4
A equação do calor

O teorema do limite hidrodinâmico 5.0.10 que é o nosso principal objetivo no Capítulo 4, diz que se rescalamos o espaço por $\frac{1}{N}$ e o tempo por N^2 a evolução da densidade de partículas é dada pela solução de uma equação do calor com certas condições de fronteira. Por este motivo, neste capítulo vamos estudar a equação do calor e o significado de uma solução fraca desta equação.

4.1
Equação do calor

Vamos considerar agora as equações do tipo

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \tag{4.1}$$

sujeita a condições iniciais e de contorno apropriadas, onde $t \geq 0$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. A função desconhecida é $u : [0,\infty) \times \overline{U} \to \mathbb{R}$, com $u = u(t,x)$, e o laplaciano Δ é tomado com respeito a $x = (x_1, \cdots, x_n)$, isto é, $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$. A função f é dada. No caso em que $f \equiv 0$ dizemos que a equação (4.1) é homogênea.
No caso em que tenhamos uma discretização de U (e uma definição discreta do laplaciano) vamos dizer que a equação é semi-discreta.
Nesta dissertação, vamos estudar o caso $n = 1$, e assim temos que $\Delta = \partial_x^2$.

4.1.1
Interpretação física

A equação do calor também é conhecida como a equação de difusão que descreve a evolução no tempo de uma densidade u de alguma quantidade como o calor, a concentração química, etc. Note que se $V \subset U$ tal que ∂V é suave, então a taxa de troca dessa quantidade dentro de V é igual ao negativo do fluxo através de ∂V, isto é,

$$\frac{d}{dt}\int u dx = -\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu dS,$$

onde $\mathbf{F}$ é o fluxo de densidade e ν é o vetor normal unidade exterior do campo. Como V é arbitrário então temos que $u_t = -\text{div } \mathbf{F}$. Em muitas situações, $\mathbf{F}$ é proporcional ao gradiente de u, mas na direção oposta (isso pois o fluxo vai de regiões de maior a concentração à regiões de concentração mais baixa), assim temos que $F = -a\nabla u\,(a > 0)$. Logo, div $\mathbf{F} = \text{div}\,(-a\nabla u) = -a\Delta u$. Quando tomamos $a = 1$ temos a equação do calor homogênea.

4.2 Motivação e definição da solução fraca

Uma equação diferencial parcial pode ter soluções que não são diferenciáveis. Assim, para encontrar tais soluções, temos que rescrever a equação diferencial parcial de forma que apareça na equação as derivadas da solução (formulação fraca).
Consideremos a equação do calor com condições de Dirichlet dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \Delta\rho(t,x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ \rho(t,0) = \alpha,\ \rho(t,1) = \beta & \text{para} \quad t \in [0,\infty) \end{cases} . \tag{4.2}$$

Agora, fixemos um $T > 0$. Tomemos $R = [0,T] \times [0,1]$ e consideremos o conjunto $C_0^{1,2}(R)$ como o conjunto de funções $f : R \to \mathbb{R}$ tais que f é de classe $C^1[0,T]$ no tempo, de classe $C^2[0,1]$ no espaço, satisfazendo $f(t,0) = f(t,1) = 0$.
Vejamos, informalmente, que se multiplicamos uma função teste $G_t(x)$ tal que $G \in C_0^{1,2}(R)$ na equação $\partial_t\rho(t,x) = \Delta\rho(t,x)$ de (4.2) temos que

$$\partial_t\rho(t,x)G_t(x) = \Delta\rho(t,x)G_t(x).$$

Integrando a igualdade anterior sobre a região R obtemos

$$\underbrace{\int_0^1\int_0^T \partial_t\rho(t,x)G_t(x)dtdx}_{=I_1} = \underbrace{\int_0^1\int_0^T \Delta\rho(t,x)G_t(x)dtdx}_{=I_2}. \tag{4.3}$$

