6
Flutuações

Lembremos que no capítulo anterior demonstramos o limite hidrodinâmico para o processo $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$, com gerador $N^2 L_N$, partindo de $\{\mu^N\}_{N\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ associada a um perfil inicial com $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$. Provamos que, para cada $0 \leq t \leq T$,

$$\pi_t^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{\mathbb{P}_{\mu^N}} \rho(t,u)du,$$

onde $\rho(t,u)$ é a única solução fraca da equação (4.2).
Este resultado pode ser visto como uma Lei dos Grandes Números para a medida empírica partindo de um conjunto geral de medidas iniciais associada a um perfil. Agora, podemos perguntar sobre o Teorema do Limite Central para a medida empírica. Este é o nosso objetivo neste capítulo.

6.1
Espaço

Consideremos em $L^2[0,1]$ o operador positivo essencialmente auto-adjunto $-\Delta$ definido por,

$$-\Delta := -\frac{d_2}{dx^2}. \tag{6.1}$$

$$\mathcal{D}(-\Delta) = C_0^2[0,1] \tag{6.2}$$

As auto-funções e auto-valores do operador Δ são bem conhecidas, e é suficiente resolver a equação $f''(x) = \lambda f(x)$. Desta forma, é fácil obter os auto-valores $\lambda_n = (n\pi)^2$ e as auto-funções $e_n(u) = \sqrt{2}\sin(n\pi u)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Logo, pela Teoria de Sturm-Liouville sabemos que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ é uma base ortonormal de $L^2[0,1]$. Definamos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_k = \mathcal{D}((-\Delta)^{\frac{k}{2}})$, $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, com o produto interno

$$\langle f,g\rangle_k = (\{-\Delta\}^{\frac{k}{2}}f, \{-\Delta\}^{\frac{k}{2}}g),$$

onde $(\cdot,\cdot)$ é o produto interno de $L^2[0,1]$. Pelo Teorema espectral (ver [3]) temos que

$$\mathcal{H}_k \;=\; \{f \in L^2[0,1] : \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k}(f,e_n)^2 < \infty\},$$

e

$$\langle f,g\rangle_k \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}(n\pi)^{2k} f(e_n)g(e_n)\ .$$

Além disso, se $\mathcal{H}_{-k}$ denota o espaço dual de $\mathcal{H}_k$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{-k} &= \{f \in \mathcal{D}'(0,1) : \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} f(e_n)^2 < \infty\},\\ (f,g)_{-k} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n\pi)^{-2k} f(e_n) g(e_n).\end{aligned}$$

Fixe $k > 5/2$ e defina o campo de flutuações $Y^N \in \mathcal{H}_{-k}$, isto é, Y^N é um funcional linear contínuo e para $H \in H_k$ se tem que

$$Y^N(H) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta(x) - \rho^N(x)\right), \tag{6.3}$$

e lembre que se μ^N é a distribuição inicial, então $\rho^N(x)$ $=E_{\mu^N}[\eta(x)]$.
Seja $\rho_t^N(x)$ solução da equação semi-discreta do calor dada por

$$\begin{cases} \partial_s \rho_s^N(x) = (\Delta_N \rho_s^N)(x) & \text{para } \; x \in \Lambda_N, s \geq 0 \\ \rho_0^N(x) = \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}}[\eta_0(x)] & \text{para } \; x \in \Lambda_N \\ \rho_s^N(0) = \alpha, \; \rho_s^N(N) = \beta & \text{para } \; s \geq 0 \end{cases}.$$

Seja $Y_\cdot^N$ o campo de flutuações em $\mathcal{H}_{-k}$ definido em $H \in \mathcal{H}_k$ por

$$Y_t^N(H) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x)\right). \tag{6.4}$$

6.2 Rigidez

Seja $\mathbb{Q}^N$ a medida imagem (push-forward) de $\mathbb{P}_{\mu^N}$ induzida pela aplicação

$$\begin{array}{ccc} (D([0,T],\{0,1\}^{\Lambda_N}), \mathbb{P}_{\mu^N}) & \longrightarrow & (D([0,T],\mathcal{H}_{-k}), \mathbb{Q}^N) \\ \{\eta_t\}_{t\geq 0} & \longmapsto & \{Y_t^N\}_{t\geq 0} \end{array}$$

Agora, enunciamos o Lema de substituição que é um resultado que precisaremos mais à frente, onde vamos considerar, $\mathbb{E}_{\nu_\rho}$ a esperança com respeito a medida de probabilidade $\mathbb{P}_{\nu_\rho}$, e τ_x é a translação por x na configuração η.

