhas individuais dos jogadores. Cada jogador possui preferências relativas aos resultados do jogo. A Teoria dos Jogos clássica assume que os jogadores têm pleno conhecimento do jogo em questão e que adotarão comportamento inteligente e racional. Um jogador inteligente é aquele que conhece as regras do jogo e é capaz de inferir qualquer conclusão que um teórico de jogos seja capaz de obter. Um jogador racional é aquele que age para maximizar seus benefícios no longo prazo e possui uma relação de preferências consistente, ou seja, dados os possíveis resultados x , y e z , a relação entre eles deve satisfazer as seguintes propriedades:

- completude, i.e., $x \succeq y$ ou $y \succeq x$
- transitividade, $x \succeq y$ e $y \succeq z$ implica $x \succeq z$
- condição de maximização, o jogador prefere x a y se $x \succeq y$

Introduzindo as definições e ilustrando os conceitos mais importantes da Teoria dos Jogos por meio de um exemplo. Sejam A e B dois usuários compartilhando um mesmo endereço eletrônico numa rede de computadores. A e B desejam assistir a um vídeo, e precisam decidir a taxa de recebimento dos dados, em bits por segundo. Formalmente, se tem que:

Definição 1 - Um jogo estratégico envolvendo apenas estratégias puras consiste de

- um conjunto finito N de jogadores
- para cada jogador $i \in N$ um conjunto não vazio A_i (o conjunto de estratégias puras disponíveis para o jogador i)
- para cada jogador $i \in N$ uma função de utilidade $u_i : A = \times_{j \in N} A_j \rightarrow \mathfrak{R}$ (a função de utilidade do jogador i).

Um jogo estratégico pode ser então caracterizado por $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$. No exemplo, tem-se $N = \{A, B\}$. Assumindo que a taxa de requisição de dados possa ser discretizada em dois níveis, suave e agressiva (ou baixa e alta, respectivamente), cada jogador tem duas estratégias puras disponíveis, $A_A = A_B = \{\lambda_s, \lambda_a\}$, $\lambda_s < \lambda_a$. Além disto, cada jogador i tem infinitas estratégias mistas disponíveis. Uma estratégia mista é uma decisão tomada aleatoriamente com a combinação das estratégias puras. As estratégias mistas podem ser caracterizadas por $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2})$, onde $\sigma_{i1} + \sigma_{i2} = 1$ e $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \geq 0$. Formalmente, temos que:

Definição 2 - Um jogo estratégico com estratégias mistas $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i) \rangle$ é uma extensão do jogo $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ no qual $(\Delta(A_i))$ é o conjunto de distribuições de probabilidade sobre A_i e a função de utilidade U_i atribuí para cada resultado do jogo o valor esperado do mesmo.

Num jogo de duas pessoas, por exemplo, a utilidade de um jogador A que adota a estratégia mista $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, quando o adversário B adota a estratégia mista $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, é dada pelo valor esperado do resultado do jogo, definido como:

$$U_A(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_A(s_i, s_j) \sigma_i \tau_j \quad (2.1)$$

Resta descrever a função de utilidade dos jogadores dadas as estratégias adotadas. Isto pode ser feito por meio da Tabela 2.1.(a). A entrada (5, 15) da matriz, por exemplo, representa que A recebe uma qualidade de serviço de dados de 5 e B experimenta uma quantidade de dados de 15. Na matriz da Tabela 2.1 representa-se o cenário no qual quanto maior a taxa de requisição de dados de um jogador, maior a sua quantidade de dados. Segundo a Definição 2, se A e B adotarem, respectivamente, as estratégias mistas $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(1, 0)$, o valor esperado dos ganhos será de $\frac{35}{3}$ para A e 5 para B .

Tabela 2.1: Dois jogos estratégicos (Fonte: dissertação Menasché D. S.)

	\mathcal{B} joga λ_s	\mathcal{B} joga λ_a
\mathcal{A} joga λ_s	5,5	5,15
\mathcal{A} joga λ_a	15,5	15,15

(a)

	\mathcal{B} joga λ_s (C)	\mathcal{B} joga λ_a (NC)
\mathcal{A} joga λ_s (C)	5,5	1,15
\mathcal{A} joga λ_a (NC)	15,1	4,4

(b)

A qualidade do vídeo depende de uma série de fatores, como o retardo na rede, vazão, tamanho médio da rajada de perdas, entre outros. Todas estas influências são consideradas.

É fato de que, quando um usuário aumenta a sua taxa de requisição de dados, a rede fica mais congestionada. Neste caso, vamos assumir que se os dois usuários solicitarem dados a uma taxa alta ocorrerá o congestionamento, e a qualidade de serviço oferecida para ambos será menor do que aquela esperada quando ambos escolhem a taxa baixa. Em economia, o fenômeno de a estratégia de um jogador afetar o cenário do jogo como um todo é chamado de externalidade. Portanto, considerando as externalidades temos a matriz de utilidades para o jogo caracterizado pela Tabela 2.1(b). Neste jogo um jogador que coopera é aquele que adota a estratégia λ_s .

Observe que considerando agora o congestionamento na rede, o resultado (“payoff”) obtido neste último cenário é sempre menor ou igual ao daquele descrito pela Tabela 2.1(a). A matriz da Tabela 2.1(b) caracteriza um tipo de jogo conhecido como Dilema do Prisioneiro. Para exemplificar melhor o Dilema do Prisioneiro esta demonstrado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Matriz de resultados para o Dilema do Prisioneiro

		Estratégias do suspeito II	
		Confessar	Não confessar
Estratégias do suspeito I	Confessar	(8;8)	(0,25;10)
	Não confessar	(10;0,25)	(1;1)

Este é um exemplo clássico da Teoria dos Jogos e vem sendo usado desde o princípio dos estudos dessa teoria. Dois suspeitos são tomados em custódia e

separados. O promotor tem certeza que eles são culpados, mas não possui provas suficientes para levá-los a julgamento.

Ele diz para cada um dos prisioneiros que eles possuem duas alternativas: confessar o crime que a polícia tem certeza que eles cometeram, ou não confessar. Se ambos confessarem, ficarão um tempo estimado de 8 anos na cadeia. Se nenhum dos dois confessarem, eles terão uma pena leve, posse ilegal de armas, ficando presos durante 1 ano. Entretanto, se um confessar e o outro não, o que confessar receberá uma pena leve, de 3 meses, e o segundo receberá uma pena severa, ficando detido por 10 anos. Examinando o jogo do ponto de vista do Suspeito I, se o Suspeito II escolher confessar ou não confessar, o resultado da primeira estratégia, confessar, é melhor para ele. Os valores para não confessar (10; 1) são maiores que os de confessar (8;0,25). Logo, não confessar é estratégia dominada por confessar para o Suspeito I. O mesmo ocorre analogamente para o Suspeito II. Desejando maximizar o seu nível de segurança, os jogadores tomam as escolhas racionais de ambos confessarem e cumprem a pena de 8 anos cada, quando poderiam alcançar a pena de 1 ano apenas.

Não há solução para este problema. Se houver possibilidade de cooperação, os suspeitos podem escolher por não confessarem. O motivo de não ser esta a estratégia escolhida é que um deles pode vir a “trair” o outro e confessar para melhorar o seu resultado individual no jogo prejudicando o outro.

Em parte, a perda de eficiência prevista pela Teoria dos Jogos clássica no Dilema do Prisioneiro está relacionada com duas de suas premissas básicas. A primeira, que os jogadores são perfeitamente racionais e inteligentes, e nunca cometem erros. A segunda é a consideração de um jogo estático. Diante de um problema, os jogadores irão tomar decisões definitivas sem se comunicarem.

Para superar as limitações da Teoria dos Jogos clássica, John Maynard Smith (1984) deu uma nova interpretação à Teoria dos Jogos, enquadrando-a num contexto dinâmico-populacional. Em vez de os jogos serem avaliados estaticamente, assumindo que os jogadores se encontrarão uma única e exclusiva vez, estes passaram a ser analisados dinamicamente num cenário em que interagem repetidas vezes, podendo imitar uns aos outros, aprender ou experimentar usando tentativa e erro.

2.2.1 Equilíbrio de Nash

Criado por John Forbes Nash Jr. (1950), o conceito conhecido por equilíbrio de Nash acontece quando cada jogador está dando a melhor resposta (Fiani, 2006). Uma forma de se encontrar o equilíbrio de Nash (EN) consiste em determinar as melhores respostas de todos os jogadores para cada ação possível dos oponentes. As posições em que as melhores respostas coincidirem representarão EN.

O princípio do EN consiste em analisar as soluções de jogos. Esta noção tenta encontrar um estado estacionário para o jogo, onde cada jogador tem a expectativa correta sobre o comportamento dos outros jogadores e age de forma racional.

Logo, para que uma estratégia satisfaça o EN, não pode haver nenhum jogador que faça uma escolha diferente e obtenha um resultado melhor que o equilíbrio, considerando o que os demais jogadores escolheram. Ou seja, nenhum outro jogador pode obter um ganho maior que aquele no equilíbrio (Nash Jr, J. F., 1950).

O problema fundamental da Teoria dos Jogos é entender como os jogadores irão agir ao defrontarem-se com um determinado jogo. Em particular, procura-se prever as estratégias que estes irão adotar. Ao perfil das estratégias previsto para os jogadores dá-se o nome de solução do jogo. Entretanto, existem vários conceitos de solução do jogo definidos no âmbito da Teoria dos Jogos. Será adotado o mais comum, conhecido como EN. O EN é um conjunto de escolhas, uma para cada jogador, com a propriedade de que nenhum jogador pode aumentar seu “payoff” modificando, unilateralmente, suas estratégias. Formalmente, se tem:

Definição 3 O EN de um jogo estratégico $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ é uma lista $a^* \in A = \times_{j \in N} A_j$ de N ações, uma para cada jogador, com a propriedade de que para cada $i \in N$ se tem:

$$u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, b_i) \text{ para todo } b_i \in A_i$$

onde $a_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N) = (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$. Ou seja, o EN é um ponto tal que nenhum jogador recebe, unilateralmente, benefícios para mudar sua estratégia.

Da mesma forma que um jogo estratégico com estratégias mistas (Definição 2) é uma extensão do jogo estratégico com estratégias puras (Definição 1), um EN misto é uma extensão do EN (puro).

Se o jogo for arbitrado, é possível que sejam apresentadas sugestões estratégicas aos jogadores. Se dada sugestão não for um EN, algum jogador pode desejar escolher uma outra estratégia e obter um melhor pagamento, considerando que todos os demais acataram a sugestão. Neste contexto, o EN pode ser interpretado como um ponto de estabilidade em um ajuste dinâmico de comportamentos onde as saídas individuais são sempre ótimas, dada a aceitação da sugestão estratégica por todos os agentes participando do jogo. Portanto, nenhum jogador racional desejará alterar a sua estratégia se o jogo já estiver em estado de equilíbrio.

Ainda, em um jogo estático com informação completa, tem-se que cada jogador conhece os pagamentos dos demais, para cada perfil de estratégias possíveis. Deste ponto, é possível prever o comportamento dos jogadores, partindo-se da premissa de que, se um jogador escolher uma estratégia que não faça parte do equilíbrio, o mesmo estaria cometendo um erro, mesmo que tal jogador não conheça a priori as decisões tomadas pelos demais agentes do jogo. Este conhecimento reforça o sentido de racionalidade, uma vez que cada jogador sabe que os demais são racionais, e que estes adversários também sabem que esse jogador é racional.

