5
Limite Hidrodinâmico

Neste capítulo queremos provar o limite hidrodinâmico do processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ e com gerador infinitesimal $N^2 L_N$ definido em (3.1).
Agora, definimos a medida empírica associada ao processo η_t. Esta medida está definida em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$, dá peso $\dfrac{1}{N}$ a cada sítio ocupado da configuração η_t.
Definição 5.0.8. *Para cada configuração $\eta \in \{0,1\}^{\Lambda_N}$ definimos a medida empírica $\pi^N(\eta, du)$ em $[0,1]$ como*

$$\pi^N(\eta, du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Lambda_N} \eta(x) \delta_{\frac{x}{N}}(du)\,, \tag{5.1}$$

onde δ_a é a medida Delta de Dirac em a.

Como queremos analisar a evolução temporal da medida empírica associada ao processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$, é preciso definir

$$\pi_t^N(\eta, du) := \pi^N(\eta_{tN^2}, du).$$

Com esta notação temos que se $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função teste, então a integral de G com respeito à medida empírica π_t^N é denotada por $\langle \pi_t^N, G\rangle$ e definida por

$$\langle \pi_t^N, G\rangle := \int G(u) \pi_t^N(\eta, du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right) \eta_{tN^2}(x).$$

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas finitas positivas em $[0,1]$ munido da topologia fraca. Com esta topologia temos que se $\{\pi^N\}_{N\geq 1}$ e π estão em $\mathcal{M}$ então

$$\pi^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{w} \pi \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \langle \pi^N, G\rangle \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \langle \pi, G\rangle,$$

para toda $G \in C[0,1]$, onde $C[0,1]$ é o espaço de funções contínuas no intervalo $[0,1]$.
Agora, consideremos um processo de Markov $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ no espaço $D([0,T], \{0,1\}^{\Lambda_N})$ de funções càdlàg tomando valores em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$, que já foi definido no Capítulo 1, mas neste caso definido num intervalo de tempo que é compacto. Assim obtemos o processo de medidas empíricas $\{\pi_t^N = \pi^N(\eta_t, du)\}_{0\leq t\leq T}$ no espaço $D([0,T], \mathcal{M})$ de funções càdlàg tomando valores em $\mathcal{M}$. Então, notemos que existe uma aplicação injetiva entre os processos de Markov $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ em $D([0,T], \{0,1\}^{\Lambda_N})$ e as medidas empíricas

$\{\pi_t^N = \pi^N(\eta_t, u)\}_{t\geq 0}$ em $D([0,T],\mathcal{M})$. Assim o processo de medidas empíricas também pode ser visto como um processo de Markov.

Seja $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade no espaço $D([0,T],\mathcal{M})$, correspondente ao processo de Markov $\{\pi_t^N\}_{t\geq 0}$ associado ao processo de Markov η_t em $D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N})$. Se $\mathbb{P}_{\mu^N} := \mathbb{P}_{\mu^N}^N$ é uma medida de probabilidade no espaço $D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N})$ que faz o processo η_t um processo de Markov com distribuição inicial μ^N e gerador $N^2 L_N$, então, $\mathbb{Q}^N$ é a medida imagem (push-forward) de $\mathbb{P}_{\mu^N}$ induzida pela aplicação

$$\begin{array}{ccc} (D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}),\mathbb{P}_{\mu^N}) & \to & ((D[0,T],\mathcal{M}),\mathbb{Q}^N) \\ \{\eta_t\}_{t\geq 0} & \longmapsto & \{\pi_t^N\}_{t\geq 0}. \end{array}$$

Para enunciar o primeiro resultado relacionado com a hidrodinâmica deste modelo, é preciso impôr algumas condições sobre a distribuição inicial do processo.

Definição 5.0.9. *Uma sequência de medidas de probabilidades $\{\mu^N\}_{N\geq 1}$ em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ diz-se associada ao perfil de densidade $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$ se, para todo $\delta \geq 0$ e para toda função contínua $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ se tem que*

$$\lim_{N\to\infty} \mu^N \left(\eta \in \{0,1\}^{\Lambda_N} : \left| \frac{1}{N} \sum_{x\in\Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right)\eta(x) - \int_{[0,1]} G(u)\rho_0(u)du \right| > \delta \right) = 0. \tag{5.2}$$

O objetivo no limite hidrodinâmico consiste em mostrar que para cada tempo fixo t, a medida empírica π_t^N converge em probabilidade, quando $N \to \infty$, para a medida determinística π_t, que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue ou seja, $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$, onde, $\rho(t,u)$ é a solução fraca de uma equação do calor com certas condições de fronteira e com condição inicial ρ_0, nomeadamente, a equação (4.2). Assim, o nosso teorema principal é o seguinte.