Fazendo uma integração por partes na integral I_1 temos que

$$I_1 = \int_0^1 \rho(T,x)G_T(x) - \rho(0,x)G_0(x)dx - \int_0^1\int_0^T \rho(t,x)\partial_t G_t(x)dtdx.$$

Agora vamos calcular I_2. Neste caso note que $\Delta = \partial_x^2$, então pelo Teorema de Fubini e fazendo outra integração por partes, duas vezes, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \partial_x\rho(t,1)G_t(1) - \partial_x\rho(t,0)G_t(0)dt - \int_0^T\int_0^1 \partial_x\rho(t,x)\partial_x G_t(x)dxdt \\ &= \int_0^T \partial_x\rho(t,1)G_t(1) - \partial_x\rho(t,0)G_t(0)dt \\ &- \int_0^T \rho(t,1)\partial_x G_t(1) - \rho(t,0)\partial_x G_t(0)dt + \int_0^T\int_0^1 \rho(t,x)\partial_x^2 G_t(x)dxdt. \end{aligned}$$

Assim $I_1 = I_2$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho(T,x)G_T(x) - \rho(0,x)G_0(x)dx &= \int_0^1\int_0^T \rho(t,x)\partial_t G_t(x)dtdx \\ &+ \int_0^T \partial_x\rho(t,1)G_t(1) - \partial_x\rho(t,0)G_t(0)dt \\ &- \int_0^T \rho(t,1)\partial_x G_t(1) - \rho(t,0)\partial_x G_t(0)dt \\ &+ \int_0^T\int_0^1 \rho(t,x)\Delta G_t(x)dxdt.\end{aligned}$$

Logo, como $p(t,0) = \alpha$, $\rho(t,1) = \beta$ e $G \in C_0^{1,2}(R)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho(T,x)G_T(x) - \rho(0,x)G_0(x)dx &= \int_0^1\int_0^T \rho(t,x)(\partial_t + \Delta)G_t(x)dtdx \\ &+ \int_0^T \alpha\partial_x G_t(0) - \beta\partial_x G_t(1)dt.\end{aligned}$$

Definição 4.2.1. *Fixe uma função contínua* $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$. *Uma função mensurável* $\rho : [0,T] \times [0,1] \to [0,1]$ *é uma solução fraca da equação (4.2), se para cada função* $G \in C_0^{1,2}(R)$, ρ *satisfaz a equação integral,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho(T,x)G_T(x) - \rho_0(x)G_0(x)dx &= \int_0^1\int_0^T \rho(t,x)(\partial_t + \Delta)G_t(x)dtdx \\ &+ \int_0^T \alpha\partial_x G_t(0) - \beta\partial_x G_t(1)dt.\end{aligned}$$

Teorema 4.2.2. *Se existe uma solução fraca da equação do calor com condições de Dirichlet dada em* (4.2), *então essa solução é única.*

Este resultado é essencial para a demonstração do limite hidrodinâmico que vamos apresentar. Este resultado será utilizado, mas a demonstração não será feita nesta dissertação, para mais detalhes veja [6] e [12]).

4.3 Equação semi-discreta do calor

Nesta seção vamos fixar $N \geq 2$ e vamos considerar o laplaciano discreto definido no Capítulo 2 na equação (3.6).

4.3.1
Aproximação discreta-contínua

Seja ρ_t^N solução da equação parabólica homogênea semi-discreta dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t^N(x) = (\Delta_N \rho_t^N)(x), \text{ para } x \in \Lambda_N,\ t \geq 0 \\ \rho_t^N(0) = \alpha,\ \rho_t^N(N) = \beta,\ t \geq 0 \end{cases}.$$

E seja ρ_t solução da equação parabólica homogênea dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t(u) = (\Delta \rho_t)(u), \text{ para } u \in (0,1),\ t \geq 0 \\ \rho_t(0) = \alpha,\ \rho_t(1) = \beta,\ t \geq 0 \end{cases}.$$

Agora, definimos para x em $\{0, \cdots, N\}$

$$\omega_t^N(x) := \rho_t^N(x) - \rho_t\left(\frac{x}{N}\right), \tag{4.4}$$

e notamos que $\omega_t^N(0) = 0$, $\omega_t^N(N) = 0$ e para todo $x \in \Lambda_N$ temos