2.2.2 Equilíbrio em estratégias Mistas

Um jogo na forma normal, se for permitido apenas estratégias puras, nem sempre tem um EN. No entanto, os jogadores podem, em vez disso, de forma aleatória, selecionar, entre estas estratégias puras, com certas probabilidades. Aleatorizando a própria escolha, desta forma se caracteriza uma estratégia mista. Neste caso, existirá um ou mais EN.

As estratégias mistas são distribuições de probabilidade sobre as estratégias puras, o valor de uma estratégia mista é o valor esperado dos “payoffs” das relevantes estratégias puras randomizadas. As probabilidades das estratégias mistas são resultados da análise de equilíbrio. Elas não são exógenas (estimativas de estados da natureza) e nem advindas de preferências dos jogadores. Elas foram calculadas maximizando “payoffs” simultaneamente. Essas probabilidades são tais que fazem o outro jogador ficar indiferente entre jogar as suas diferentes estratégias puras relevantes.

Nem sempre as probabilidades de estratégias mistas são intuitivas já que não refletem características individuais e sim estratégicas. O valor de uma estratégia mista é um valor esperado dos valores (“payoffs”) das estratégias puras ponderados pelas probabilidades relevantes. EN Misto é um conjunto de estratégias (agora probabilidades) de modo que cada estratégia é uma melhor resposta em relação à outra, se há múltiplos EN em estratégias puras há EN em estratégias mistas com a randomização dos EN em estratégias puras.

2.3 Equilíbrio Evolucionariamente Estável

Na teoria dos jogos, os refinamentos provaram ser muito úteis para facilitar a busca pelo resultado. Entretanto, esta teoria também tem suas desvantagens.

Não somente foram desenvolvidos muitos conceitos de refinamentos diferentes, mas a teoria também assume que os jogadores estão agindo de acordo com um alto nível de racionalidade. Os teóricos propuseram tantas definições diferentes para racionalidade, que o conjunto dos refinamentos de EN disponíveis, tornou-se embaraçosamente grande. Eventualmente, quase qualquer EN poderia ser justificado em termos de algum refinamento.

O livro “Evolution and the Theory of Games” de Maynard Smith direcionou a atenção dos teóricos para longe de suas progressivas elaborações das definições de racionalidade. Afinal de contas, como foi escrito por Ken Binmore no prefácio da monografia “Evolutionary Game Theory” de Jörgen W. Weibull, insetos não pensam em tudo, e assim a racionalidade não pode ser tão crucial se a teoria dos jogos consegue de alguma maneira prever seus comportamentos. A partir deste ponto percebe-se o afastamento das tentativas para modelar os agentes como jogadores hiper-rationais.

A principal virtude da Teoria dos Jogos evolucionários consiste no fato da mesma não pressupor agentes necessariamente racionais. O processo de ajuste de estratégias dos jogadores se dá, na maioria das vezes, de forma trivial. De fato, os jogadores podem ser bactérias, animais, plantas e até células. Em alguns destes casos, os agentes não estão racionalmente maximizando seus “payoffs”. Suas estratégias refletem simplesmente padrões operacionais codificados em seus genes, ou são frutos do hábito, instinto ou imitação.

O processo de adaptação dos jogadores é um dos componentes fundamentais da Teoria dos Jogos evolucionários. Além disto, ao invés de um jogador A jogar contra B, J. M. Smith introduziu um modelo onde uma população (ou várias populações) de jogadores interage. A abordagem de J. M. Smith sobre os jogos evolucionários apresenta, portanto, três grandes diferenças em relação à Teoria dos Jogos clássica:

- Estratégias: Segundo a Teoria dos Jogos clássica, os jogadores dispõem de conjuntos de estratégias. Já de acordo com a Teoria dos Jogos evolucionários, as espécies ou, num contexto sociológico, as sociedades, é que determinam as estratégias disponíveis, e os indivíduos herdaram ou selecionam uma das estratégias disponíveis.
- Equilíbrio: Ao invés do equilíbrio de Nash, Smith e Price (1954) usaram o conceito de estratégia evolucionariamente estável (ESS) para inferir o comportamento da população a longo prazo. Uma estratégia é ESS se uma grande população adotando a mesma não pode ser invadida por um pequeno grupo de mutantes. O enfoque passa a ser na modelagem da difusão de comportamentos (estratégias) pela sociedade, e não simplesmente nas ações de indivíduos isoladamente.
- Interação entre os jogadores: Ao invés de considerar um jogo estático, jogado uma única e exclusiva vez (one-shot), Smith introduziu a noção de pareamento (agrupamento) repetido e aleatório entre os jogadores, que eventualmente selecionam as estratégias de acordo com seus genomas e/ou baseados na história do jogo.

O critério da estabilidade evolutiva é uma generalização que translada a noção de sobrevivência de Darwin, da aptidão num ambiente externo para um ambiente estratégico onde a aptidão de um comportamento (estratégia) depende do comportamento (estratégias) dos outros. Porém, do mesmo modo como acontece com o

EN, a propriedade da estabilidade evolutiva não explica como a população chega a tal estratégia, em vez disso ela pergunta se tal estratégia é robusta a uma certa pressão evolutiva. Na verdade a estabilidade evolutiva é um teste de robustez contra uma única mutação de cada vez. Assim, as mutações devem ser raras, para que a população tenha tempo de se reajustar á situação original antes que a próxima mutação aconteça. Ao contrário de sua instância biológica, a estabilidade evolutiva também providencia um relevante critério de robustez numa gama de situações, incluindo a área econômica.

Temos então abaixo os componentes para definirmos formalmente o ESS:

Definição 4 Um mutante m invade uma população $\sigma \neq m$ se para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $U(m, \tau) \geq U(\sigma, \tau)$, ou seja, se o mutante se sai pelo menos tão bem quanto um membro da população original ao interagir com a nova população $\tau = (1 - \epsilon)\sigma + \epsilon m$.

Definição 5 (ESS) Uma população σ adota uma estratégia evolucionariamente estável (ou seja, é um ESS) se ela não pode ser invadida por nenhum tipo de mutante.

Uma população σ é ESS se e somente se, para todo mutante m , temos que

$$U(\sigma, \sigma) > U(m, \sigma)$$

ou, se $U(\sigma, \sigma) = U(m, \sigma)$, então

$$U(\sigma, m) > U(m, m)$$

Em resumo, a motivação para o estudo do ESS é descobrir que tipos de estratégias podem ser mantidas sustentavelmente por uma população em face de qualquer alternativa de invasão. De fato, se existir uma alternativa que seja melhor sucedida no ambiente em questão, ou seja, que gere um “payoff” médio maior que o status inicial, mais cedo ou mais tarde esta será descoberta, seja racionalmente, seja por meios de mutações, tentativa e erro ou sorte. Assim sendo, é de se esperar que as estratégias que não possam ser invadidas sejam as usadas por todos, em longo prazo.

Uma vez que o processo de ajuste de escolhas dos jogadores é uma componente chave da Teoria dos Jogos evolucionários, esta resolve alguns dos inconvenientes da Teoria dos Jogos clássica. Por exemplo, não é necessário assumir que os jogadores irão decidir, antes de começar o jogo, as escolhas que farão ao longo do tempo, em cada um dos turnos.

A ESS consiste em uma estagnação evolucionária com respeito aos comportamentos sendo considerados, onde não existe mudança na frequência relativa dos comportamentos com o tempo. Ela pode acontecer de duas maneiras: um comportamento é mais apto que todos os outros (ESS pura); ou existe uma combinação específica de comportamentos onde não há um comportamento que seja mais apto que qualquer um dos demais (ESS mista).

Em ambientes econômicos ou sociais uma ESS requer que qualquer grupo pequeno de indivíduos que tente uma estratégia alternativa, tenha um pior desempenho do que aqueles indivíduos que aderiram à estratégia original. A motivação que leva a se estudar a teoria dos jogos evolucionários é a modelagem do comportamento de indivíduos de gerações diferentes, observando como as características deles dependerão de suas iterações com suas próprias características.

2.4 Jogos de Opções

A análise por opções reais, apesar de superar muitas desvantagens do método de fluxo de caixa descontado, frequentemente usa uma premissa simplificada, na qual as interações estratégicas não afetam, materialmente, decisões de investimentos ou o valor de projetos. A melhor maneira de superar essas deficiências é através da utilização de uma metodologia integrativa, que combine as ferramentas e ideias desses dois modelos. Assim surgiu os jogos de opções, posicionado na intersecção entre a teoria de investimentos sobre incerteza e a teoria dos jogos sobre investimentos estratégicos. Os jogos de opções podem ajudar na compreensão de duas complexas decisões estratégicas: o momento ótimo de investimento e o trade-off entre flexibilidade e compromissos.

A teoria dos jogos é uma ferramenta bem estabelecida na área de organização industrial e para modelar competição imperfeita. Entretanto, a teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza. A teoria dos jogos e a teoria das opções são abordagens complementares, que juntas fornecem uma metodologia rigorosa com um rico potencial de aplicações.

O surgimento da literatura dos jogos de opções reais em tempo contínuo se deu com Smets(1993) e ele ocorreu devido à demanda de modelos de opções reais que considerasse também a interação estratégia racional entre jogadores (firmas), ou seja, naqueles em que o exercício da opção de um jogador altera os valores das opções reais de outros jogadores. Já a literatura dos jogos de OR em tempo discreto começou com Smit e Ankum (1993), com uma abordagem intuitiva para importantes modelos de jogos de opções; e com Smit e Trigeorgis, também em 1993, que analisaram outros aspectos. Huisman (2001) foi o primeiro livro texto dedicado só a jogos de opções reais, focou em importantes modelos teóricos de jogos de OR em tempo contínuo. Antes, Grenadier (2000a) editou uma série de artigos de jogos de opções. Outros livros dedicados a jogos de OR são: o livro texto de Smit e Trigeorgis (2004), que foca principalmente nos modelos em tempo discreto, com vários exemplos práticos, e o livro de Thijssen (2004), que estuda aplicações de adoção de tecnologia. Um livro mais recente completa a lista de livros dedicados somente aos jogos de opções, o livro de Chevalier-Roignant e

Trigeorgis (2011), que fez uma significativa cobertura assunto, completando a literatura.

Sobre a combinação entre a teoria das opções e a teoria dos jogos, Ziegler (1999, p.133) escreveu: “a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção . . . a abordagem de opções tem a vantagem que automaticamente leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco”. Ele também destaca a “ligação entre mercados e organizações” com a teoria das opções determinando o valor baseado em critérios de mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização. Os jogos de opções no tempo discreto são mais adequados para ajudar a explicar, intuitivamente, os conceitos básicos e a lógica por trás do momento e das interações de investimentos reais.

2.5 Momento Ótimo de Investimento

O momento ótimo de investimento está relacionado à escolha do momento ideal para se incorrer em um investimento. Como decidir entre investir agora, mais tarde ou abandonar o projeto? Se o mercado se desenvolver favoravelmente, o investimento terá sido a melhor opção, mas se o mercado se mover desfavoravelmente, o investimento prematuro terá sido um erro. Para se proteger da evolução do mercado, uma firma que possui flexibilidade de esperar irá exigir uma postergação do investimento até que o mercado esteja maduro o suficiente, de forma que o risco seja minimizado.