Teorema 5.0.10. (***Limite Hidrodinâmico***)
Considere o processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ e gerador $N^2 L_N$ definido em (3.1). Seja $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$ um perfil inicial e $\{\mu^N\}_{N\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ associada ao perfil ρ_0. Então, para cada $0 \leq t \leq T$, para cada $G \in C_0^2[0,1]$ e para todo $\delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\eta_\cdot^N : \left| \frac{1}{N} \sum_{x\in\Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_{tN^2}(x) - \int_{[0,1]} G(u)\rho(t,u)du \right| > \delta \right) = 0, \tag{5.3}$$

onde $\rho(t,u)$ é a única solução fraca da equação (4.2).

Nota 5.0.11. *A equação (4.2) se diz a equação hidrodinâmica do processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$.*

Agora, podemos reformular o teorema anterior. Primeiro, note que no espaço $\mathcal{M}$ (pois o espaço $C[0,1]$ é separável) munido da topologia fraca podemos definir uma métrica, isto é, se $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ então

$$\delta(\mu,\nu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle \mu, f_k\rangle - \langle \nu, f_k\rangle|}{1 + |\langle \mu, f_k\rangle - \langle \nu, f_k\rangle|},$$

é uma métrica em $\mathcal{M}$, onde $\{f_k\}_{k\geq 0}$ é uma família enumerável densa de funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, ou seja, para todo $k \geq 1$ temos que $f_k \in C[0,1]$. Assim, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg(\eta^N_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \Bigg| \frac{1}{N} \sum_{x\in\Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right) \eta_{tN^2}(x) \\ - \int_{[0,1]} G(u)\rho(t,u)du \Bigg| > \delta \Bigg) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta^N_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|\langle \pi^N_t, G\rangle - \langle \rho(t,u)du, G\rangle\right| > \delta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta^N_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \delta(\pi^N_t, \rho(t,u)du) > \delta\right) = 0.$$

Esta última expressão pode ser interpretada como convergência em probabilidade, isto é,

$$\pi^N_t \xrightarrow[N\uparrow\infty]{\mathbb{P}_{\mu^N}} \rho(t,u)du.$$

Logo o Teorema 5.0.10 tem a seguinte reformulação:

Teorema 5.0.12. *Considere o processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$, com gerador $N^2 L_N$. Seja $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$ um perfil inicial e $\{\mu^N\}_{N\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ associada ao perfil ρ_0. Então, para cada $0 \leq t \leq T$,*

$$\pi^N_t \xrightarrow[N\uparrow\infty]{\mathbb{P}_{\mu^N}} \rho(t,u)du, \tag{5.4}$$

onde $\rho(t,u)$ é a única solução fraca da equação (4.2).

Para demonstrar este teorema, seguimos um método indireto padrão, provando que a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é relativamente compacta ou rígida. Isto significa, que cada subsequência de $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ tem um ponto limite. Depois mostramos a unicidade do ponto limite. Estos dois resultados nos dão a convergência de $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ ao ponto limite. Para isso, vamos mostrar que os pontos limite de $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ estão concentrados em trajetórias de medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, que são iguais a $\rho_0(u)du$ no tempo inicial $t=0$ e cuja densidade é uma solução fraca da equação hidrodinâmica. Pela unicidade destas soluções, concluímos que $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ tem um único ponto limite $\mathbb{Q}$, concentrado na trajetória com densidade $\rho(t,u)$

com respeito à medida de Lebesgue, onde $\rho(t,u)$ é a única solução fraca da equação hidrodinâmica correspondente. Como o espaço das probabilidades é metrizável, podemos concluir que toda a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ converge para esse ponto limite $\mathbb{Q}$.

5.1 Rigidez

Como já referimos, o primeiro passo consiste em mostrar que $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é rígida.