Lema 6.2.1. *Seja $\Psi(\eta)$ uma função local, e $\tilde{\Psi}(\rho) = \mathbb{E}_{\nu_\rho}[\Psi]$, onde ν_ρ é a medida Bernoulli produto (ver a Definição 3.4.1)de parâmetro ρ. Seja $G(s,u)$ uma função contínua definida em $[0,T]\times[0,1]$. Então*

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\nu_\rho}\left[\int_0^T ds \left| \frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N} G(s,\frac{x}{N})\Psi(\tau_x\eta_{N^2 s}) - \int_0^1 G(s,u)\tilde{\Psi}(\rho(s,u))\,du\right|\right] = 0.$$

A prova deste lema pode ser feita seguindo as técnicas de [9]. Na Proposição 6.3.1 vamos demonstrar que a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathcal{H}_{-k})$ com respeito à topologia uniforme, para isto, precisamos dos seguintes resultados.

Lema 6.2.2. *Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\mu^N\}_{N\geq 1}$ de tal forma que (4.9) valha. Então existe uma constante finita C_1, que depende de C_0, de tal forma que para cada $n \geq 1$,*

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t(e_n)^2\Big] \;\leq\; C_1\, n^4\,(1+T)^2,$$

onde $\mathbb{E}_{\mu^N}$ é a esperança com respeito a $\mathbb{P}_{\mu^N}$.

Demonstração. Notemos que de maneira similar a (5.7), temos que

$$\begin{aligned}(\partial_t + N^2 L_N) Y_t^N(G) &= \left(\alpha - \rho_t^N(0)\right) NG\left(\frac{1}{N}\right)\\ &\quad + \left(\beta - \rho_t^N(N)\right) NG\left(\frac{N-1}{N}\right) + Y_t^N(\Delta_N G)\\ &= Y_t^N(\Delta_N G). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Assim temos, pela fórmula de Dynkin, que

$$M_t^{1,N}(G) \;=\; Y_t^N(G) \;-\; Y_0^N(G) \;-\; \int_0^t Y_s^N(\Delta_N G)ds, \tag{6.6}$$

$$M_t^{2,N}(G) \;=\; \left(M_t^{1,N}(G)\right)^2 \;-\; \int_0^t \Gamma_s^N(G)ds, \tag{6.7}$$

com

$$\Gamma_s^N(G) \;=\; N^2\left(L_N Y_s^N(G)^2 - 2Y_s^N(G) L_N Y_s^N(G)\right), \tag{6.8}$$

são martingais com respeito à filtração natural, isto é, com respeito a $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Y_s(G) : s\leq t\right)$ onde $G\in C_0^2[0,1]$.

Fazendo contas análogas às de (5.9), (5.10), (5.11) se tem que

$$\begin{aligned}\Gamma_s^N(G) &= N\sum_{x=1}^{N-2}\left(\eta_{sN^2}(x) - \eta_{sN^2}(x+1)\right)^2\left(G\left(\frac{x+1}{N}\right) - G\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2\\ &+ NG\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[\alpha(1-\eta_{sN^2}(1)) + (1-\alpha)\eta_{sN^2}(1)\right]\\ &+ NG\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[\alpha(1-\eta_{sN^2}(1)) + (1-\alpha)\eta_{sN^2}(1)\right]\\ &= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-2}\left(\eta_{sN^2}(x) - \eta_{sN^2}(x+1)\right)^2\left(\nabla_N G\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2\\ &+ \frac{1}{N}\left(\nabla_N G\left(0\right)\right)^2\left[\eta_{sN^2}(1) - \alpha\right]^2\\ &+ \frac{1}{N}\left(\nabla_N G\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)^2\left[\eta_{sN^2}(N-1) - \beta\right]^2, \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde $\nabla_N G\left(\frac{x}{N}\right)$ é a derivada discreta:

$$\nabla_N G\left(\frac{x}{N}\right) = N\left(G\left(\frac{x+1}{N}\right) - G\left(\frac{x}{N}\right)\right).$$