Uma empresa inserida em um ambiente competitivo pode ter uma política de investimento ótimo completamente diferente de uma firma monopolista. Como existe a possibilidade de os competidores se anteciparem ao rival, o incentivo de postergar investimentos é deteriorado. Há também casos em que a competição pode ser modelada como o jogo guerra de atrito, induzindo o rival a desistir mais cedo. Nessas situações, a indústria precisa encontrar um equilíbrio. Geralmente, a presença de competidores leva as firmas a investirem mais cedo do que o monopolista. Abaixo uma descrição comparativa entre os métodos de opções reais, teoria dos jogos e o valor presente líquido (VPL) tradicional, descrevendo as vantagens e desvantagem específica de cada um.

VPL tradicional

- Vantagens: Fácil de usar, lógica convincente, utilizado mundialmente, fácil de comunicar.
- Desvantagens: Assume comprometimento para um devido plano de ação, geralmente tratando investimento como uma decisão única no tempo (“agora ou nunca”), ignora flexibilidade para se adaptar a desenvolvimentos inesperados do mercado e de interações estratégicas.

Opções Reais

- Vantagens: Incorpora incerteza do mercado e flexibilidade gerencial, reconhece que decisões de investimento podem ser postergadas, feitas em estágios ou ajustadas.
- Desvantagens: Normalmente aplicada na avaliação de um monopolista ou opção proprietária, ignora interações competitivas (endógena).

Teoria dos Jogos

- Vantagens: Incorpora reações competitivas endogenamente, considera diferentes recebimentos dos jogadores.
- Desvantagens: Normalmente ignora as incertezas do mercado cujas modelações envolvem variáveis estocásticas.

3. Modelo

Considerando duas empresas sediadas no mesmo país de origem, que consideram a possibilidade de investir em um mercado estrangeiro. O parâmetro “ a ” que atua na equação da função de demanda inversa representa a escala de mercado e assumindo que o seu valor seja suficientemente elevado para que os preços sejam sempre positivos. As empresas enfrentam uma função de demanda inversa determinística que é:

$$p = a - bQ_T, \quad \text{com } a > 0, \quad b > 0, \quad a > bQ_T \quad (3.1)$$

Onde P é o preço unitário do bem homogêneo produzido por todas as empresas no mercado e Q_T é a produção total do setor. Como $\frac{\partial p}{\partial Q_T} < 0$, há uma vantagem de antecipação, para a empresa que entra no mercado primeiro. As empresas podem se comprometer com o mesmo custo de investimento afundado I para entrar no mercado e, em seguida, enfrentar uma taxa de câmbio estocástico X no lucro π auferido no exterior:

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \quad (3.2)$$

Sendo que μ é a percentagem instantânea esperada a mudar por unidade de tempo; σ representa o desvio padrão instantâneo por unidade de tempo; ambos multiplicados pelo fator X e dz é o incremento de um processo de Wiener padrão para a variável da mesma forma que é visto no trabalho de Azevedo e Paxson(2011).

Se tem assim os ingredientes para um jogo de opção real (ROG), onde cada empresa detém uma OR para adiar o investimento. Assumindo que a quantidade produzida é a variável de decisão das empresas, a fim de maximizar a sua função objetivo, mas diferentemente da literatura usual (Joaquin e Butler (2000), Grenadier (2000), Dixit e Pindyck (1994), Lambrecht e Perraudin (1994), Trigeorgis (1996)), os agentes têm racionalidade limitada e podem seguir estratégias diferentes, seja para maximizar o lucro (estratégia P) ou maximizar a participação de mercado (estratégia R), também é possível uma estratégia mista, em que se pode ter um EN em que as empresas usam as estratégias mistas. Estas estratégias são as mesmas que em Xiao e Yu (2006) jogo entre duas cadeias de

abastecimento, embora seja apresentado o jogo no contexto de uma ROG, acrescentando a incerteza sobre os lucros e a existência de uma opção real comum compartilhada por ambas as empresas que são potenciais entrantes. No momento que ambas as empresas estão ativas no mercado, temos um jogo de dois jogadores com duas estratégias estáticas e buscamos um equilíbrio com base no conceito de ESS como em Maynard-Smith e Price (1973).

Não há custo fixo e ambas as empresas têm custos marginais constantes c_i ; $i = \{A, B\}$. Sem perda de generalidade, se supõem que o último é menor para empresa B i.e., $c_A > c_B$, dando-lhe uma vantagem competitiva sobre a firma A . Na literatura de ROG essa vantagem faz a firma B ter uma probabilidade maior de entrar como líder no mercado. A empresa com maior custo marginal tende a se tornar o seguidor, mas o líder deve sempre levar em conta o risco de preempção. Para uma empresa i disposta a maximizar o lucro, tendo q_A como a quantidade produzida pela firma A e q_B a quantidade produzida pela firma B , o seu problema de otimização no mercado externo é $\max(q_i)$

$\pi_i(q_A, q_B) = (a - bq_A - bq_B - c_i)q_i$ Se em vez disso, ele maximiza a quota de mercado o problema é $\max(q_i) R_i(q_A, q_B) = (a - bq_A - bq_B)q_i$ da mesma forma que ocorre no paper de Xiao e Yu (2006).

No início do jogo cada empresa contempla duas opções, se ela deve ser a primeira a exercer a opção (tornando-se a líder) ou a segunda a exercer (se inserindo no mercado como a seguidora), tendo para cada uma destas estratégias momento ideal para agir. O equilíbrio conjunto de estratégias de exercício é derivado, deixando as empresas escolherem seus papéis, a determinação do valor de ambas as empresas começa com a função do valor do seguidor e, em seguida, trabalhando para trás em uma forma de programação dinâmica para determinar a função valor do líder.

No modelo, para o momento em que uma única empresa entra no mercado será considerado um estado de monopólio. Caso a empresa monopolista i escolha a quantidade que maximiza a sua função de lucro (estratégia P) ela terá um problema de maximização muito simples e a quantidade ideal para a empresa i no monopólio “ M ” é a mesma que se encontra no trabalho de Dias e Teixeira (2010) e Xiao e Yu (2006):

$$q_i^M = \frac{a - c_i}{2b};$$

O fluxo de lucro para a empresa monopolista i é:

$$\pi_i^M = \frac{(a - c_i)^2}{4b} \quad (3.3)$$

Se a empresa i escolher a quantidade que maximiza a sua quota de mercado (estratégia R), ela chega em uma maximização muito simples e a quantidade ideal para ela no monopólio “ M ” é a mesma encontrada no trabalho de Xiao e Yu (2006):

$$q_i^M = \frac{a}{2b};$$

O fluxo de lucro para a empresa monopolista i é:

$$\pi_i^M = \frac{a^2 - 2ac_i}{4b} \quad (3.4)$$

No segundo caso, se o valor resultante do lucro for negativo, a empresa não vai produzir e o fluxo de lucro será zero. Resolvendo o problema por *backward*, na última fase do jogo, quando as duas empresas entram no mercado, se tem quatro resultados de jogos possíveis. Se ambas as empresas adotam a estratégia P , o resultado do jogo é o perfil de estratégias ($P; P$) e as quantidades ideais produzidas são as mesmas encontradas no trabalho de Dias e Teixeira (2010) e Xiao e Yu (2006):

$$q_i^{PP} = \frac{1}{3b}(a + c_j - 2c_i); \quad i, j \in \{A, B\}; \quad i \neq j$$

Nessa situação os lucros correspondentes são dados por:

$$\pi_i^{PP}(q_i^{PP}; q_j^{PP}) = \frac{1}{9b}(a + c_j - 2c_i)^2; \quad i, j \in \{A, B\}; \quad i \neq j \quad (3.5)$$

Se ambas as empresas escolhem R , as quantidades individuais tidas como ideais são as mesmas encontradas no trabalho de Xiao e Yu (2006):

$$q_A^{RR} = q_B^{RR} = \frac{1}{3b}a$$

e os lucros correspondentes são:

$$\pi_i^{RR}(q_A^{RR}; q_B^{RR}) = \frac{1}{9b}a(a - 3c_i); \quad i = \{A, B\} \quad (3.6)$$

Se a empresa A escolhe estratégia P e a firma B escolhe estratégia R , as quantidades para as empresas A e B no equilíbrio são as mesmas encontradas no trabalho de Xiao e Yu (2006):

$$q_A^{PR} = \frac{1}{3b}(a - 2c_A)$$

$$q_B^{PR} = \frac{1}{3b}(a + c_A)$$

Neste caso, os lucros das empresas no mercado são:

$$\pi_A^{PR}(q_A^{PR}; q_B^{PR}) = \frac{1}{9b}(a - 2c_A)^2 \quad (3.7)$$

$$\pi_B^{PR}(q_A^{PR}; q_B^{PR}) = \frac{1}{9b}(a + c_A)(a + c_A - 3c_B) \quad (3.8)$$

Se a empresa A escolhe a estratégia R e a firma B escolhe estratégia P , as quantidades para as empresas A e B no equilíbrio são:

$$q_A^{RP} = \frac{1}{3b}(a + c_B)$$

$$q_B^{RP} = \frac{1}{3b}(a - 2c_B)$$

Neste caso, os lucros das empresas no mercado são:

$$\pi_A^{RP}(q_A^{RP}; q_B^{RP}) = \frac{1}{9b}(a + c_B)(a + c_B - 3c_A) \quad (3.9)$$

$$\pi_B^{RP}(q_A^{RP}; q_B^{RP}) = \frac{1}{9b}(a - 2c_B)^2 \quad (3.10)$$

Com isso, se tem a matriz com o valor de qi para cada caso:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} P \\ R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3b}(a - 2c_A + c_B); \frac{1}{3b}(a + c_A - 2c_B) & \frac{1}{3b}(a - 2c_A); \frac{1}{3b}(a + c_A) \\ \frac{1}{3b}(a + c_B); \frac{1}{3b}(a - 2c_B) & \frac{1}{3b}a; \frac{1}{3b}a \end{pmatrix} \end{array}$$

E se tem também a matriz com o valor de π para cada caso:

$$\begin{array}{c}
 P \qquad \qquad \qquad R \\
 P \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{9b}(a+c_B-2c_A)^2; \frac{1}{9b}(a+c_A-2c_B)^2 & \frac{1}{9b}(a-2c_A)^2; \frac{1}{9b}(a+c_A)(a+c_A-3c_B) \\ \frac{1}{9b}(a+c_B)(a+c_B-3c_A); \frac{1}{9b}(a-2c_B)^2 & \frac{1}{9b}a(a-3c_A); \frac{1}{9b}a(a-3c_B). \end{array} \right)
 \end{array}$$

Para simplificar os cálculos a matriz acima foi normalizada, primeiro multiplicou-se todos os termos por $9b$ depois foi feita as devidas subtrações nos pares a fim de zerar a contra diagonal, visto que essa normalização não afeta a estrutura da melhor resposta para o jogo, sendo obtida a seguinte matriz:

$$\begin{array}{c}
 P \qquad \qquad \qquad R \\
 P \left(\begin{array}{cc} \alpha_A - c_B ; \alpha_B - c_A & 0 ; 0 \\ 0 ; 0 & -\alpha_A ; -\alpha_B \end{array} \right)
 \end{array}$$

sendo:

$$\alpha_A = 4c_A - a$$

$$\alpha_B = 4c_B - a$$

Então, foram encontradas as estratégias evolucionariamente estáveis (ESS) para os nove casos seguintes, porém em todos os casos a premissa de a ser maior que o custo das firmas e de elas terem custo assimétrico, sendo a firma A a de alto custo ($a > c_A > c_B$) continua válida.

