# 1
# Introdução

A mecânica clássica diz que a evolução de um certo sistema pode ser descrita pela posição e velocidade de cada partícula em cada instante, a partir das condições iniciais. Mas, se o sistema em que estamos trabalhando tem uma quantidade muito grande de partículas, a utilização da proposta anterior pode ser muito complexa, por exemplo, por cada mol de gás, temos uma quantidade de partículas da ordem maior que $10^{23}$, que é um número muito grande. Assim, resolver um sistema de equações em espaços com estas dimensões, torna-se difícil, pois este problema, claramente, excede as capacidades computacionais que estão atualmente disponíveis.

A mecânica estatística, separa o campo de estudo no espaço macroscópico e no estado microscópico. Assim, podemos estudar parâmetros no sistema macroscópico como pressão, temperatura, volume, velocidade média e outros, que em certas ocasiões, se espera que a sua evolução temporal seja dada pela solução de uma equação diferencial parcial, que chamamos de equação hidrodinâmica.

No caso microscópico, a mecânica estatística simplifica o estudo do sistema supondo que o movimento das partículas é aleatório, isto é, cada partícula faz um passeio aleatório com certas restrições.

Assim, assumindo este comportamento aleatório das partículas esperamos obter a equação hidrodinâmica para os parâmetros macroscópicos, dependendo da dinâmica microscópica aleatória subjacente. Então, é surpreendente que a partir de um processo aleatório podemos obter um processo determinístico. Este é o chamado limite hidrodinâmico para o sistema físico em questão.

Agora, vamos fazer uma descrição informal do processo estocástico com que vamos trabalhar. Imaginemos que temos $N+1$ sítios, nomeadamente $1, 2, \ldots, N-1$, e temos no máximo uma partícula por sítio. Nos sítios 0 e $N$ vamos supor que temos infinitas partículas, e por esse motivo, vamos dizer que esses sítios são como reservatórios de partículas acoplados ao sistema. Vamos chamar aos sítios $1, 2, \cdots, N-1$ os sítios do interior e a 0 e $N$ os sítios da fronteira. Agora, nos sítios do interior, cada partícula executa um passeio aleatório simétrico a tempo contínuo, restrito à regra de que se uma partícula quer pular, com probabilidade $1/2$, para um sítio do interior previamente ocupado por outra partícula, então o salto é suprimido. Esta propriedade se chama de regra de exclusão. Na fronteira a dinâmica é a seguinte. As partículas podem entrar no sítio 1 com taxa $\alpha$ e sair para a fronteira no sítio 0 com taxa

$1-\alpha$, analogamente, no sítio $N-1$ as partículas podem entrar com taxa $\beta$ e sair para a fronteira no sítio $N$ com taxa $1-\beta$. A este processo vamos chamar processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios. Além disso, em cada sítio da malha existe um relógio com lei exponencial de parâmetro 1. Se um relógio num sítio da malha toca, a partícula neste sítio salta com a dinâmica anteriormente estabelecida. Os relógios exponencias fazem com que o processo tenha perda de memória, assim temos uma cadeia de Markov a tempo contínuo com espaço de estados discreto.

Agora, fazemos uma identificação do espaço discreto $\{0,1,2,\ldots,N-1,N\}$ (espaço microscópico) com o espaço contínuo $[0,1]$ (espaço macroscópico) pela aplicação que leva $x$ em $\frac{x}{N}$. Então vamos dizer que os saltos se realizam sobre os sítios $\{0,\frac{1}{N},\ldots,\frac{N-1}{N},1\}$. Queremos mostrar que quando $N\to\infty$, a densidade de partículas em $[0,1]$ se comporta como a solução de uma equação diferencial parcial, a esta característica vamos chamar limite hidrodinâmico. Aqui precisamos fazer uma mudança de escala temporal, para tal vamos acelerar o tempo por um fator de $N^2$. Esta mudança na escala de tempo é importante para conseguirmos a convergência das densidades.

Neste trabalho, queremos fazer os detalhes da demonstração do teorema de limite hidrodinâmico para o processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios.

No primeiro capítulo, vamos tratar alguns resultados de cadeias de Markov, e teoria de semigrupos, que nos dará uma base para o estudo dos seguintes capítulos.

No segundo capítulo, introduzimos o processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios. Também, vamos apresentar as notações que vamos utilizar no trabalho. Além disso, vamos deduzir algumas equações diferenciais parciais discretas associadas ao processo que vamos estudar.

No terceiro capítulo, vamos fazer um estudo da equação do calor. Definimos formalmente a noção de solução fraca de uma equação do calor com condições de Dirichlet e estudamos a equação semi-discreta do calor.

No quarto capítulo, vamos demonstrar o limite hidrodinâmico. Para fazer esta demonstração consideramos três partes: rigidez, medidas absolutamente contínuas e a caracterização dos pontos limite. O limite hidrodinâmico é uma Lei dos Grandes Números para uma medida que dá peso $\frac{1}{N}$ a cada sítio que está ocupado por uma partícula. Esta medida é chamada medida empírica.

No último capítulo vamos estudar as flutuações fora do equilíbrio. Neste capítulo vamos a estabelecer o teorema do Limite Central para a medida empírica, para isto vamos definir o campo de flutuações, que é uma distribuição aleatória em $[0,1]$.