Proposição 5.1.1. *A sequência de medidas $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é rígida na topologia de Skorohod de $D([0,T],\mathcal{M})$.*

Demonstração. Denotemos por $C^2[0,1]$ o espaço de funções duas vezes continuamente diferenciáveis $G:[0,1]\to\mathbb{R}$. Sabemos que $C_0^2[0,1]$ é denso em $C_0[0,1]$ para a topologia forte. Pela Proposição C.0.16, é suficiente mostrar que a sequência de probabilidades $\{\mathbb{Q}^{N,G}\}_{N\geq 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathbb{R})$, onde para cada função $G\in C_0^2[0,1]$, $\mathbb{Q}^{N,G}$ é a medida de probabilidade induzida pela aplicação

$$\begin{array}{rcl}\psi:(D([0,T],\mathcal{M}),\mathbb{Q}^N) & \to & (D([0,T],\mathbb{R}),\mathbb{Q}^{N,G})\\ \pi^N_{\cdot} & \mapsto & \langle \pi^N_{\cdot}, G\rangle.\end{array}$$

Assim, se A é mensurável no espaço $D([0,T],\mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{N,G}(A) &= \mathbb{Q}^N(\psi^{-1}(A))\\ &= \mathbb{Q}^N\big(\pi^N_{\cdot}\in D([0,T],\mathcal{M}):\psi(\pi^N_{\cdot})\in A\big)\\ &= \mathbb{Q}^N\big(\pi^N_{\cdot}\in D([0,T],\mathcal{M}):\langle\pi^N_{\cdot},G\big)\in A\}.\end{aligned}$$

Como as medidas de probabilidade $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ são induzidas pelas medidas empíricas π^N, então, temos que

$$\begin{array}{rcl}(D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}),\mathbb{P}_{\mu^N}) & \to & (D([0,T],\mathbb{R}),\mathbb{Q}^{N,G})\\ \eta_{\cdot} & \mapsto & \{\langle\pi^N(\eta_{\cdot}),G\rangle\}_{t\geq 0}.\end{array}$$

Note que o processo $\{\langle\pi^N(\eta_t),G\rangle\}_{t\geq 0}$ toma valores em $\mathbb{R}$. Portanto, aplicamos o Teorema C.0.14 e a Proposição C.0.15 com $\mathcal{S}=\mathbb{R}$ e d a distância usual de $\mathbb{R}$.

Para provar a primeira condição do Teorema C.0.14, fixe $G\in C[0,1]$ e $\epsilon>0$. Assim

$$\begin{aligned}\big|\langle\pi^N_t,G\rangle\big| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N}G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_t(x)\right|\\ &\leq \|G\|_\infty,\end{aligned}$$

onde $\|G\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |G(x)| < \infty$. A última desigualdade vale porque no máximo temos uma partícula por sítio, isto é, $\forall x \in \Lambda_N$, $|\eta_t(x)| \leq 1$, $\forall t$.
Assim, basta tomar $K(t,\epsilon) = \overline{B_r(0)}$ com $r > \|G\|_\infty$, onde resulta que

$$\mathbb{Q}^{N,G}\left(\langle \pi^N_\cdot, G\rangle \in D([0,T],\mathbb{R}) : \langle \pi^N_t, G\rangle \notin K(t,\epsilon)\right) = 0 < \epsilon.$$

Para provar a segunda condição do Teorema C.0.14, basta verificar a condição da Proposição C.0.15, isto é, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma} \mathbb{Q}^{N,G}\left(\langle \pi^N_\cdot, G\rangle \in D_{\mathbb{R}}[0,T] : \left|\langle \pi^N_{\tau+\theta}, G\rangle - \langle \pi^N_\tau, G\rangle\right| > \epsilon\right) = 0,$$

onde, $\mathcal{T}_T$ é o conjunto de tempos de parada limitados por T. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{Q}^{N,G}\Big(\langle \pi^N_\cdot, G\rangle \in D([0,T],\mathbb{R}) : \left|\langle \pi^N_{\tau+\theta}, G\rangle - \langle \pi^N_\tau, G\rangle\right| > \epsilon\Big) \\
= \; & \mathbb{Q}^N\Big(\pi^N_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M}) : \left|\langle \pi^N_{\tau+\theta}, G\rangle - \langle \pi^N_\tau, G\rangle\right| > \epsilon\Big]\Big) \\
= \; & \mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|\langle \pi^N(\eta_{\tau+\theta}), G\rangle - \langle \pi^N(\eta_\tau), G\rangle\right| > \epsilon\Big).
\end{aligned}$$