Fazendo expansão de Taylor em G temos que as duas últimas expressões em (6.9) são da ordem de N^{-1}, isto é,

$$\Gamma_s^N(G) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-2}(\eta_{sN^2}(x) - \eta_{sN^2}(x+1))^2\left(\nabla_N G\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2 + O(N^{-1}). \tag{6.10}$$

Pela equação (6.6) podemos escrever

$$Y_t^N(e_n) = M_t^{1,N}(e_n) + Y_0^N(e_n) + \int_0^t Y_s^N(\Delta_N e_n)ds,$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada duas vezes, temos que

$$\left(Y_t^N(e_n)\right)^2 \leq 4\left[\left(M_t^{1,N}(e_n)\right)^2 + \left(Y_0^N(e_n)\right)^2 + \left(\int_0^t Y_s^N(\Delta_N e_n)ds\right)^2\right].$$

É fácil ver, pela equação (4.9), que $\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left(Y_0^N(e_n)\right)^2\right] \leq C_1 < \infty$, uniformemente em n e N.

Agora, sabemos que $\{M_t^{1,N}(e_n)\}_{t\geq 0}$ é um martingal, logo pela desigualdade de Doob (veja o Teorema (A.0.5)), temos

$$\begin{aligned} E_{\mu^N}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(M_t^{1,N}(e_n)\right)^2\right] &\leq 4\,\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left(M_T^{1,N}(e_n)\right)^2\right] \\ &= 4\,\mathbb{E}_{\mu^N}\left[M_T^{2,N}(e_n) + \int_0^T \Gamma_s^N(e_n)ds\right] \\ &= 4\,\mathbb{E}_{\mu^N}\left[M_0^{2,N}(e_n)\right] + 4\,\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_0^T \Gamma_s^N(e_n)ds\right]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Na segunda igualdade, usamos o fato de a média de martingais ser constante. Logo, pela definição de $M_t^{2,N}(G)$ temos que $M_0^{2,N}(e_n) = 0$. Pela equação (6.10) concluímos, que (6.11) é igual a

$$4\,\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_0^T ds\,\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-2}[\eta_s(x+1) - \eta_s(x)]^2\left((\nabla_N e_n)(x/N)\right)^2\right] + O(N^{-1}).$$

Pelo Lema 6.2.1, e tomando $N \to \infty$, a última esperança converge a

$$8\int_0^T\int_0^1 \chi(\rho(t,u))(\nabla e_n(u))^2\,dudt,$$

onde $\chi(\rho) = \rho(1-\rho)$. Logo, como $(\nabla e_n(u))^2 \leq 2\pi^2 n^2$ temos que

$$8\int_0^T \int_0^1 \chi(\rho(t,u))(\nabla e_n(u))^2 \, dudt \leq C_1 T n^2.$$

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big(\int_0^t Y_s(\Delta e_n)ds\Big)^2\Big] &\leq n^4 C_1 \mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big(\int_0^t Y_s(e_n)ds\Big)^2\Big] \\ &\leq C_1\, n^4\, \mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\int_0^T Y_s(e_n)^2 ds \int_0^T 1 ds\Big].\end{aligned}$$

A primeira desigualdade é dada aplicando Δ a e_n, depois, na segunda desigualdade aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim, pela definição de Y_s, a equação anterior é igual a

$$\begin{aligned}n^4 C_1 T\Big[\int_0^T \frac{1}{N}\sum_{x\in\Lambda_N} e_n(x/N)^2 \chi(\rho_s^N(x))ds \\ + \int_0^T \frac{1}{N}\sum_{x,y\in\Lambda_N, x\neq y} e_n(x/N)e_n(y/N)\varphi_s^N(x,y)ds\Big].\end{aligned}$$

Graças à Proposição 4.3.7 a expressão anterior é limitada por $T^2 C_1 n^4$. Daí concluímos que

$$\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t(e_n)^2\Big] \leq C_1\, n^4\, (1+T)^2.$$

□

Corolário 6.2.3. *Para $k > 5/2$, temos que*

1. $\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_t\|_{-k}^2\Big] < \infty.$