Tabela 3.1: Equilíbrio ESS para cada situação

-	condição 1	condição 2	o ESS é
1	$\alpha_A > c_B > 0$	$\alpha_B > c_A > 0$	(PP)
2	$\alpha_A > c_B > 0$	$c_A > \alpha_B > 0$	(PR)
3	$\alpha_A > c_B > 0$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(PR)
4	$c_B > \alpha_A > 0$	$\alpha_B > c_A > 0$	(RP)
5	$c_B > \alpha_A > 0$	$c_A > \alpha_B > 0$	$(PR \wedge RP)$
6	$c_B > \alpha_A > 0$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(PR)
7	$c_B > 0 > \alpha_A$	$\alpha_B > c_A > 0$	(RP)
8	$c_B > 0 > \alpha_A$	$c_A > \alpha_B > 0$	(RP)
9	$c_B > 0 > \alpha_A$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(RR)

Para se achar as ESS em cada caso, primeiro se encontrou o EN para cada situação e depois se testou em cada caso se esse EN era um ESS ou não, seguindo as definições 4 e 5 e verificando se seria possível que uma estratégia diferente (estratégia mutante) fosse aceita, verificando que não era possível a invasão de uma estratégia mutante, esses EN foram tidos como ESS.

Verificou-se que o caso RP não é viável seguindo as premissas adotadas, pois nos três casos RP quando foram analisadas as restrições, encontrou-se $c_B > c_A$, o que contradiz a premissa adotada de a empresa A ser a de alto custo, $c_A > c_B$, de modo que este caso foi julgado improcedente. Como $c_A > c_B$ então $\alpha_A > \alpha_B$ com essas duas equações pode-se perceber que os casos 4,7 e 8 são inconsistentes e serão retirados do estudo, ao analisar os resultados encontramos um caso misto, no entanto neste trabalho optou-se por analisar apenas os casos com equilíbrio em estratégias puras, retirando também o caso 5 e restando os casos válidos na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Equilíbrio ESS para cada situação válida

-	condição 1	condição 2	o ESS é
1	$\alpha_A > c_B > 0$	$\alpha_B > c_A > 0$	(PP)
2	$\alpha_A > c_B > 0$	$c_A > \alpha_B > 0$	(PR)
3	$\alpha_A > c_B > 0$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(PR)
6	$c_B > \alpha_A > 0$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(PR)
9	$c_B > 0 > \alpha_A$	$c_A > 0 > \alpha_B$	(RR)

Como padrão em jogos de tempo contínuo, a solução é executada para trás. Isto significa que primeiro tem que se estimar o valor do seguidor (dado que o líder entrou antes) e em seguida, o valor do líder dado que o líder sabe o momento ótimo para entrada do seguidor no futuro. Aqui considera-se que qualquer empresa pode se tornar o líder (as funções não são afetadas de forma externa), embora seja mais provável que a firma de baixo custo irá se tornar líder e a firma de alto custo se tornará a seguidora, no entanto, se encontrará que o oposto também pode ser EN e pode ser um ESS. Para os casos apresentados antes,

identificou-se o líder e o seguidor, comparando o valor do π na equação para cada caso de acordo com as premissas e quem teve o maior π foi escolhido como o líder para cada caso, como se segue na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Líder e seguidor para cada caso

caso	ESS	Líder	Seguidor
1	(PP)	B	A
2,3,6	(PR)	A	B
9	(RR)	B	A

Como mostrado, se possui três tipos de equilíbrio diferentes para serem analisados (*PP*), (*PR*), (*RR*).

O valor do seguidor maximizando o lucro pode ser encontrado a partir da abordagem tradicional de opções reais. É uma opção americana perpétua para investir como seguidor, a obtenção do fluxo de caixa do seguidor em perpetuidade. Existe, pelo menos, outra forma de encontrar o valor do seguidor, utilizando o desconto esperado na primeira vez que o processo estocástico atinge o gatilho do seguidor. Foi usada a abordagem diferencial tradicional, mas o formato da equação do seguidor é facilmente identificado pelos adeptos da outra abordagem.

Será apresentado diretamente os resultados para o caso base com o valor do lucro (π) que será diferente para cada caso, que pode ser obtido com qualquer um dos dois métodos, o diferencial e o método integral. O valor do seguidor para cada caso também estará em função do lucro (π). Na literatura de costume o seguidor será a firma de alto custo como em Joaquin e Butler (2000), Dias e Teixeira (2010), Pawlina e Kort (2006), mas neste trabalho, haverá casos que o seguidor será a outra empresa.

Generalizando por analogia o caso (*PP*) comumente explorado na literatura como em Dixit e Pindyck (1994); Dias e Teixeira(2010); livro do Huisman (2001); Joaquin e Butler (2000) entre outros, trocou-se a nomenclatura utilizada colocando as equações em função da firma líder e da firma seguidora ao invés de deixar em função da firma de alto e de baixo custo, pois dessa forma encontra-se as equações gerais para todos os casos independentemente de qual firma será líder.

Abaixo estão os significados das variáveis que irão aparecer nas próximas equações:

$F(X)$ = Valor do seguidor

L = Valor de se tornar Líder

I = Investimento

δ = Taxa de juros na moeda estrangeira

β = raiz positiva (> 1) da equação quadrática: $0.5\sigma^2\beta^2 + (r - \delta - 0.5\sigma^2)\beta - r = 0$.

$\pi_M L$ = Lucro do líder na fase monopolista

π_F = Lucro do seguidor

π_L = Lucro do líder na fase de duopólio

X_F^* = Gatilho do Seguidor

Abaixo estão os resultados, os quais podem ser obtidos com qualquer um dos dois métodos conhecidos (método integral e método diferencial) O valor de seguidor para a firma é $F(X)$, que exerce sua opção como seguidora em X_F^* , é dado pela equação abaixo, é a mesma que aparece no trabalho de Dias e Teixeira (2010).

$$F(X) = \begin{cases} [\pi_F \frac{X_F^*}{\delta} - I] (\frac{X}{X_F^*})^\beta & \text{se } X < X_F^* ; \\ \pi_F \frac{X}{\delta} - I & \text{se } X \geq X_F^* \end{cases}$$

O formato da equação do valor do seguidor quando a taxa de câmbio é inferior ao gatilho de entrada do seguidor tem interpretação natural. O primeiro termo, entre parênteses, é o VPL do exercício da opção de X_F^* . O segundo termo multiplicativo é o valor esperado do fator de desconto $F(X)$ estocástico, a partir de

um tempo aleatório do exercício do seguidor X_F^* . O gatilho para a empresa de seguidora é:

$$X_F^* = \frac{I\delta}{\pi_F} \frac{\beta}{\beta - 1} \quad (3.11)$$

O valor do líder é dado pela equação abaixo.

$$L = \pi_M L \frac{X}{\delta} + (\pi_L - \pi_M L) \frac{X_F^*}{\delta} \frac{X}{X_F^*}^\beta - I \quad (3.12)$$

O formato desta equação também permite uma explicação intuitiva. O primeiro termo do lado direito é o lucro de monopólio em perpetuidade da empresa líder. O termo do meio é o valor presente esperado das perdas competitivas (o valor entre parênteses é negativo), que irá ocorrer na entrada do seguidor (diminuindo o lucro de monopólio em perpetuidade). O último termo é o investimento necessário para se tornar líder. Se $X \geq X_F^*$, o valor do líder é igual ao valor do investimento simultâneo. A fim de obter o valor do líder, encontra-se a mesma constante usada em Joaquin e Butler (2000), mas em um formato mais heurístico que permite uma extensão rápida a outras curvas de demanda, como foi feito no trabalho de Marco Dias e José Teixeira (2010), esta constante provém da resolução da equação diferencial ordinária visto que sua solução geral é do tipo $A_1 x^{\beta_1} + A_2 x^{\beta_2}$ como pela condição trivial $A_2 = 0$ simplifica-se a equação chamando A_1 de apenas A e β_1 de β e essa constante será utilizada aqui por simplificar os cálculos:

$$A_L = \frac{(X_L)^{1-\beta}}{\delta} (\pi_L - \pi_M L) \quad (3.13)$$

4. Dados e Resultados

Uma vez que se tem posse de três tipos de equilíbrio diferentes, que serão analisados (*PP*), (*PR*), (*RR*), visto que o equilíbrio *RP* foi julgado improcedente para esse trabalho, pois nos três casos *RP* encontrados quando se soma as restrições, encontra-se $cB > cA$, o que contradiz a premissa adotada, $cA > cB$ e adota-se a premissa de analisar apenas os casos com em estratégias puras, retirando também o caso equilíbrio misto do trabalho.

Com as equações definidas, foram estabelecidas as seguintes premissas $IA = IB = 800$ milhões, volatilidade da taxa de cambio (σ) = 20% a.a., taxa doméstica livre de risco $r = 4\%$ a.a. e taxa livre de risco de moeda estrangeira (δ) = 4% a.a., para cada caso foi escolhido um valor de cA ; cB ; a e b de modo a respeitar as relações preestabelecidas na tabela 3.2 deste trabalho. Com posse desses dados e das equações de lucro e quantidade, para o líder e para o seguidor e utilizando da variável auxiliar $A_i (A_A \text{ e } A_B)$ para facilitar os cálculos (essa é a mesma constante A_i usada em Joaquin & Butler (2000) e no trabalho de Marco Dias e José Teixeira, (2010)), foram encontradas as equações a seguir em cada caso (substituindo as equações de cada caso nas equações encontradas no modelo) seguidas dos respectivos gráficos.

O valor do gatilho de entrada do seguidor é como em OR clássica (direitos exclusivos), pois o líder já entrou e a outra firma tem uma opção perpétua de entrar sem nova competição pela frente. A equação do seguidor pode ser tida como um valor presente esperado do possível futuro exercício da opção de entrar no mercado, quando ela vai produzir em perpetuidade.