Fixando $G \in C^2_0[0,1]$, e tomando

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R}^+ \times \{0,1\}^{\Lambda_N} & \to \mathbb{R} \\
(t,\eta) & \mapsto \langle \pi^N_t, G\rangle,
\end{aligned}$$

pela fórmula de Dynkin (ver o Teorema A.0.6) sabemos que

$$M^{N,G}_t = \langle \pi^N_t, G\rangle - \langle \pi^N_0, G\rangle - \int_0^t N^2 L_N \langle \pi^N_s, G\rangle ds,$$

é um martingal, com respeito à filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s : s \leq t)$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|\langle \pi^N(\eta_\tau), G\rangle - \langle \pi^N(\eta_{\tau+\theta}), G\rangle\right| > \epsilon\Big) \\
\leq \; & \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|\int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L_N \langle \pi^N_s, G\rangle ds\right| + \left|M^{N,G}_\tau - M^{N,G}_{\tau+\theta}\right| > \epsilon\right) \\
\leq \; & \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|\int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L_N \langle \pi^N_s, G\rangle ds\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\
& + \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \left|M^{N,G}_\tau - M^{N,G}_{\tau+\theta}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\
\leq \; & \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\left|\int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L_N \langle \pi^N_s, G\rangle ds\right|\right) + \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\left(M^{N,G}_\tau - M^{N,G}_{\tau+\theta}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

A última desigualdade é uma aplicação das desigualdades de Markov e

Chebychev. Então, basta mostrar que

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|\int_\tau^{\tau+\theta}N^2L_N\langle\pi_s^N,G\rangle ds\right|\right]=0 \tag{5.5}$$

e

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left(M_\tau^{N,G}-M_{\tau+\theta}^{N,G}\right)^2\right]=0. \tag{5.6}$$

Para mostrar (5.5) notemos primeiro que

$$\begin{aligned}
N^2L_N\langle\pi_s^N,G\rangle &= N^2L_N\frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N}G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_s(x)\\
&= N^2L_N\left[\frac{1}{N}G\left(\frac{1}{N}\right)\eta_s(1)+\frac{1}{N}\sum_{x=2}^{N-2}G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_s(x)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{N}G\left(\frac{N-1}{N}\right)\eta_s(N-1)\right]\\
&= NG\left(\frac{1}{N}\right)(\alpha-2\eta_s(1)+\eta_s(2))\\
&\quad+NG\left(\frac{N-1}{N}\right)(\eta_s(N-2)-2\eta_s(N-1)+\beta)\\
&\quad+N\sum_{x=2}^{N-2}G\left(\frac{x}{N}\right)(\eta_s(x-1)-2\eta_s(x)+\eta_s(x+1))\\
&= \alpha NG\left(\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1}\Delta_NG\left(\frac{x}{N}\right)\eta_s(x)+\beta NG\left(\frac{N-1}{N}\right)\\
&= \alpha NG\left(\frac{1}{N}\right)+\beta NG\left(\frac{N-1}{N}\right)+\langle\pi_t^N,\Delta_NG\rangle. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Acima, Δ_N representa o laplaciano discreto,

$$\Delta_NG\,(x)=N^2\left\{G\left(\frac{x+1}{N}\right)+G\left(\frac{x-1}{N}\right)-2G\left(\frac{x,}{N}\right)\right\},\ \forall x\in\Lambda_N.$$

Então, se $G(0)=G(1)=0$, temos pelo Teorema do valor médio os seguintes resultados:

$$\left|\alpha NG\left(\frac{1}{N}\right)\right|=\left|\alpha N\left(G\left(\frac{1}{N}\right)-G\left(\frac{0}{N}\right)\right)\right|\le\|G'\|_\infty,$$

$$\left|\beta NG\left(\frac{N-1}{N}\right)\right|=\left|\beta N\left(G\,(1)-G\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)\right|\le\|G'\|_\infty$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_NG\left(\frac{x}{N}\right)\right| &= \left|N^2\left[\left(G\left(\frac{x-1}{N}\right)-G\left(\frac{x}{N}\right)\right)-\left(G\left(\frac{x}{N}\right)-G\left(\frac{x+1}{N}\right)\right)\right]\right|\\
&\le 2\|G''\|_\infty.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades anteriores podemos concluir (5.5), isto é,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|\int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L_N\langle\pi_s^N, G\rangle ds\right|\right]\\
&\le \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|\int_\tau^{\tau+\theta} 2\|G'\|_\infty + 2\|G''\|_\infty ds\right|\right]\\
&= \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\left(2\|G'\|_\infty + 2\|G''\|_\infty\right)\int_\tau^{\tau+\theta} ds\\
&= \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\le\gamma}\left(2\|G'\|_\infty + 2\|G''\|_\infty\right)\theta\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para provar (5.6), definimos

$$
B_s^{N,G} = N^2\left[L_N\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle^2 - 2\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle L_N\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle\right]. \tag{5.8}
$$