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_t^N(x) &= \partial_t\left(\rho_t^N(x) - \rho_t(x/N)\right) \\ &= \partial_t \rho_t^N(x) - \partial_t \rho_t(x/N) \\ &= (\Delta_N \rho_t^N)(x) - (\Delta \rho_t)(x/N) \\ &= (\Delta_N \rho_t^N)(x) - (\Delta_N \rho_t)(x/N) + \underbrace{(\Delta_N \rho_t)(x/N) - (\Delta \rho_t)(x/N)}_{:=F_N(t,x)} \\ &= (\Delta_N \omega_t^N)(x) + F_N(t,x). \end{aligned}$$

Para $\omega : \{0, \cdots, N\} \to \mathbb{R}$ introduzimos a norma supremo dada por

$$\|\omega\|_\infty := \max_{x \in \{0,\cdots,N\}} |\omega(x)|.$$

Lema 4.3.1. *Seja ω_t^N como em (4.4), então*

$$\|\omega_t^N\|_\infty \leq \|\omega_0^N\|_\infty + \frac{Ct}{N^2},$$

onde C é uma constante.

Demonstração. Como

$$\begin{cases} \partial_t \omega_t^N(x) = (\Delta_N \omega_t^N)(x) + F_N(t,x) \\ \omega_t^N(0) = 0,\ \omega_t^N(N) = 0,\ t \geq 0 \end{cases},$$

pela fórmula de Feynman-Kac (ver [8] e A.1.7 de [9]) temos que

$$\omega_t^N(x) = \mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2}) + \int_0^t F_N(t-s, X_{tN^2})ds\right],$$

onde $\mathbb{E}_x$ é a esperança com respeito à medida de probabilidade $\mathbb{P}_x$ tal que o processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ é um passeio aleatório com gerador Δ_N absorbido na fronteira, definido em (3.6) e com estado inicial x.
Agora, notamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2})\right] &= \sum_{y=0}^{N}\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2})\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}(y)\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(y)\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\omega_0^N(y)\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\omega_0^N(y)\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right].
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2})\right]\right| &\leq \sum_{y=0}^{N}|\omega_0^N(y)|\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right] \\
&\leq \|\omega_0^N\|_\infty \underbrace{\sum_{y=0}^{N}\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right]}_{=1}.
\end{aligned}$$

Similarmente, temos que

$$\left|\mathbb{E}_x\left[\int_0^t F_N(t-s,X_{tN^2})ds\right]\right| \leq \int_0^t \sum_{y=0}^{N}\left|F_N(t-s,y)\right|\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right]ds.$$

Agora, como ρ_t é limitada e $\rho_t \in C^\infty(0,1)$ temos por um desenvolvimento de Taylor que

$$\begin{aligned}
\rho_t\left(\frac{x-1}{N}\right) = \rho_t\left(\frac{x}{N}\right) - \frac{1}{N}\partial_x\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{1}{2N^2}\partial_x^2\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) - \frac{1}{3!N^3}\partial_x^3\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) \\
+ \frac{1}{4!N^4}\partial_x^4\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + O\left[\left(\frac{x}{N}\right)^5\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_t\left(\frac{x-1}{N}\right) = \rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{1}{N}\partial_x\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{1}{2N^2}\partial_x^2\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{1}{3!N^3}\partial_x^3\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) \\
+ \frac{1}{4!N^4}\partial_x^4\rho_t\left(\frac{x}{N}\right) + O\left[\left(\frac{x}{N}\right)^5\right].
\end{aligned}$$

Assim, é fácil notar que

$$\frac{1}{N^2}\Delta_N\rho_t\left(\frac{x}{N}\right)=\frac{1}{N^2}\partial_x^2\rho_t\left(\frac{x}{N}\right)+\frac{1}{12N^4}\partial_x^4\rho_t\left(\frac{x}{N}\right)+O\left[\left(\frac{x}{N}\right)^6\right].$$