4.1 Caso PP

A - Seguidor e B - Líder

$$F(X) = \left[\frac{(a - 2c_A + c_B)^2}{9b} \frac{X_{FA}^*}{\delta} - I \right] \left(\frac{X}{X_{FA}^*} \right)^\beta \quad \text{para } X < X_{FA}^*$$

$$F(X) = \frac{(a - 2c_A + c_B)^2}{9b} \frac{X}{\delta} - I \quad \text{para } X \geq X_{FA}^*$$

O gatilho para a empresa seguidora é:

$$X_{FA}^* = \frac{9bI\delta}{(a - 2c_A + c_B)^2} \frac{\beta}{\beta - 1}$$

O valor do líder é dado pela equação abaixo.

$$L = \frac{(a - 2c_B)^2}{4b} \frac{X}{\delta} + \left(\frac{(a - 2c_B + c_A)^2}{9b} - \frac{(a - 2c_B)^2}{4b} \right) \frac{X_{FA}^*}{\delta} \left(\frac{X}{X_{FA}^*} \right)^\beta - I$$

O valor do Fator A utilizado para facilitar os cálculos é :

$$A_A = \left[\frac{(a - 2c_A + c_B)^2}{9b} - \frac{(a - c_A)^2}{4b} \right] \frac{X_{FB}^*}{\delta X_{FB}^{*\beta}}$$

considerando a empresa A como líder e

$$A_B = \left[\frac{(a - 2c_B + c_A)^2}{9b} - \frac{(a - c_B)^2}{4b} \right] \frac{X_{FA}^*}{\delta X_{FA}^{*\beta}}$$

considerando a empresa B como líder

A partir da equação do líder, observa-se ver que o fluxo de lucro do duopólio, entre parêntese, é encontrado pela diminuição do valor de π na fase de duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio. Deste modo, é fácil de ver que esta constante é negativa; O fluxo de lucro da fase de duopólio é mais baixo do que o fluxo de lucro da fase monopolista. O valor negativo da constante significa

que a função do valor do líder é côncava, o que significa que o efeito da entrada do seguidor é o de diminuir o valor do líder, como esperado pela intuição.

Para estimar o gatilho de entrada do líder, são necessárias algumas considerações adicionais quando comparado com o caso simétrico. Sem a ameaça de preempção, a firma de baixo custo vai investir de forma ideal no gatilho de entrada do monopólio. No entanto, devido á ameaça de preempção, as empresas não podem esperar até essa hora para investir. Se alguém espera até esse momento, em alguns casos, a outra empresa pode investir no momento anterior, mas o outra pode se antecipar a rival, investindo antes daquele momento etc. Este processo para quando uma empresa não tem mais incentivo para se antecipar a rival ou seja quando não existe mais risco de preempção, pois não é benéfico a uma das empresas entrar naquele momento, sendo vantajoso apenas para a outra.

Os valores utilizados para as variáveis cA e cB e para as variáveis a e b foram : $cA = 21$, $cB = 20$, $a = 50$ e $b = 5$; Com o auxílio computacional e as premissas e equações encontradas encontramos o gráfico 1.

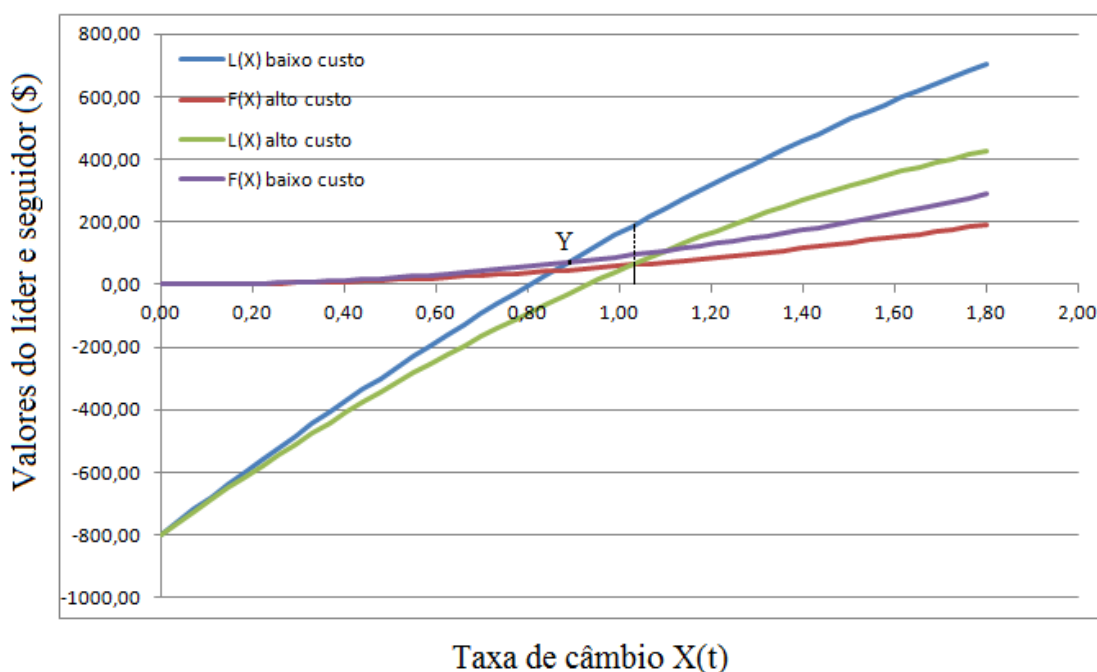


Gráfico 1 - Curvas de líder e seguidor , alternando entre empresa A e B.

O Gráfico 1 mostra as curvas de líder e seguidor , considerando os dois casos, quando a empresa de alto custo entra como líder e a de baixo custo como

seguidora e o caso inverso, sendo assim podemos observar que a Empresa B tem incentivo para se tornar líder se $LB > FB$ (ponto Y no Gráfico 1), mas não é necessário investir neste momento porque a empresa de baixo custo sabe que o alto custo da outra empresa é um incentivo para ela se tornar líder apenas se $LA > FA$. Assim, a estratégia da empresa de baixo custo para se tornar líder é investir quando $LA = FA$ e $XB < XA$ ou, mais precisamente, a um valor infinitesimalmente menor antes, em $XB = XA - E$, onde $E > 0$ é um valor infinitesimal. O valor do líder é uma função côncava (efeito das perdas competitivas) e o valor do seguidor é função convexa (efeito de maximização de valor para investir, como na OR tradicional). Este caso assume que XA existe e XB é determinada pelo custo elevado da ameaça de preempção. Em outros casos, dependendo principalmente da diferença entre os custos operacionais cB e cA , a vantagem competitiva pode ser superior e desaparecer a ameaça de preempção antes do exercício monopolista ideal. Neste caso, a vantagem competitiva é tão alta que a firma de baixo custo ignora a concorrência, investindo no gatilho monopolista. Como exemplo visto em Dias & Teixeira (2010) os valores de líder e seguidor para firma de alto custo mostram que esta empresa nunca vai querer ser o líder. Veja o Gráfico 2.

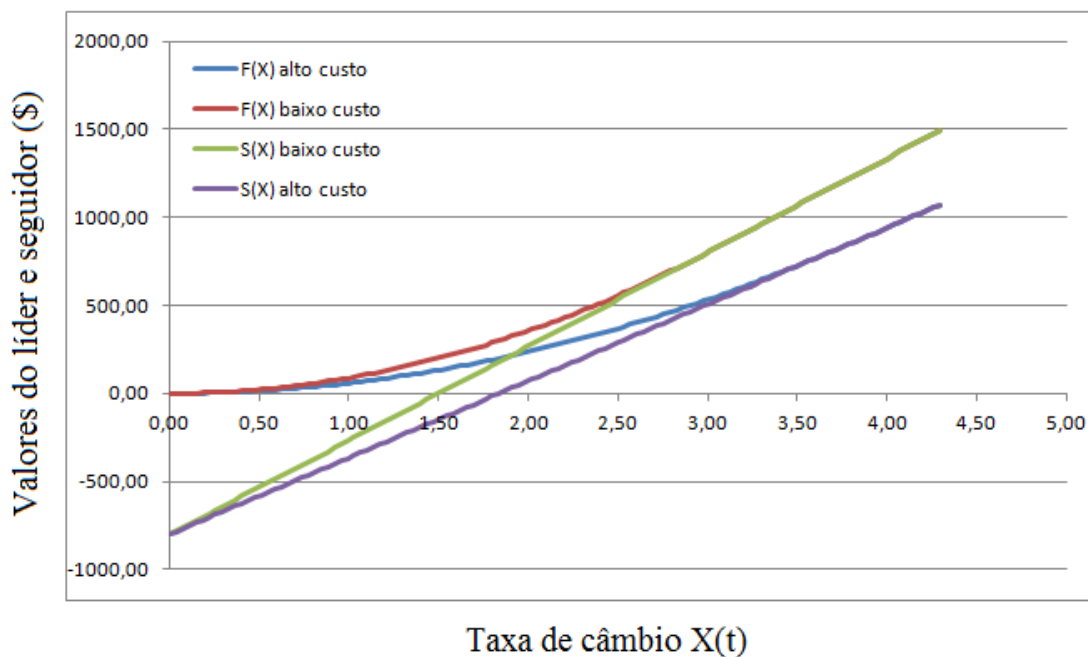


Gráfico 2 - Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresa A e B.

No Gráfico 2 como o jogo é resolvido “backward induction”, assume-se que o líder já entrou no mercado e o gráfico mostra os dois casos possíveis, firma de alto custo como seguidora e de baixo custo como seguidora e o valor para as firmas simultâneas (S) no mercado. O seguidor tem a opção real perpétua tradicional para investir como seguidor, visto que o líder já entrou e por tanto não há mais competição. Neste caso, é sempre melhor para a firma de alto custo ser o seguidor, esperando até que a taxa de câmbio atinja o nível XA em que as duas curvas se tornam coincidentes. Para a empresa de baixo custo, isso significa que não há nenhuma ameaça de preempção e que a empresa de baixo custo pode ignorar a concorrência, investindo no gatilho de entrada do monopolista. Com isso o gatilho do líder é o mínimo entre o seu gatilho de monopólio e o outro nível mínimo com incentivo para se tornar um líder. Este é o "resultado 3" de Joaquin e Butler (2000) em seu paper, que também foi encontrado por Dias & Teixeira(2010).

4.2 Caso RR

A - Seguidor and B - Líder

$$F(X) = \left[\frac{a(a - 3c_A)}{9b} \frac{X_{FA}^*}{\delta} - I \right] \left(\frac{X}{X_{FA}^*} \right)^\beta \quad \text{para } X < X_{FA}^*$$

$$F(X) = \frac{a(a - 3c_A)}{9b} \frac{X}{\delta} - I \quad \text{para } X \geq X_{FA}^*$$

O gatilho para a entrada do seguidor é:

$$X_{FA}^* = \frac{9bI\delta}{a(a - 3c_A)} \frac{\beta}{\beta - 1}$$

O valor do líder é dado pela equação abaixo.

$$L = \frac{(a^2 - 2ac_B)}{4b} \frac{X}{\delta} + \left(\frac{a(a - 3c_B)}{9b} - \frac{(a^2 - 2ac_B)}{4b} \right) \frac{X_{FA}^*}{\delta} \left(\frac{X}{X_{FA}^*} \right)^\beta - I$$

O valor do Fator A utilizado para facilitar os cálculos é :

$$A_A = \left[\frac{a(a - 3c_A)}{9b} - \frac{(a^2 - 2ac_A)}{4b} \right] \frac{X_{FB}^*}{\delta X_{FB}^{*\beta}}$$

considerando a empresa A como líder e

$$A_B = \left[\frac{a(a - 3c_B)}{9b} - \frac{(a^2 - 2ac_B)}{4b} \right] \frac{X_{FA}^*}{\delta X_{FA}^{*\beta}}$$

considerando a empresa B como líder.

Analogamente ao caso anterior percebe-se na equação do líder, que o fluxo de lucro do duopólio, entre parêntese, é encontrado pela diminuição do valor de π na fase de duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio, resultando novamente em um

valor negativo o que significa que a função do valor do líder é côncava e que o efeito da entrada do seguidor é o de diminuir o valor do líder, como visto anteriormente.