Sabemos pelo Teorema A.0.6 que

$$
\left(M_t^{N,G}\right)^2 - \int_0^t B_s^{N,G} ds,
$$

é um martingal com respeito à filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s : s \le t)$.
Agora, se denotarmos $B_t^{N,G} := B_{t,0}^{N,G} + B_{t,-}^{N,G} + B_{t,+}^{N,G}$, correspondente a (5.8) com $L_N = L_{N,0} + L_{N,-} + L_{N,+}$, e tomando $G\left(\frac{x}{N}\right) = G_x^N$, temos que

$$
\begin{aligned}
B_{s,0}^{N,G} &= N^2\left[L_{N,0}\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle^2 - 2\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle L_{N,0}\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle\right]\\
&= N^2\left[\sum_{x=1}^{N-2}\langle\pi^N(\eta_s^{x,x+1}), G\rangle^2 - \langle\pi^N(\eta_s), G\rangle^2\right]\\
&\quad -2N^2\left[\sum_{x=1}^{N-2}\langle\pi^N(\eta_s), G\rangle\left(\langle\pi^N(\eta_s^{x,x+1}), G\rangle - \langle\pi^N(\eta_s), G\rangle\right)\right]\\
&= N^2\left[\sum_{x=1}^{N-2}\left(\langle\pi^N(\eta_s^{x,x+1}), G\rangle - \langle\pi^N(\eta_s), G\rangle\right)^2\right]\\
&= \sum_{x=1}^{N-2}\left(\sum_{y=1}^{N-1} G_y^N\eta_s^{x+1,x}(y) - G_y^N\eta_s(y)\right)^2\\
&= \sum_{x=1}^{N-2}\left(G_x^N\eta_s(x+1) - G_x^N\eta_s(x) + G_{x+1}^N\eta_s(x) - G_{x+1}^N\eta_s(x+1)\right)^2\\
&= \sum_{x=1}^{N-2}\left(\eta_s(x)\left[G_{x+1}^N - G_x^N\right] - \eta_s(x+1)\left[G_{x+1}^N - G_x^N\right]\right)^2\\
&= \sum_{x=1}^{N-2}\left(\eta_s(x) - \eta_s(x+1)\right)^2\left(G_{x+1}^N - G_x^N\right)^2\\
&\le \frac{(N-2)\|\left(G'\right)^2\|_\infty}{N^2}.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Agora, tomando $I_\alpha = \alpha(1-\eta_s(1)) + (1-\alpha)\eta_s(1)$, temos que

$$\begin{aligned}
B^{N,G}_{s,-} &= N^2\left[L_{N,-}\langle \pi^N(\eta_s), G\rangle^2 - 2\langle \pi^N(\eta_s), G\rangle L_{N,-}\langle \pi^N(\eta_s), G\rangle\right] \\
&= N^2 I_\alpha\left[\langle \pi^N(\eta_s^1), G\rangle^2 - \langle \pi^N(\eta_s), G\rangle^2\right] \\
&\quad -2N^2\langle \pi^N(\eta_s), G\rangle I_\alpha\left[\langle \pi^N(\eta_s^1), G\rangle - \langle \pi^N(\eta_s), G\rangle\right] \\
&= N^2 I_\alpha\left[\langle \pi^N(\eta_s^1), G\rangle - \langle \pi^N(\eta_s), G\rangle\right]^2 \\
&= N^2 I_\alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1} G_x^N \eta_s^1(x) - G_x^N \eta_s(y)\right)^2 \\
&= I_\alpha\left[G_1^N(1-\eta_s(1)) - G_1^N\eta_s(1)\right]^2 \\
&= I_\alpha\left(G_1^N\right)^2 \underbrace{[1-2\eta_s(1)]^2}_{=1} \\
&= G\left(\frac{1}{N}\right)^2 I_\alpha \\
&\leq \frac{\|(G')^2\|_\infty}{N^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Analogamente, temos que