Logo,

$$|F_N(t,x)|=|(\Delta_N\rho_t)(x/N)-(\partial_x^2\rho_t)(x/N)|\leq\left|\frac{1}{12N^2}\partial_x^2\rho_t\left(\frac{x}{N}\right)\right|\leq\frac{C}{N_2}.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}_x\left[\int_0^t F_N(t-s,X_{tN^2})ds\right]\right| &\leq \int_0^t\sum_{y=0}^N|F_N(t-s,y)|\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right]ds\\ &\leq \int_0^t\frac{C}{N_2}\underbrace{\sum_{y=0}^N\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right]ds}_{=1}\\ &= \frac{Ct}{N_2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\omega_t^N\|_\infty\leq\|\omega_0^N\|_\infty+\frac{Ct}{N_2}.$$

□

Agora, considere a equação

$$\begin{cases}\partial_t\rho_t^N(x)=(\Delta_N\rho_t^N)(x) & \text{para}\quad x\in\Lambda_N, t\geq 0\\ \rho_0^N(x)=\rho^N(x) & \text{para}\quad x\in\Lambda_N\\ \rho_t^N(0)=\alpha,\ \rho_t^N(N)=\beta & \text{para}\quad t\geq 0\end{cases}. \tag{4.5}$$

Lema 4.3.2. *Se ρ_t^N é solução da equação (4.5) então*

$$\sup_{t\geq 0}\|\nabla_N\rho_t^N\|_\infty\leq\|\nabla_N\rho_0^N\|_\infty,$$

onde $\nabla_N\rho_t^N$ é a derivada discreta definida por

$$\nabla_N\rho_t^N(x)=N\{\rho_t^N(x+1)-\rho_t^N(x)\}. \tag{4.6}$$

Demonstração. Daremos duas provas diferentes, uma baseada na fórmula de Feynman-Kac, e a outra baseada no princípio do máximo.

Prova 1.

Defina $\omega_t^N(x)=\frac{1}{N}\nabla_N\rho_t^N(x)$. Claramente $\partial_t\omega_t^N=\Delta_N\omega_t^N(x)$ $\forall x\in\{1,\cdots,N-2\}$. Pela fórmula de Feynman-Kac, tomando o processo $\{X_{tN^2}\}_{t\geq 0}$ como o passeio aleatório com gerador Δ_N absorvido na fronteira, definido em (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
\omega_t^N(x) &= \mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2})\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(X_{tN^2})\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}(y)\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\mathbb{E}_x\left[\omega_0^N(y)\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\omega_0^N(y)\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}\right] \\
&= \sum_{y=0}^{N}\omega_0^N(y)\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\omega_t^N(x)| &\leq \sum_{y=0}^{N}|\omega_0^N(y)|\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right] \\
&\leq \|\omega_0^N\|_\infty\underbrace{\sum_{y=0}^{N}\mathbb{P}_x\left[X_{tN^2}=y\right]}_{=1} \\
&\leq \|\omega_0^N\|_\infty \qquad \forall t\geq 0.
\end{aligned}$$

Tomando supremos sob t temos

$$\sup_{t\geq 0}\|\nabla_N\rho_t^N\|_\infty \leq \|\nabla_N\rho_0^N\|_\infty.$$

Prova 2.

Fixe $T\geq 0$ e defina $\gamma_t(x)=\rho_t^N(x+1)-\rho^N(x)$, para $0\leq x\leq N-1$. É claro que $\partial_t\gamma_t(x)=\Delta_N\gamma_t$ para $1\leq x\leq N-2$. Assim, pelo princípio do máximo temos que se

$$M=\max_{1\leq x\leq N-1}\sup_{0\leq s\leq T}|\gamma_s(x)|$$

então

$$M=\max\left\{\max_{1\leq x\leq N-1}|\rho^N(x+1)-\rho^N(x)|,\ \sup_{0\leq t\leq T}|\rho_t^N(1)-\alpha|,\right.$$
$$\left.\sup_{0\leq t\leq T}|\beta-\rho_t^N(N-1)|\right\}. \quad (4.7)$$