Os valores utilizados para as variáveis cA e cB e para as variáveis a e b foram :

$cA = 21$, $cB = 20$, $a = 90$ e $b = 5$; Com o auxílio computacional e as premissas e equações encontradas encontramos o gráfico 3.

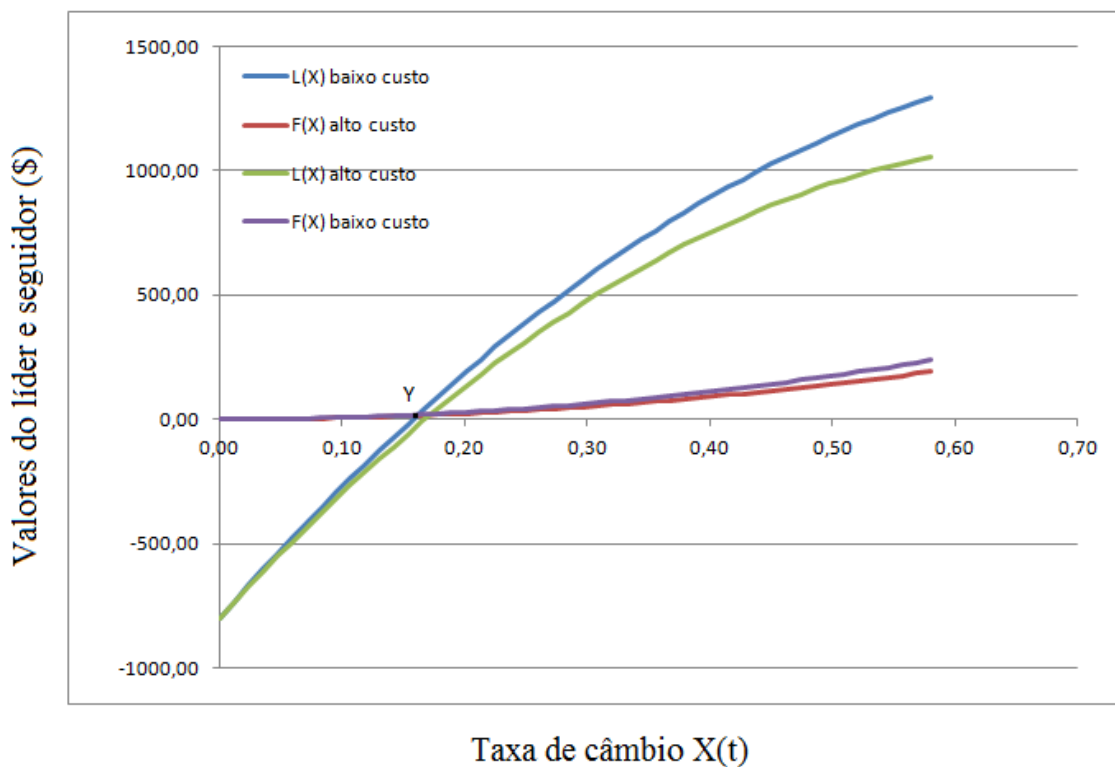


Gráfico 3 - Curvas de líder e seguidor , alternando entre empresa A e B.

No gráfico 3 observa-se que, novamente, a empresa B tem incentivo para se tornar líder se $LB > FB$ (ponto Y do gráfico 3), mas não é necessário investir neste momento porque a empresa de baixo custo sabe que o alto custo da outra empresa é um incentivo para ela se tornar líder apenas se $LA > FA$. Assim, a estratégia da empresa de baixo custo para se tornar líder é investir em XB , quando $LA = FA$ e $XB < XA$ ou, mais precisamente, a um valor infinitesimal antes, em $XB = XA - E$, onde $E > 0$ é um valor infinitesimal. Este caso assume que XA existe e XB é determinada pelo custo elevado da ameaça de preempção, diferente

do caso anterior a janela entre o gatilho de entrada para a empresa de baixo custo e o ponto em que a de alto custo passa a ter incentivo para ser líder é menor, mostrando que aqui o risco de preempção é maior do que no caso anterior.

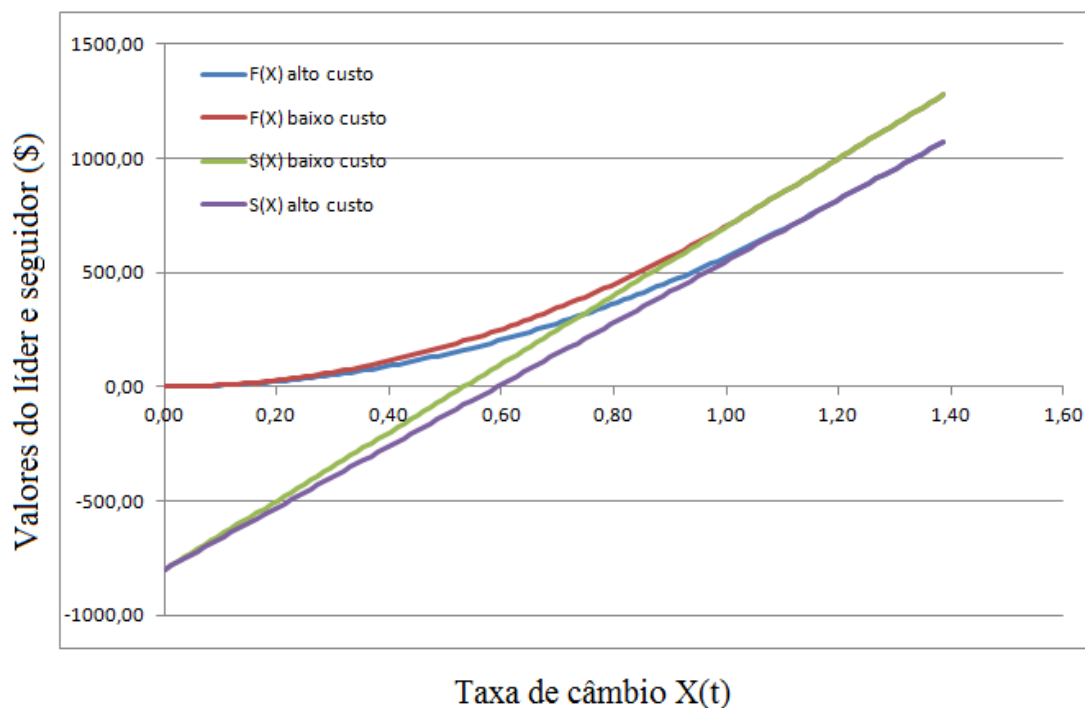


Gráfico 4 - Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresa A e B.

No gráfico 4 no caso *RR*, da mesma forma que no caso anterior, assume-se que o líder já entrou no mercado e o gráfico mostra os dois casos possíveis, firma de alto custo como seguidora e de baixo custo como seguidora e o valor para as firmas simultâneas (S) no mercado. O seguidor tem a opção real perpétua para investir como seguidor, visto que o líder já entrou e por tanto não há mais competição. O gráfico 4 é similar ao 2, alterando um pouco o dimensionamento e a inclinação das curvas.

Novamente para a empresa de baixo custo, significa que não há nenhuma ameaça de preempção antes desse momento e que ela pode ignorar a concorrência e investir no gatilho de entrada do monopolista.

4.3 Caso PR

A - Líder e B - seguidor

$$F(X) = \left[\frac{(a + c_A)(a + c_A - 3c_B)}{9b} \frac{X_{FB}^*}{\delta} - I \right] \left(\frac{X}{X_{FB}^*} \right)^\beta \quad \text{para } X < X_{FB}^*$$

$$F(X) = \frac{(a + c_A)(a + c_A - 3c_B)}{9b} \frac{X}{\delta} - I \quad \text{para } X \geq X_{FB}^*$$

O gatilho de entrada para o seguidor é:

$$X_{FB}^* = \frac{9bI\delta}{(a + c_A)(a + c_A - 3c_B)} \frac{\beta}{\beta - 1}$$

O valor do líder é dado pela equação abaixo.

$$L = \frac{(a + 2c_A)^2}{4b} \frac{X}{\delta} + \left(\frac{(a - 2c_A)^2}{9b} - \frac{(a - c_A)^2}{4b} \right) \frac{X_{FB}^*}{\delta} \left(\frac{X}{X_{FB}^*} \right)^\beta - I$$

O valor do Fator A utilizado para facilitar os cálculos é :

$$A_A = \left[\frac{(a - 2c_A)^2}{9b} - \frac{(a - c_A)^2}{4b} \right] \frac{X_{FB}^*}{\delta X_{FB}^{*\beta}}$$

considerando a empresa A como líder e

$$A_B = \left[\frac{(a + c_A)(a + c_A - 3c_B)}{9b} - \frac{(a^2 - 2ac_B)}{4b} \right] \frac{X_{FA}^*}{\delta X_{FA}^{*\beta}}$$

considerando a empresa B como líder.

Os valores utilizados para as variáveis c_A e c_B e para as variáveis a e b foram :

$c_A = 70$, $c_B = 55$, $a = 230$ e $b = 5$; Com o auxílio computacional e as premissas e equações encontradas são observadas no gráfico 5.

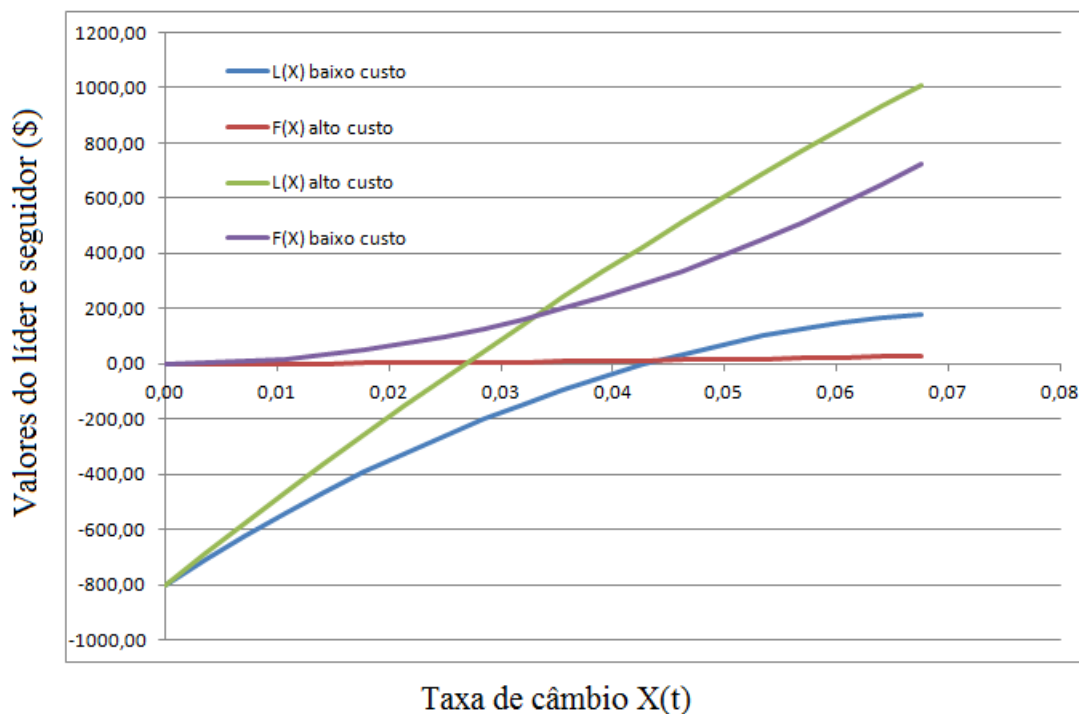


Gráfico 5 - Curvas de líder e seguidor , alternando entre empresa A e B.