$$B^{N,G}_{t,+} \leq \frac{\|(G')^2\|_\infty}{N^2}. \tag{5.11}$$

Logo como τ é um tempo de parada, temos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left(M_\tau^{N,G} - M_{\tau+\theta}^{N,G}\right)^2\right] \\
= & \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_\tau^{\tau+\theta} B_s^{N,G} ds\right] \\
\leq & \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma}\left(\frac{(N-2)\|(G')^2\|_\infty}{N^2} + 2\frac{\|(G')^2\|_\infty}{N^2}\right)\theta \\
\leq & \lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma}\left(\frac{\|(G')^2\|_\infty}{N}\right)\theta \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Daqui podemos concluir que $\{\mathbb{Q}^{N,G}\}_{N\geq 1}$ é rígida para toda a função $G \in C_0^2[0,1]$. Então, pela Proposição C.0.16 temos que $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é rígida em $D([0,T],\mathcal{M})$. □

5.2 Medidas absolutamente contínuas

Nesta seção, vamos verificar que a medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ (o ponto limite de $\{\mathbb{Q}^{N,G}\}_{N\geq 1}$) está concentrada em trajetórias $\pi_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M})$ que são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue.
Para demonstrar esse resultado precisamos do seguinte lema.

Lema 5.2.1. *Se μ é uma medida que satisfaz $|\langle\mu, G\rangle| \leq \int_0^1 |G(u)|\,du$ para toda $G \in C[0,1]$, então μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.*

Demonstração. Denotemos por λ a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Seja $F \subseteq [0,1]$ fechado, e seja, para $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \left\{u \in [0,1] : d(u,F) \leq \dfrac{1}{n}\right\}$, com d métrica usual em $\mathbb{R}$. Notemos que $F_n \searrow F$, ou seja, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F$.

Tomemos agora funções contínuas $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $0 \leq g_n \leq 1$, $g_n(u) = 1$ com $u \in F$ e $g_n(u) = 0$ com $u \in F^c$. Logo temos que

$$
\begin{aligned}
& \mu(F) = \langle\mu, \mathbf{1}_F\rangle = \langle\mu, g_n\rangle \leq \int_0^1 g_n(u)du \leq \int_0^1 \mathbf{1}_{F_n}(u)du. \\
\Rightarrow\quad & \mu(F) \leq \langle\lambda, g_n\rangle \leq \lambda(F_n), \forall n \in \mathbb{N}. \\
\Rightarrow\quad & \mu(F) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \lambda(F). \\
\therefore\quad & \mu(F) \leq \lambda(F).
\end{aligned}
$$

Assim, se $A \in [0,1]$ é tal que $\lambda(A) = 0$, então, para $\varepsilon > 0$ existem intervalos $I_1, I_2, \cdots$ fechados tais que $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$, assim,

$$
\begin{aligned}
\mu(A) \quad \leq \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \quad & = \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_n\right) \\
& \leq \quad \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_n\right) \\
& \leq \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda\left(I_n\right) \quad \leq \quad \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como ε é arbitrário, resulta que $\mu(A) = 0$. □

5.3 Caracterização dos pontos limites

Nesta seção provamos que todo ponto limite $\mathbb{Q}$ da sequência $\left\{\mathbb{Q}^N\right\}_{N\geq 1}$ está concentrado em trajetórias absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, ou seja, $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$, cuja densidade $\rho(t,u)$ é uma solução fraca da equação hidrodinâmica (4.2).

Proposição 5.3.1. *Seja $\mathbb{Q}$ um ponto limite da sequência $\left\{\mathbb{Q}^N\right\}_{N\geq 1}$. Então $\mathbb{Q}$ está concentrada em trajetórias de medidas absolutamente contínuas com repeito à medida de Lebesgue.*

Demonstração. Fixe $G \in C[0,1]$. Definimos

$$\begin{array}{rcl}\Theta : D([0,T],\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \pi^N_\cdot & \longmapsto & \Theta(\pi^N_\cdot) = \sup_{0\le t\le T}\left|\langle \pi^N_t, G\rangle\right|.\end{array}$$

Logo, como temos no máximo uma partícula por sítio, isso implica que

$$\Theta(\pi^N_\cdot) = \sup_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_t(x)\right| \le \frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N}\left|G\left(\frac{x}{N}\right)\right|. \tag{5.12}$$

Agora fixemos $\varepsilon > 0$. Como G é contínua, existe $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ se tem

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N}\left|G\left(\frac{x}{N}\right)\right| - \int_0^1 |G(u)|\,du\right| < \varepsilon. \tag{5.13}$$