Afirmamos que o máximo é atingido no ponto $t=0$. Vamos supor por

redução ao absurdo que não. Vamos supor que existe um $t_0 \in (0,T]$ tal que $M = |\rho_{t_0}^N(1) - \alpha|$.
Olhando para equação (4.5) com $x = 1$ temos que para todo $s \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
\partial_s \rho_s^N(1) &= (\Delta_N \rho_s^N)(1) \\
&= \rho_s^N(0)N^2 + N^2\rho_s^N(2) - 2N^2\rho_s^N(1) \\
&= \alpha N^2 + N^2\rho_s^N(2) - 2N^2\rho_s^N(1) \\
&= -\rho_s^N(1)N^2 + N^2\alpha + N^2(\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1)).
\end{aligned}$$

Assim, multiplicando a igualdade anterior por e^{sN^2} obtemos,

$$\partial_s \rho_s^N(1)e^{sN^2} = -\rho_s^N(1)N^2 e^{sN^2} + N^2\alpha e^{sN^2} + N^2(\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{sN^2},$$

e isto significa que

$$\partial_s(\rho_s^N(1)e^{sN^2}) = N^2\alpha e^{sN^2} + N^2(\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{sN^2}.$$

Integrando a igualdade anterior no intervalo $(0,t)$ temos:

$$\begin{aligned}
\rho_t^N(1)e^{tN^2} - \rho_0^N(1) &= N^2\alpha \int_0^t e^{sN^2} ds + N^2 \int_0^t (\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{sN^2} ds \\
&= \alpha(e^{tN^2} - 1) + N^2 \int_0^t (\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{sN^2} ds.
\end{aligned}$$

Multiplicando por e^{-tN^2} temos

$$\rho_t^N(1) - \rho_0^N(1)e^{-tN^2} = \alpha(1 - e^{-tN^2}) + N^2 \int_0^t (\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{(s-t)N^2} ds,$$

e assim, temos que

$$\rho_t^N(1) - \alpha = (\rho_0^N(1) - \alpha)e^{-tN^2} + N^2 \int_0^t (\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))e^{(s-t)N^2} ds.$$

Isto implica que, para $t = t_0$ temos

$$\begin{aligned}
\underbrace{|\rho_{t_0}^N(1) - \alpha|}_{=M} &\leq \left| (\rho_0^N(1) - \alpha)e^{-t_0N^2} + N^2 \int_0^{t_0} \underbrace{(\rho_s^N(2) - \rho_s^N(1))}_{\leq M} e^{(s-t_0)N^2} ds \right| \\
&\leq |\rho_0^N(1) - \alpha|e^{-t_0N^2} + \underbrace{N^2 \int_0^{t_0} M e^{(s-t_0)N^2} ds}_{M(1-e^{-N^2 t_0})}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$M \quad \leq \quad |\rho_0^N(1) - \alpha| e^{-t_0 N^2} + M - M e^{-N^2 t_0},$$

e isto implica que

$$M e^{-N^2 t_0} \quad \leq \quad |\rho_0^N(1) - \alpha| e^{-t_0 N^2}.$$

Assim podemos concluir que $M \leq |\rho_0^N(1) - \alpha|$, o que é absurdo, pela definição de M. □

Lembremos o conjunto

$$V = \{(x, y) \in C : 0 < x < y < N\}$$

com $C = \{0, \cdots, N\}^2$ e a sua fronteira

$$\partial V = \{(x, y) \in C : x = 0 \text{ ou } y = N\}$$

definido na Seção 3.5. Considere o laplaciano discreto Δ_V^N em V dado pela Definição 3.5.5. Agora, fixemos $h : V \to \mathbb{R}$ e seja f_s a solução da equação do calor semi-discreta dada por

$$\begin{cases} \partial_s f_s(x,y) = \Delta_V^N f_s(x,y) & \text{para} \quad (x,y) \in V, \ \forall s \in [0,T] \\ f_0(x,y) = h(x,y) & \text{para} \quad (x,y) \in V \\ f_s(x,y) = 0 & \text{para} \quad s \in [0,T], \quad (x,y) \in \partial V \end{cases}.$$