Diferente dos casos anteriores dessa vez quem é a líder é a empresa de alto custo, mas sua equação tem o mesmo formato que foi visto antes, percebe-se na equação do líder, que o fluxo de lucro do duopólio, entre parêntese, é encontrado pela diminuição do valor de π na fase de duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio, resultando novamente em um valor negativo o que significa que a função do valor do líder é côncava e que o efeito da entrada do seguidor é o de diminuir o valor do líder, como visto anteriormente só que agora incidindo sobre a firma de alto custo.

No gráfico 5 observa-se que diferente dos casos anteriores, dessa vez a empresa B tem incentivo para se tornar seguidora já que $FB > FA$ e que a empresa de alto custo tem incentivo para se tornar líder visto que $LA > LB$ sendo assim a firma de alto custo pode aguardar até o momento de ter incentivo para ser líder sem que haja risco de preempção pela firma de baixo custo que não investirá, pois ela irá esperar que sua rival se torne líder para se tornar seguidora. Essa análise se torna mais clara quando se tem acesso ao segundo gráfico em que se considera que o líder já entrou no mercado.

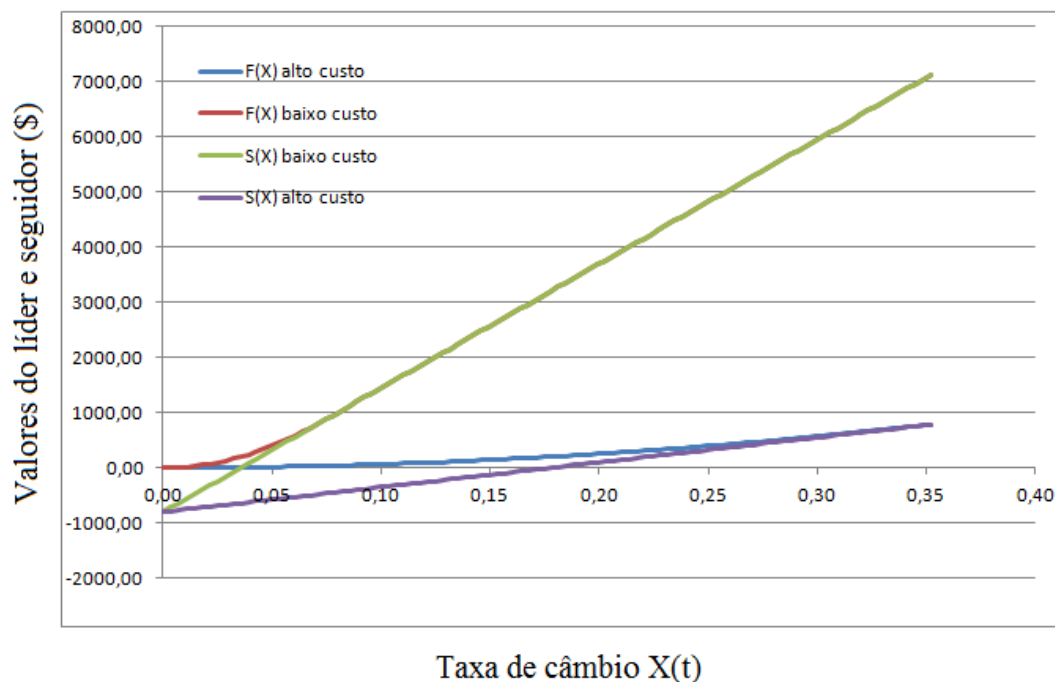


Gráfico 6 - Curvas do seguidor e de um mercado simultâneo, alternando entre empresa A e B.

No gráfico 6, da mesma forma que nos casos anteriores, assume-se que o líder já entrou no mercado e o gráfico mostra os dois casos possíveis, firma de alto custo como seguidora e de baixo custo como seguidora e o valor para as firmas simultâneas (S) no mercado. O seguidor tem a opção real perpétua para investir como seguidor, visto que o líder já entrou e por tanto não há mais competição. Nesse caso, percebe-se uma diferenciação quanto aos outros gráficos, percebendo que a curva do seguidor, sendo a firma de baixo custo e as duas firmas simultâneas no mercado, está bem acima da curva do seguidor sendo a firma de alto custo e a curva das duas firmas simultâneas no mercado demonstrando que nessas condições diferentes dos casos anteriores o líder é a firma de alto custo não sendo economicamente viável o caso contrário.

5. Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um desenvolvimento bibliográfico curto de jogos de opção e os conceitos relacionados básicos. A dissertação discute um modelo de externalidade negativa de duopólio assimétrico sob incerteza, sendo o primeiro de grande relevância conceitual e a segunda de grande apelo prático. Conceitos como preempção e estratégia evolucionariamente estável são apresentados.

As estratégias de uma empresa afetam em grande parte o seu sucesso ou sobrevivência. Uma boa estratégia é benéfica para o seu desenvolvimento. O que é uma boa estratégia? A resposta depende do ambiente de mercado. A boa estratégia em um mercado pode ser inaceitável em outro. Mesmo a resposta pode ser diferente para o mesmo mercado em momentos diferentes. Por exemplo, as quedas de demanda muitas vezes afetam a estratégia da varejista. As rupturas de abastecimento de matérias-primas também afetam a estratégia da varejista. A abordagem evolutiva não nega a tomada de decisão racional. Este trabalho utiliza os pressupostos da teoria dos jogos para endogeneizar estratégias preferenciais (maximização de receitas e de maximização de lucros), e por não considerar que os participantes possuem racionalidade nessa escolha, analisa o equilíbrio através do ESS. No modelo desenvolvido, os varejistas podem maximizar suas utilidades, receita ou lucro da empresa, com base em suas preferências.

Em uma situação de duopólio, a definição das quantidade com produtos homogêneos, o ESS das populações depende dos tamanhos relativos dos custos de escala de mercado e de unidade. Acredita-se que podem haver duas estratégias evolutivamente estáveis sob algumas condições. Estratégia de maximização de receitas pode coexistir com a estratégia de maximização do lucro. Estratégia de maximização de receitas podem prevalecer na situação em que a demanda é grande o suficiente.

Uma dissertação que gostaria de citar é a de Felipe Philadelpho Azevedo, Jogos de Opções em Oligopólios Assimétricos sob Ameaça de Preempção: Uma Aplicação no Setor de Latas de Alumínio, em que ele analisa um oligopólio de latas de alumínio sob a ótica das opções reais e os jogos de opções, similar ao modelo apresentado, porem aqui conceito de equilíbrio evolucionariamente estáv

el é adicionado e a racionalidade é retirada em um momento inicial permitindo estratégias não triviais como a maximização da receita, diferente da teoria trivial de maximizar o lucro, uma extensão interessante seria analisar um mercado similar ao presente no trabalho dele sobre essa nova ótica para verificar os impactos e alterações nos resultados.

Como foi visto ao longo do trabalho, os resultados do modelo mostram que, dependendo do tipo de estratégia assumida pela empresa é possível que a empresa de baixo custo se torne líder como na literatura usual e em alguns casos encontra-se casos diferentes em que, é possível que a empresa de alto custo venha a se tornar líder e demonstra que a premissa de racionalidade não é necessária para a escolha inicial da empresa utilizando o conceito de ESS para definir o equilíbrio assim como foi feito no paper do Xiao e Yu (2006).

Há várias recomendações de extensão desse trabalho. Primeiro, uma extensão importante do trabalho será o caso com vários fabricantes (oligopólio), empregando um jogo evolucionário com população finita. Em segundo lugar, também se pode considerar um modelo com uma função de demanda não linear. Em terceiro poderia se adicionar em ambos os casos citados a extensão do modelo para a análise do comportamento do equilíbrio em estratégias mistas. Em quarto podemos considerar agregar mais conceitos de teoria dos jogos como replicador dinâmico para um estudo mais apurado e uma análise evolucionaria do mercado.

Referências bibliográficas

AMRAM, M.; KULATIKA N. (2000), Strategy and Shareholder Value Creation: The Real Options Frontier. *Journal of Applied Corporate Finance*; Vol. 13.2

AXELROD, ROBERT (1984), *The Evolution of Cooperation* (NY: Basic Books).

AXELROD, ROBERT (1997a), *The Complexity of Cooperation: Agent-Based Models of Competition and Collaboration* (Princeton, NJ: Princeton University Press).

AXELROD, ROBERT (1997b), "Advancing the Art of Simulation in the Social Sciences," in Rosario Conte, Rainer Hegselmann and Pietro Terna (eds.), *Simulating Social Phenomena* (Berlin: Springer), 21-41.

AZEVEDO, A., and PAXSON, D. (2011). "Developing Real Option Game Models", Presented at the European Financial Management Association Conference 2011, University of Minho, Braga

AZEVEDO FP (2013). *Jogos de Opções em Oligopólios Assimétricos sob Ameaça de Preempção: Uma Aplicação no Setor de Latas de Alumínio*. PUC-Rio.

BOYER, M., LASSERRE, P., MARIOTTI, T., MOREAUX, M. (2001): Real options, preemption, and the dynamics of industry investments. In: working paper, Université du Québec a Montreal, Montreal, Canada.

BRANDAO. L, J. DYER, W. HAHN. (2005). Using Binomial Trees to Solve Real-Option Valuation Problems. *Decision Analysis*. 2(2) 69-88.

BRANDAO. L, J. DYER, W. HAHN.(2005). Alternative Approaches for Solving Real-Options Problems (Comment on Brandao et al.)– Response to Comments on Brandao et al. (2005). *Decision Analysis*. 2(2) 103-109.

BREALEY, RICHARD A. MYERS, STEWART C. (2003). Principals of Corporate Finance. USA, 3a ed. McGraw-Hill.

BRENNAN, M.J., and SCHWARTZ, E.S. (1985). Evaluating natural resource investment. *Journal of Business*, 58(2): 135-157.

CHEVALIER-ROIGNANT B. & TRIGEORGIS L. (2011). *Competitive strategy: Options and games* Cambridge, MA: MIT Press

COPELAND, TOM; ANTIKAROV, VLADIMIR.(2003). *Real Options: A Practioner's Guide*. USA: Texere.

COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M., (1979). Option Pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, p. 229-264, oct.

DECAMPS, J.-P. and T. MARIOTTI. (2000). "Irreversible Investment and Learning Externalities," mimeo, GREMAQ, Universite de Toulouse I.

DIAS, M. A. G. ; TEIXEIRA, J. P. (2010). Continuous-time option games: review of models and extensions. *Multinational Finance Journal*. v. 14, p. 219-254.

DIXIT, A.K. and R.S. PINDYCK (1994): "Investment under Uncertainty" Princeton University Press, Princeton, N.J., 1994

FIANI, R.,(2006). *Teoria dos Jogos – Com Aplicação em Economia, Administração e Ciências Sociais*. 2a Edição. São Paulo-SP: Campus.

FUDENBERG, D., and TIROLE, J. (1985). Pre-emption and rent equalization in the adoption of new technology. *Review of Economic Studies* 52: 383-401.