Por outro lado, pela equação (5.12) sabemos que

$$\mathbb{Q}^N\left(\pi_\cdot \in D_{\mathcal{M}}[0,T] : \Theta(\pi_\cdot) \le \frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N}\left|G\left(\frac{x}{N}\right)\right|\right) = 1.$$

Logo por (5.13) e pela igualdade anterior, se tem que

$$\mathbb{Q}^N\underbrace{\left(\pi_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M}) : \Theta(\pi_\cdot) \le \frac{1}{N}\int_0^1 |G(u)| + \varepsilon\right)}_{:=F_\varepsilon} = 1.$$

Para terminar, basta mostrar que F_ε é fechado com respeito à topologia de Skorohod, pois, pelo Teorema de Portmanteau (ver [2], página 11) resulta que

$$\mathbb{Q}(F_\varepsilon) \ge \limsup_{N\to\infty}\mathbb{Q}^N(F_\varepsilon) = 1,$$

o que implica que $\mathbb{Q}(F_\varepsilon) = 1$.
De fato, F_ε é fechado na topologia de Skorohod. Para tal, tome $\{\pi^N_\cdot\}_{N\ge 1} \in F_\varepsilon$ com $\pi_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M})$ tal que $\pi^N_\cdot \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_\cdot$ na topologia de Skorohod e como $\pi_\cdot$ é contínua à direita, então $t \to |\langle \pi_t, G\rangle|$ também é contínua à direita.
Seja $s < T$, como $\pi^N_\cdot \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_\cdot$ temos $\pi^N_s \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_s$ para quase todo s (veja o Lema C.0.17). Agora, temos que existe $t_k \downarrow t$ tal que $\pi^N_{t_k} \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_{t_k}$ $\forall k \ge 1$, logo

$$|\langle \pi_{t_k}, G\rangle| \le \varepsilon + \int_0^1 |G(u)|du,\ \forall k \ge 1,$$

assim,

$$|\langle \pi_t, G\rangle| = \lim_{k\to\infty}|\langle \pi_{t_k}, G\rangle| \le \varepsilon + \int_0^1 |G(u)|du.$$

Daqui resulta que F_ε é fechado. $\square$

Para não sobrecarregar notação vamos tomar $G(t,s) := G_t(u)$ e $\rho(t,s) := \rho_t(u)$.

Teorema 5.3.2. *Seja $\mathbb{Q}$ um ponto limite da sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ e assuma, sem perda de generalidade, que $\mathbb{Q}^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \mathbb{Q}$ em. Então, $\forall G \in C_0^{1,2}(R)$*

$$\mathbb{Q}\Big(\pi_. \in D([0,T],\mathcal{M}) : \langle \rho_T, G_T\rangle - \langle \rho_0, G_0\rangle - \int_0^T \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta)G_s\rangle ds + \int_0^T \beta\partial_u G_s(1) - \alpha\partial_u G_s(0) ds = 0\Big) = 1. \quad (5.14)$$

Demonstração. Lembremos que $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$ e ρ_0 é um perfil inicial. Agora, para mostrar a igualdade (5.14) é suficiente mostrar que, $\forall \delta > 0$

$$\mathbb{Q}\left(\pi_. \in D([0,T],\mathcal{M}) : \sup_{0\leq t\leq T} \Big|\langle \rho_t, G_t\rangle - \langle \rho_0, G_0\rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta)G_s\rangle ds + \int_0^t \beta\partial_u G_s(1) - \alpha\partial_u G_s(0) ds\Big| > \delta\right) = 0.$$

Agora, pelo Teorema de Portmanteau (ver [2],página 11) e pela Proposição C.0.3 temos que a probabilidade da equação anterior está limitada por cima por

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{Q}^N\left(\pi_. \in D([0,T],\mathcal{M}) : \sup_{0\leq t\leq T} \Big|\langle \rho_t, G_t\rangle - \langle \rho_0, G_0\rangle - \int_0^t \langle \rho_s, (\partial_s + \Delta)G_s\rangle ds + \int_0^t \beta\partial_u G_s(1) - \alpha\partial_u G_s(0) ds\Big| > \delta\right).$$

Lembrando a definição de $\mathbb{Q}^N$, podemos reescrever a expressão acima como

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left(\eta_. \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\leq t\leq T} \Big|\langle \pi_t^N, G_t\rangle - \langle \pi_0^N, G_0\rangle - \int_0^t \langle \pi_s^N, (\partial_s + \Delta)G_s\rangle ds + \int_0^t \beta\partial_u G_s(1) - \alpha\partial_u G_s(0) ds\Big| > \delta\right).$$