Lema 4.3.3. *Se $f_t(x, y)$ satisfaz a equação do calor semi-discreta anterior, então, o máximo valor de f em $[0, T] \times (V \cup \partial V)$ é atingido no ponto (t_0, x_0, y_0) tal que $t_0 = 0$ ou $(x_0, y_0) \in \partial V$.*

Demonstração. Suponha que o máximo é atingido num ponto $p_0 = (t_0, x_0, y_0)$ no interior de $[0, T] \times (V \cup \partial V)$ isto é $p_0 \in (0, T) \times V$. Logo, claramente, temos que $\partial_t f_t(x, y)|_{p_0} = 0$, isto por ser máximo. Aliás, pela definição de laplaciano discreto se tem que $\Delta_V^N f_t(x, y)|_{p_0} \leq 0$. Se f não fosse constante, teríamos que $\Delta_V^N f_t(x, y)|_{p_0} < 0$, mas, isto implica que $\partial_t f_t(x, y)|_{p_0} > \Delta_V^N f_t(x, y)|_{p_0}$ o que é uma contradição, pois $\partial_s f_s(x, y) = \Delta_V^N f_s(x, y)$ para todo $(x, y) \in V$ e $s \in [0, T]$. □

Nota 4.3.4. *Podemos fazer um argumento similar ao da prova do Lema anterior para o caso do mínimo.*

Lema 4.3.5. *Se φ^N é solução da equação*

$$\begin{cases} -(\Delta_V^N \varphi^N)(x,y) = C^2 \delta_{y=x+1}(x,y) & para \quad (x,y) \in V \\ \varphi^N(x,y) = 0 & para \quad (x,y) \in \partial V \end{cases}, \tag{4.8}$$

onde $C \in \mathbb{R}$, então φ^N é única e é dada por

$$\varphi^N(x,y) = \frac{C^2}{N-1}\frac{x}{N}\left(1 - \frac{y}{N}\right), \forall x,y \in V.$$

Demonstração. Primeiro vejamos que φ^N assim definida é solução da equação. Se $|x-y| > 1$ então temos

$$-(\Delta_V^N \varphi^N)(x,y) \quad = \quad -\frac{C^2 N^2}{(N-1)N^2}(4xN - 4xy - 4xN + 4xy) = 0.$$

Agora, no caso que $y = x+1$ temos

$$\begin{aligned} -(\Delta_V^N \varphi)(x,y) &= -\frac{C^2 N^2}{(N-1)N^2}\left[(x-1)(N-x-1) + x(N-x-2)\right. \\ &\quad \left. -2x(N-x-1)\right] \\ &= -\frac{C^2}{(1-N)}(N-1) \\ &= C^2. \end{aligned}$$

Além disso, é claro que $\varphi^N(0,y) = 0$ e $\varphi^N(x,N) = 0$ assim temos que $\varphi^N(x,y) = 0$, se $(x,y) \in \partial V$. Assim, fica provado que φ^N é solução da equação (4.8).

Resta provar a unicidade. Sejam φ_1 e φ_2 soluções da equação (4.8) consideremos $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Note que φ é solução da equação

$$\begin{cases} (\Delta_V^N \varphi^N)(x,y) = 0 & \text{para} \quad (x,y) \in V \\ \varphi^N(x,y) = 0 & \text{para} \quad (x,y) \in \partial V \end{cases}.$$

Pelo princípio do máximo (ver [5]) temos que $\varphi^N(x,y) \leq 0$ para $(x,y) \in V$. Agora se consideramos $-\varphi^N$, que também é uma solução da equação anterior, temos que $-\varphi^N(x,y) \leq 0$ para $(x,y) \in V$, isto é, $0 \leq \varphi^N(x,y)$. Daqui resulta que $\varphi^N(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in V$, ou seja, $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y)$ para todo $(x,y) \in V$. □