2. $\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{n\geq m} Y_t(e_n)^2 n^{-2k}\Big] = 0.$

Demonstração. Para provar *1.* notemos que $k > 5/2$ implica que $2k-4 > 1$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_t\|_{-k}^2\Big] &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^{-2k}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t(e_n)^2\Big] \\ &\leq C_1\,(1+T)^2\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^{-2k}n^4 \\ &= \frac{C_1\,(1+T)^2}{\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2k-4)} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

A segunda desigualdade é dada pelo Lema 6.2.2 e como $2k-4>1$, a série converge.
Para provar *2.* fazemos um argumento similar ao anterior, isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big[\sup_{0\le t\le T}\sum_{n\ge m}Y_t(e_n)^2n^{-2k}\Big] &\le C_1\,(1+T)^2\lim_{m\to\infty}\sum_{n\ge m}^{\infty}(n\pi)^{-2k}n^4\\ &= \frac{C_1\,(1+T)^2}{\pi^{2k}}\lim_{m\to\infty}\sum_{n\ge m}^{\infty}n^{-(2k-4)}\\ &=0.\end{aligned}$$

A primeira desigualdade é dada pelo Lema 6.2.2 e como $2k-4>1$, temos que $\sum_{n\ge m}^{\infty}n^{-(2k-4)}$ vai para 0 quando $m\to\infty$, assim obtemos a última igualdade. □

Lema 6.2.4. *Para cada função G em $C_0^2([0,1])$ e cada $\varepsilon>0$,*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu^N}\left(\sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\delta}}|M_t^{1,N}(G)-M_s^{1,N}(G)|>\varepsilon\right) \;=\; 0.$$

Demonstração. Denotemos por $\omega'_\delta(M^{1,N}(G))$ o modulo de continuidade modificado, definido por

$$\omega'_\delta(M^{1,N}(G)) := \inf_{\{t_i\}}\max_{0\le i<r}\sup_{t_i\le s<t<t_{i+1}}|M_t^{1,N}(G)-M_s^{1,N}(G)|, \tag{6.12}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as partições $\{t_i\}_{0\le i<r}$ do intervalo $[0,T]$ tal que $0=t_0<t_1<\cdots<t_r=T$ com $t_i-t_{i-1}>\delta$, $\forall i\in\{1,2,\cdots r\}$.
Ora, sabemos que

$$\sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\delta}}|M_t^{1,N}(G)-M_s^{1,N}(G)|\le 2\omega'_\delta(M^{1,N}(G))+\sup_{t\in[0,T]}\Big|M_t^{1,N}(G)-M_{t^-}^{1,N}(G)\Big|. \tag{6.13}$$

Assim, pela definição de $M_t^{1,N}$ temos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\Big|M_t^{1,N}(G)-M_{t^-}^{1,N}(G)\Big| &= \sup_{t\in[0,T]}\Big|Y_t^{1,N}(G)-Y_{t^-}^{1,N}(G)\Big|\\ &= \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\Lambda_N}G\left(\frac{x}{N}\right)\{\eta_t(x)-\eta_{t^-}(x)\}\right|\\ &\le \frac{\|\nabla G\|_\infty}{N^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Para justificar a desigualdade anterior, supomos que o salto de uma partícula no tempo t ocorre no sítio $y\in\Lambda_N$. Então temos três casos possíveis: a partícula não salta, ou salta para a direita ou salta para a esquerda. Claramente, se a partícula não salta então o resultado é trivialmente 0, porque $\eta_t(x) = \eta_{-t}(x)$. No caso que a partícula salta para a direita (sem perda de generalidade), temos que $\eta_{t^-}(y) = 1$ e $\eta_{t^-}(y+1) = 0$, logo, $\eta_t(y) = 0$ e $\eta_t(y+1) = 1$. Note que a cada tempo só ocorre um salto, logo em todos os outros sítios $x \in \Lambda_N$ se tem que $\eta_t(x) = \eta_{-t}(x)$. Logo,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \Lambda_N} G\left(\frac{x}{N}\right) (\eta_t(x) - \eta_{t^-}(x)) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \left(G\left(\frac{y+1}{N}\right) - G\left(\frac{y}{N}\right) \right) \right|,$$

e pelo Teorema do valor médio, resulta a desigualdade.
Para terminar, basta provar que