GRENADIER, S.R. (1996). "The Strategic Exercise of Options: Development Cascades and Overbuilding in Real Estate Markets," *Journal of Finance* 51(5): 1653-1679.

GRENADIER, S.R. (1999). "Information Revelation Through Option Exercise," *Review of Financial Studies* 12(1): 95-130.

GRENADIER, S.R. (eds.) 2000. Game Choices – the Intersection of Real Options and Game Theory. London: Risk Books.

HUISMAN, K. J. M., and KORT, P. M. (1999). Effects of strategic interactions on the option value of waiting. Working paper. Tilburg: Tilburg University.

HUISMAN, K.J.M. (2001). Technology Investment: A Game Theoretic Real Options Approach. Boston: Kluwer Academic Publishers.

HULL. J.(1998). Opções, Futuros e Outros Derivativos. 3a. Edição. Bolsa de Mercadoria e Futuros.

JOAQUIN, D. C. and K. C. BUTLER (2000). Competitive Investment Decisions: A Synthesis, in eds. M. J. Brennan and L. Trigeorgis, Project Flexibility, Agency, and Competition: New Developments in the Theory of Real Options) (Oxford University Press, New York).

KESTER, W.C. (1984). Today's options for tomorrow's growth. Harvard Business Review 62: 153-160.

LAMBRECHT, B. and PERRAUDIN W. (1994): "Option Games" Working Paper, Cambridge University, and CEPR (UK), August 1994, 17 pp.

LAMBRECHT, B. and PERRAUDIN W. (2003). "Real Options and Preemption Under Incomplete Information," Journal of Economic Dynamics and Control 27(4): 619-643.

MASON, R. A., and H. F. WEEDS (2003): "Can Uncertainty Hasten Investment?," Mimeo

MAYNARD S., J. (1984). Current controversies in evolutionary biology. In Dimensions of Darwinism, ed. Greene, M., 273-86. Cambridge University Press.

MAYNARD S, J., PRICE G. R. (1973). The logic of animal conflict. Nature 246: 15-18.

MCDONALD, R., and SIEGEL, D. (1986). The value of waiting to invest. Quarterly Journal of Economics 101: 707-727.

MENASCHE, D. S. (2005). Controle de Congestionamento: Uma Abordagem Dinâmico-Populacional Via Teoria dos Jogos Evolucionários. Tese de Mestrado, COPPE Sistemas. Disponível em: www.land.ufrj.br/~sadoc/tese.

MYERS, S.C. (1977). Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics* 5: 147-175.

NASH, J.F.Jr. (1950). Non-Cooperative Games. PhD Dissertation, Princeton University.

NOWAK MA, RM May, RE PHILLIPS, S ROWLAND-JONES, DG LALLOO, S MCADAM, P KLENERMAN, B KÖPPE, K SIGMUND, CRM BANGHAM, AJ MCMICHAEL (1995). Antigenic oscillations and shifting immunodominance in HIV-1 infections. *Nature* 375: 606- 611.

NOWAK MA, K SIGMUND (1993). A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit for tat in the Prisoner's Dilemma game. *Nature* 364: 56-58.

PADDOCK, J.L.; SIEGEL, D.R.; and SMITH, J.L. (1988). Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. *Quarterly Journal of Economics* 103: 479-508.

PAWLINA, G. and KORT, P.: (2006), Real options in an asymmetric duopoly: who benefits from your competitive disadvantage?, *Journal of Economics and Management Strategy* 15(1), 1–35.

PAXSON, D., and PINTO, H. (2005). "Rivalry under Price and Quantity Uncertainty", *Review of Financial Economics*, Vol. 14, pp. 209-224.

PEROTTI, E. and ROSSETTO, S. (2000). "Internet Portals as Portfolios of Entry Options", Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 2000-105/2.

REINGANUM, M. (1981). A Misspecification of Capital Asset Pricing: Empirical Anomalies Based on Earnings Yields and Market Values, *Journal of Financial Economics* 9, 19-46.

SHACKLETON, MARK B., ANDRIANOS E. TSEKREKOS and RAFAL WOJAKOWSKI. (2004). "Strategic Entry and Market Leadership in a Two-Player Real Option Game," *Journal of Banking and Finance* 28(1): 179-201.

SHAKED, M. and J. SUTTON (1990), 'Multiproduct Firms and Market Structure', *Rand Journal of Economics*, vol. 21, pp. 45-62.

SMETS P. (1991) About updating. in D'Ambrosio B., Smets P., and Bonissone P.P. eds, *Uncertainty in AI 91*, Morgan Kaufmann, San Mateo, Ca, USA, 1991, 378-385.

SMETS, F.R. (1993). *Essays on Foreign Direct Investment*. New Haven: Yale University, Doctoral dissertation.

SMIT, H.T.J., and TRIGEORGIS, L. (2004). *Strategic Investment – Real Options and Games*. Princeton: Princeton University Press.

TANAKA, Y., (1999). Long run equilibria in an asymmetric oligopoly. *Economic Theory* 14, 705–715.

TIOLE, J. (1988). *The theory of industrial organization*. MIT Press: Cambridge.

TOURINHO, O.A.F. (1979). *The Valuation of Reserves of Natural Resources: an Option Pricing Approach*. Berkeley: Doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

TRIGEORGIS, L., and S. P. MASON. (1987). "Valuing Managerial Flexibility." *Midland Corporate Finance Journal*, 14-21.

TRIGEORGIS, L. (1996): "Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation" MIT Press, Cambridge, MA, 1996, 427 pp.

XIAO, T.J., YU, G. (2006). Marketing objectives of retailers with differentiated goods: An evolutionary perspective. *Journal of System Science and System Engineering*.

XIAO, T.J., YU, G. (2006). Supply chain disruption management and evolutionarily stable strategies of retailers in the quantity-setting duopoly situation with homogeneous goods. *European Journal of Operational Research*.

WILLIAMS, J.T. (1993). "Equilibrium and Options on Real Assets," *Review of Financial Studies* 6(4): 826-850.

YOUNG, H.P., (1993). The evolution of conventions. *Econometrica* 61, 57–84.

ZERMELO E. (1912), *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, vol. II, 50 • -504

ZIEGLER, A. (1999). *A Game Theory Analysis of Options – Contributions to The Theory of Financial Intermediation in Continuous Time*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Apêndice A

Considerando o caso (PP) comumente explorado na literatura como em Dixit e Pindyck (1994); Dias e Teixeira (2010); livro do Huisman (2001); Joaquin e Butler (2000) entre outros se encontrará o valor do seguidor através da resolução da equação diferencial conhecida:

$$0,5\sigma^2x^2F_{XX} + (r - \delta)XF_X - rF = 0$$

sendo σ = Incerteza (volatilidade) da curva de demanda; r = Taxa doméstica de desconto livre de risco; δ = Taxa livre de risco de desconto (rendimento sem risco de perder uma unidade de moeda estrangeira); X = O valor inicial para o parâmetro de taxa de câmbio; F = função; F_X = primeira derivada de F em X ; F_{XX} = segunda derivada de F em X .

Utilizando o caso mais provável da firma de alto custo A como seguidora (caso a outra firma seja a seguidora a resolução é análoga). Além da condição trivial ($X = 0 \rightarrow F = 0$), se tem as condições usuais de continuidade e de suavidade no gatilho de entrada do seguidor, respectivamente:

$$\text{para } X = X_{FA}^*, \quad F_A(X) = \frac{(a-2c_A+c_B)^2}{9b} \frac{X}{\delta} - I$$

$$\text{para } X = X_{FA}^*, \quad \frac{\partial F_A}{\partial X} = \frac{(a-2c_A+c_B)^2}{9b\delta}$$

A solução da equação diferencial ordinária é $F(X) = AX^\beta$. Substituindo no ponto de entrada do seguidor se obtém a solução para esse caso em que a firma de alto custo A é a seguidora e a firma de baixo custo B é a líder com a solução desse sistema de duas equações obtém-se a constante A e o valor do seguidor $F(X)$, além do ponto de entrada do seguidor X_F^*

$$F_A(X) = \begin{cases} \left[\frac{(a-2c_A+c_B)^2}{9b} \frac{X_{FA}^*}{\delta} - I \right] \left(\frac{X}{X_{FA}^*} \right)^\beta & \text{se } X < X_{FA}^* ; \\ \frac{(a-2c_A+c_B)^2}{9b} \frac{X}{\delta} - I & \text{se } X \geq X_{FA}^* \quad (\text{valor do exercício simultâneo}) \end{cases}$$

A o seguidor é esperado exercer a opção no gatilho de entrada, obtendo o VPL (termo entre colchetes) trazido a valor presente com o fator de desconto esperado (segundo termo).

$$X_{FA}^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{9bI\delta}{(a - 2c_A + c_B)^2}$$

Sendo β é (> 1) raiz positiva da equação quadrática $0.5\sigma^2\beta^2 + (r - \delta - 0.5\sigma^2)\beta - r = 0$. Se $X > X_{FA}^*$, o valor do líder é igual ao valor do exercício simultâneo. O valor do seguidor também pode ser obtido pelo método integral. O valor do líder pode ser obtido por ambos os métodos (diferencial e integral), no caso ele fica conforme a equação abaixo.

$$L_B = \frac{(a - c_B)^2}{4b} \frac{X}{\delta} + \left[\frac{(a - 2c_B + c_A)^2}{9b} - \frac{(a - c_B)^2}{4b} \right] \frac{X_{FA}^*}{\delta} \frac{X}{X_{FA}^*}^\beta - I$$

se $X < X_{FA}^*$

Utilizando o método diferencial para deduzir o valor da firma de baixo custo como líder (LB) mostrada acima, a equação diferencial ordinária do valor do líder durante a fase monopolista (MB).

$$0,5\sigma^2 x^2 M_{XX} + (r - \delta) X M_X - rM + \frac{(a - c_B)^2}{4b} X = 0$$

Na qual o último termo $\frac{(a-c_B)^2}{4b} X$ é o termo não homogêneo que sugere a solução em perpetuidade como solução particular. Ela é somada a solução geral:

$$M_B(X) = A_B X^\beta + \frac{(a - c_B)^2}{4b} \frac{X}{\delta}$$

se $X < X_{FA}^*$

A constante A_B é negativa, refletindo as perdas competitivas causadas pela futura entrada do seguidor. O valor L_B é simplesmente $L_B = M_B - I$, para se resolver pelo método diferencial se utiliza a equação de M e não a de L . Essa equação tem solução geral do tipo $A_1x^{\beta_1} + A_2x^{\beta_2}$ como pela condição trivial $A_2 = 0$ simplifica se a equação chamando A_1 de apenas A e β_1 de β , aplicando-se a condição de continuidade no ponto em que acaba a fase de monopólio do líder, gatilho de entrada do seguidor X_{FA} se obtém:

$$M_B(X_{FA}) = \left[\frac{(a - 2c_B + c_A)^2}{9b} \right] \frac{X_{FA}}{\delta}$$

Substituindo M na solução da equação no ponto X_{FA} , se obtém A_B :

$$A_B = \left(\frac{(a - 2c_B + c_A)^2}{9b} - \frac{(a - c_B)^2}{4b} \right) \frac{(X_{FA})^{1-\beta}}{\delta}$$