Fixamos agora as funções $h : V \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \times V \to \mathbb{R}$. Consideremos a equação parabólica não homogênea

$$\begin{cases} \partial_s \varphi_s(x,y) = \Delta_V^N \varphi_s(x,y) + g_s(x,y) & \text{para} \quad (x,y) \in V \\ \varphi_0(x,y) = h(x,y) & \text{para} \quad (x,y) \in V \\ \varphi_s(x,y) = 0 & \text{para} \quad (x,y) \in \partial V \end{cases}.$$

Denotemos por $\| \cdot \|_{\infty(V)}$ a norma do supremo definida por:

$$\|h\|_{\infty(V)} = \max_{(x,y)\in V} |h(x,y)|.$$

Lema 4.3.6. *Para T fixo, suponha que a função g_s tem suporte na diagonal $y = x+1$. Então,*

$$\sup_{0\le t\le T} \|\varphi_t\|_{\infty(V)} \le \|h\|_{\infty(V)} + \frac{1}{4(N-1)} \sup_{0\le t\le T} \max_{1\le x\le N-2} |g_t(x,x+1)|.$$

Demonstração. Pela fórmula de Feynman-Kac temos que

$$\varphi_t(x,y) = \mathbb{E}_{x,y}\left[h(X_t,Y_t) + \int_0^t g_{t-s}(X_s,Y_s)ds \right],$$

onde o processo $\{(X_t,Y_t)\}_{t\ge 0}$ é um passeio aleatório com gerador Δ_N^V, absorvido na fronteira ∂V do triângulo V, introduzido na Definição 3.5.5, e onde $\mathbb{E}_{x,y}$ é a esperança com respeito à medida de probabilidade $\mathbb{P}_{x,y}$ tal que o processo $\{(X_t,Y_t)\}_{t\ge 0}$ é um passeio com estado inicial (x,y).
Agora, notemos que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{x,y}[h(X_t,Y_t)]| &= \left| \sum_{(z,w)\in V\cup\partial V} h(z,w)\mathbb{P}_{x,y}((X_t,Y_t)=(z,w)) \right| \\ &\le \sum_{(z,w)\in V\cup\partial V} |h(z,w)|\,\mathbb{P}_{x,y}((X_t,Y_t)=(z,w)) \\ &\le \|h\|_{\infty(V)}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\left| \mathbb{E}_{x,y}\left[\int_0^t g_{t-s}(X_s,Y_s)ds \right] \right| = \left| \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}[g_{t-s}(X_s,Y_s)]\,ds \right|.$$

Pela desigualdade do módulo, temos que a equação anterior está limitada por

$$\int_0^t \sum_{(z,w)\in V\cup\partial V} |g_{t-s}(z,w)|\mathbb{P}_{x,y}((X_s,Y_s)=(z,w))\,ds.$$

Como g_s tem suporte na diagonal, podemos limitar a expressão anterior por cima pela expressão

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sum_{z=1}^{N-2} |g_{t-s}(z,z+1)| \mathbb{P}_{x,y}\left((X_s,Y_s)=(z,z+1)\right) ds \\
\leq\ & \left(\sup_{0\leq t\leq T} \max_{1\leq z\leq N-2} |g_t(z,z+1)|\right) \int_0^t \sum_{z=1}^{N-2} \mathbb{P}_{x,y}\left(X_s=z, Y_s=z+1\right) ds \\
\leq\ & \left(\sup_{0\leq t\leq T} \max_{1\leq z\leq N-2} |g_t(z,z+1)|\right) \underbrace{\int_0^\infty \sum_{z=1}^{N-2} \mathbb{P}_{x,y}\left(X_s=z, Y_s=z+1\right) ds}_{:=v_N(x,y)}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $v_N(x,y)$ é solução da equação $\Delta_V^N v_N(x,y) = -\delta_{y=x+1}$. De fato, é fácil ver pela definição de esperança em um espaço discreto que $\mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_s,Y_s)] = \sum_{z=1}^{N-2} \mathbb{P}_{x,y}\left(X_s=z, Y_s=z+1\right)$. Claramente no tempo $s=0$ temos simplesmente que $\mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_0,Y_0)] = \delta_{y=x+1}(x,y)$ e pelas propriedades dos semigrupos temos que $\mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_s,Y_s)] = 0$ quando tomamos $s\uparrow\infty$. Logo, pelas equações de Chapman-Kolgomorov, temos que