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_T \\ 0 \leq \theta \leq \delta}} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(|M^{1,N}_{\tau+\theta}(G) - M^{1,N}_{\tau}(G)| > \varepsilon \right) \ = \ 0, \tag{6.15}$$

onde $\mathcal{T}_T$ denota a família de todos os tempos de parada, com respeito à filtração natural, limitados por T. Pela desigualdade de Chebychev temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\left| M^{1,N}_{\tau+\theta}(G) - M^{1,N}_{\tau}(G) \right| > \varepsilon \right) \ &\leq \ \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \Big[\left(M^{1,N}_{\tau+\theta}(G) - M^{1,N}_{\tau}(G) \right)^2 \Big] \\ &= \ \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \Big[\left(M^{1,N}_{\tau+\theta}(G) \right)^2 - \left(M^{1,N}_{\tau}(G) \right)^2 \Big], \end{aligned}$$

esta última igualdade resulta do fato de $M^{1,N}_t$ ser um martingal e τ ser um tempo de parada limitado por T. Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_T \\ 0 \leq \theta \leq \delta}} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\left(M^{1,N}_{\tau+\theta}(G) \right)^2 - \left(M^{1,N}_{\tau}(G) \right)^2 \right] \\ = \ & \lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_T \\ 0 \leq \theta \leq \delta}} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} \Gamma^N_s(G) ds \right] \\ \leq \ & \lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_T \\ 0 \leq \theta \leq \delta}} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\left(\frac{(N-2) \| (G')^2 \|_\infty}{N} + 2 \frac{\|(G')^2\|_\infty}{N} \right) \theta \right] \\ \leq \ & \lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_T \\ 0 \leq \theta \leq \delta}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\| (G')^2 \|_\infty \right) \theta \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 6.2.5. *Para cada função G em $C_0^2([0,1])$ e cada $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu^N}\left(\sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\delta}}\left|\int_s^t Y_r^N(\Delta_N G)dr\right| > \varepsilon\right) \;=\; 0\,.$$

Demonstração. Pelas desigualdades de Chebychev e Cauchy-Schwarz, utilizando a Proposição 4.3.7 temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu^N}\left(\sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\delta}}\left|\int_s^t Y_r^N(\Delta_N G)dr\right| > \varepsilon\right)\\
\le\;& \lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\frac{\delta}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_0^T \left(Y_r^N(\Delta_N G)\right)^2 dr\right]\\
\le\;& \lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\frac{\delta(N-1)C(G)T}{N\varepsilon^2}\\
=\;& 0.
\end{aligned}$$

□

Então, como um resultado dos Lemas 6.2.4, 6.2.5 e C.0.16, temos a seguinte proposição.

Lema 6.2.6. *Fixe $T > 0$ e $k > 5/2$. Então a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\ge 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathcal{H}_{-k})$ com respeito à topologia uniforme.*

6.3 Flutuações fora do equilíbrio

Na seguinte proposição vamos trabalhar com as medidas utilizadas no Capítulo 3, onde assumimos que para

$$\rho_t^N(x) = \mathbb{E}_{\nu^N}[\eta_{tN^2}(x)]$$

com $\rho_t^N(0) \;=\; \alpha, \quad \rho_t^N(N) \;=\; \beta$, e para

$$\varphi_t^N(x,y) = \mathbb{E}_{\nu^N}\left[\{\eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x)\}\{\eta_{tN^2}(y) - \rho_t^N(y)\}\right],$$

existe C_0 tal que

$$\sup_{0\le x\le N-1} N|\rho^N(x+1) - \rho^N(x)| \;\le\; C_0, \quad N\max_{\substack{x,y\in\Lambda_N\\ x<y}}|\varphi^N(x,y)| \;\le\; C_0.$$

Além disso, vamos considerar $\{T_s\}_{s\ge 0}$ o semigrupo associado ao operador $-\Delta$.