O seguinte passo consiste em somar e subtrair $N^2 L_N \langle \pi_s^N, G(s,u)\rangle$ à expressão anterior, para limitá-la por cima pela soma de

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\le t\le T} \Big|\langle \pi_t^N, G_t\rangle - \langle \pi_0^N, G_0\rangle - \int_0^t \langle \pi_s^N, \partial_s G_s\rangle ds - \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, G_s\rangle ds\Big| > \frac{\delta}{2}\Bigg) \quad (5.15)$$

e

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}\mu^N\Bigg(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\le t\le T} \Big|\int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, G_s(u)\rangle ds - \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta G_s\rangle ds + \int_0^t \beta\partial_u G_s(1) - \alpha\partial_u G_s(0) ds\Big| > \frac{\delta}{2}\Bigg). \quad (5.16)$$

Para provar que (5.15) é igual a zero, usamos a fórmula de Dynkin novamente, e temos que

$$M_t^{N,G} = \langle \pi_t^N, G_t\rangle - \langle \pi_0^N, G_0\rangle - \int_0^t \langle \pi_s^N, (\Delta + \partial_s) G_s\rangle ds,$$

é um martingal, com respeito à filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s : s \le t)$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mu^N}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|M_t^{N,G}\right| > \frac{\delta}{2}\right) &\le \frac{4}{\delta}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|M_T^{N,G}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{\delta}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_0^T B_s^{N,G} ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{4(T\|(G')^2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}}{\delta\sqrt{N}}.
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade é dada pelo Teorema de Doob (veja o Teorema A.0.5), a igualdade seguinte é uma propriedade dos martingais (veja a Nota A.0.4), e a última desigualdade decorre de contas análogas às contas de (5.9),(5.10) e (5.11).

Daqui decorre que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|M_t^{N,G}\right| > \frac{\delta}{2}\right] = 0.$$

Para mostrar (5.16), sabemos pela equação (5.7) que

$$
\begin{aligned}
N^2 L_N \langle \pi_s^N, G \rangle &= \alpha N G_s\left(\frac{1}{N}\right) + \beta N G_s\left(\frac{N-1}{N}\right) + \langle \pi_t^N, \Delta_N G \rangle. \\
&= \alpha \nabla_N^+ G_s\,(0) - \beta \nabla_N^- G_s\,(1) + \langle \pi_t^N, \Delta_N G \rangle.
\end{aligned}
$$

Onde,

$$
\begin{aligned}
\Delta_N G_s\,(u) &= N^2 \left(G_s(u+N^{-1}) + G_s(u-N^{-1}) - 2G_s(u) \right), \\
\nabla_N^+ G_s\,(0) &= N \left(G_s\left(\frac{1}{N}\right) - G_s(0) \right), \\
\nabla_N^- G_s\,(1) &= N \left(G_s\,(1) - G_s\left(\frac{N-1}{N}\right) \right).
\end{aligned}
$$

Assim, a probabilidade que aparece na expressão (5.16) está limitada por cima pela soma de

$$
\mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta_N G_s \rangle - \langle \pi_s^N, \Delta G_s \rangle ds \Bigg| > \frac{\delta}{6} \Bigg), \quad (5.17)
$$

$$
\mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t \beta \partial_u G_s(u) - \beta \nabla_N^- G_s(1) ds \Bigg| > \frac{\delta}{6} \Bigg), \quad (5.18)
$$

e

$$
\mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg(\eta_\cdot \in D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}) : \sup_{0\le t\le T} \Bigg| \int_0^t \alpha \nabla_N^+ G_s(0) - \alpha \partial_u G_s(0) ds \Bigg| > \frac{\delta}{6} \Bigg). \quad (5.19)
$$

Logo, como assumimos que $G \in C_0^{1,2}[0,1]$ e tomando $\Delta = \partial_u^2$ temos que $\Delta_N G(s,u) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \Delta G(s,u)$ converge uniformemente em s. Analogamente, temos que $\nabla_N^+ G(s,0) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \partial_u G(s,0)$ e $\nabla_N^- G(s,1) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \partial_u G(s,1)$ convergem uniformemente em s e em u. Assim temos que as expressões (5.17),(5.18) e (5.19) se anulam, quando $N \to \infty$. □