$$\Delta_V^N \mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_s,Y_s)] = \partial_s \mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_s,Y_s)].$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_V^N v_N(x,y) &= \int_0^\infty \Delta_V^N \sum_{z=1}^{N-2} \mathbb{P}_{x,y}\left(X_s=z, Y_s=z+1\right) ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \partial_s \sum_{z=1}^{N-2} \mathbb{P}_{x,y}\left(X_s=z, Y_s=z+1\right) ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_t,Y_t)] - \mathbb{E}_{x,y}[\delta_{y=x+1}(X_0,Y_0)]\right) \\
&= -\delta_{y=x+1}(x,y).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 4.3.5 temos

$$\begin{aligned}
v_N(x,y) &= \frac{1}{N-1}\frac{x}{N}\left(1-\frac{y}{N}\right) \\
&\leq \frac{1}{4(N-1)}.
\end{aligned}$$

A última desigualdade vale pois $x<y$. Daqui decorre o resultado. □

Lembremos que na Definição 3.5.1 consideramos uma medida de probabilidade ν^N em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$, e definimos $\rho_t^N(x) = \mathbb{E}_{\nu^N}[\eta_{tN^2}(x)]$ para $x \in \Lambda_N$. Agora, estendemos às fronteiras definindo $\rho_t^N(0) = \alpha$ e $\rho_t^N(N) = \beta$ e sabemos que $\rho_t^N(x)$ é solução da equação (4.5). Lembre também, a Definição 3.5.4, onde $\varphi_t^N(x,y) = \mathbb{E}_\nu\left[\left(\eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x)\right)\left(\eta_{tN^2}(y) - \rho_t^N(y)\right)\right]$ para $(x,y) \in V \cup \partial V$. Suponha agora, que existe uma constante C_0 tal que

$$\sup_{0\le x\le N-1} \nabla_N \rho^N(x) \le C_0, \quad N \max_{\substack{x,y\in\Lambda_N,\\ x<y}} |\varphi^N(x,y)| \le C_0, \tag{4.9}$$

onde $\rho^N = \rho_0^N$ e $\varphi^N = \varphi_0^N$.

Proposição 4.3.7. *Se existe uma constante C_0 que satisfaz (4.9), então*

$$\sup_{t\ge 0} \|\varphi_t^N\|_{\infty(V)} \le \frac{2C_0 + C_0^2}{2N}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.5.6 temos que $\varphi_t^N(x,y)$ é solução da equação (3.10), tomando

$$h(x,y) = \mathbb{E}_{\nu^N}[\left(\eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x)\right)\left(\eta_{tN^2}(y) - \rho_t^N(y)\right)]$$

e

$$g_t(x,y) = -(\triangle_N \rho_t^N)^2(x)\delta_{y=x+1}.$$

Aliás, pela desigualdade

$$\sup_{0\le x\le N-1} N\{\rho^N(x+1) - \rho^N(x)\} \le C_0,$$

pelo Lema 4.3.2 e como g_t tem suporte na diagonal, temos que $g_t(x,y) \le C_0^2$. Além disso, pelo Lema 4.3.6 temos que

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T} \|\varphi_t\|_{\infty(V)} &\le \|h\|_{\infty(V)} + \frac{1}{4(N-1)} \sup_{0\le t\le T} \max_{1\le x\le N-2} |g_t(x,x+1)| \\ &\le \frac{C_0}{N} + \frac{C_0^2}{4(N-1)} \le \frac{C_0}{N} + \frac{C_0^2}{2N}.\end{aligned}$$

□