Proposição 6.3.1. *Fixe $T > 0$ e $k > 5/2$. Assuma que $Y_0^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} Y_0$, em distribuição, tal que a co-variância de Y_0 é dada por*

$$E[Y_0(H)Y_0(G)] = \ll H, G \gg,$$

para H, $G \in C_0^2[0,1]$. Então, a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathcal{H}_{-k})$ com respeito à topologia uniforme. Além disso, todos os pontos limite $\mathbb{Q}^*$ estão concentrados em trajetórias Y_t, tal que para $H \in C_0^2[0,1]$

$$Y_t(H) \;=\; Y_0(T_tH) \;+\; \tilde{M}_t(H)\;, \tag{6.16}$$

onde $\tilde{M}_t(H)$ é um martingal com respeito a filtração $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Y_s(H) : s \leq t\right)$, e com variação quadrática dada por

$$2\int_0^t \int_0^1 \chi(\rho(s,u))(T_{t-s}\nabla H)^2(u)duds,$$

onde ρ_s é solução da equação do calor definida em (4.2).

Demonstração. $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathcal{H}_{-k})$ pelo Lema (6.2.6) Agora, fixe um ponto limite $\mathbb{Q}^*$ da sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$, e fixe $t \geq 0$. Defina

$$\tilde{Y}_r^N(H) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\Lambda_N} T_{t-r}H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_{rN^2}(x) - \rho_r^N(x)\right), \tag{6.17}$$

onde $\rho_r^N(x) = E_{\mu^N}[\eta_{rN^2}(x)]$, e μ^N é a distribuição inicial.
Pela fórmula de Dynkin temos o martingal $\tilde{M}_t^N(H)$ dado por

$$\tilde{M}_t^N(H) \;=\; \tilde{Y}_t^N(H) \;-\; \tilde{Y}_0^N(H) \;-\; \int_0^t (\partial_s + N^2L_N)\tilde{Y}_s^N(H)ds.$$

Afirmamos que $\tilde{Y}_t^N(H) \;=\; \tilde{M}_t^N(H) \;+\; \tilde{Y}_0^N(H)$. De fato, pela parte *2.* do Lema 2.4.5, sabemos que $\partial_sT_sH = \Delta T_sH$, então,

$$\int_0^t (\partial_s + N^2L_N)\tilde{Y}_s^N(H)ds \;=\; \int_0^t \partial_s\tilde{Y}_s^N(TH) + N^2L_N\tilde{Y}_s^N(H)ds,$$

logo, pela definição de $\tilde{Y}_s^N(H)$ temos que a última expressão é igual a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\Lambda_N} \partial_sT_{t-s}H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_s(x) - \rho_s^N(x)\right) + \tilde{Y}_s^N(\Delta_N H)ds \\
=\;& \int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\Lambda_N} -\Delta T_{t-s}H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_s(x) - \rho_s^N(x)\right) + \tilde{Y}_s^N(\Delta H) + O(1/N)ds \\
=\;& \int_0^t -\tilde{Y}_s^N(\Delta H) + \tilde{Y}_s^N(\Delta H) + O(1/N)ds,
\end{aligned}$$

esta última expressão vai para 0 quando $N \to \infty$.
Agora, note na Definição 6.17 que $\tilde{Y}_t^N(H) = Y_t^N(H)$ e $\tilde{Y}_0^N = Y_0^N(T_t H)$. Tomando $N \to \infty$, temos que

$$Y_t^N(H) \;=\; Y_0^N(T_t H) \;+\; \tilde{M}_t^N(H).$$

Logo, novamente pela fórmula de Dynkin temos que

$$\tilde{M}_t(H))^2 - \int_0^t \Gamma_s^N(H)ds, \tag{6.18}$$

com

$$\Gamma_s^N(H) \;=\; N^2 \left(L_N \tilde{Y}_s^N(H)^2 - 2\tilde{Y}_s^N(H) L_N \tilde{Y}_s^N(H) \right), \tag{6.19}$$

é um martingal. Logo, pelo Lema 6.2.1, tomando $N \uparrow \infty$ em (6.9) temos que a equação (6.18) converge a

$$\tilde{M}_t(H) \;-\; \langle \tilde{M}(H) \rangle_t; \tag{6.20}$$

e pode-se provar que é um martingal. Note que $\langle \tilde{M}(H) \rangle_t$ é a variação quadrática do martingal $\tilde{M}_t(H)$ e é definida por

$$\langle \tilde{M}(H) \rangle_t \;=\; 2 \int_0^t \int_0^1 \chi(\rho(s,u))(\nabla T_{t-s} H)^2 \; duds.$$

□

Corolário 6.3.2. *Fixe $T > 0$ e $k > 5/2$. Denotemos por $\mathbb{Q}^N$ a medida de probabilidade no espaço $D([0,T], \mathcal{H}_{-k})$ induzida pelo campo de flutuações Y^N e $\nu_{\gamma(\cdot)}^N$ a medida Bernoulli produto associada ao perfil Lipschitz $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$ (ver a Definição 3.4.1). Então, a sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N \geq 1}$ é relativamente compacta em $D([0,T], \mathcal{H}_{-k})$ com respeito à topologia uniforme. Além disso, todos os pontos limite $\mathbb{Q}^*$ estão concentrados em trajetórias Y_t tal que, para cada $H \in H_k$ temos que*

$$Y_t(H) \;=\; Y_0(T_t H) \;+\; \tilde{M}_t(H), \tag{6.21}$$

onde $\tilde{M}_t(H)$ é um martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Y_s(H) : s \leq t\right)$, com variação quadrática dada por

$$2 \int_0^t \int_0^1 \chi(\rho(s,u))(T_{t-s} \nabla H)^2(u) duds,$$

onde ρ_s é solução da equação do calor definida em (4.2) com condição inicial γ.

Demonstração. Pela proposição anterior e como a medida Bernoulli produto $\nu_{\gamma(\cdot)}^N$ e o perfil γ satisfazem as condições ditas no início desta secção, basta mostrar que $Y_0^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} Y_0$, em distribuição, onde $Y_0^N(H)$ é dada por

$$Y_0^N(H) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right).$$

Ora, calculamos a função característica de $Y_0^N(H)$. Pela definição de função característica e pela definição de $Y_0^N(H)$, se tem que

$$\begin{aligned}
&\log\left(\mathbb{E}[\exp\left(i\theta Y_0^N(H)\right)]\right) \\
&\qquad = \log \prod_{x\in\Lambda_N} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{i\theta}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Fazendo um desenvolvimento de Taylor da exponencial temos que a expressão acima é igual a

$$\begin{aligned}
\log \prod_{x\in\Lambda_N} \mathbb{E}\Bigg[1 + \frac{i\theta}{\sqrt{N}} H\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right) \\
- \frac{\theta^2}{N} H^2\left(\frac{x}{N}\right)\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2 + O\left(N^{-3/2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Agora, sabemos que $\mathbb{E}_{\nu_\gamma^N(\cdot)}\left[\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right)\right] = 0$ e também que

$$\mathbb{E}_{\nu_\gamma^N(\cdot)}\left[\left(\eta_0(x) - \gamma\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2\right] = Var(\eta_0(x)) = \gamma(x/N)(1-\gamma(x/N)).$$

Então, aplicamos a linearidade da esperança e a propriedade dos logaritmos sobre a última expressão e obtemos

$$\sum_{x\in\Lambda_N} \log\left(1 - \frac{\theta^2}{N} H^2\left(\frac{x}{N}\right) Var(\eta_0(x)) + O\left(N^{-3/2}\right)\right).$$

Logo, usando que $log(1+x) \simeq x + O(x^2)$, a expressão acima se comporta como

$$\begin{aligned}
&\simeq \quad -\frac{\theta^2}{N} \sum_{x\in\Lambda_N} H^2\left(\frac{x}{N}\right) Var(\eta_0(x)) \\
&\to \quad -\theta^2 \int_0^1 H^2(u)\chi(\gamma(u))du.
\end{aligned}$$

Daqui resulta que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta Y_0^N(H)\right)\right] \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\left[2\int_0^1 H^2(u)\chi(\gamma(u))du\right]\right).$$

Assim, pelo Teorema de convergência de Levy (ver [7]), temos que

$$Y_0^N(H) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} Y_0(H)$$

em distribuição. Note que

$$\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\left[2\int_0^1 H^2(u)\chi(\gamma(u))du\right]\right)$$

é a função característica de uma v.a. com distribuição gaussiana com média 0 e variância $2\int_0^1 H^2(u)\chi(\gamma(u))du$. $\square$