Referências Bibliográficas

[1] R. Bartle, *The elements of integration and lebesgue measure*, John Wiley & Sons, 1995.

[2] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[3] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2010.

[4] S. Ethier e T. Kurtz, *Markov processes, characterization and convergence*, Willey, 2005.

[5] L. Evans, *L. partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[6] T. Franco, P. Gonçalves, e A. Neumann, *Phase transition of a heat equation with robin boundary conditions and exclusion process*, http://arxiv.org/abs/1210.3662, 2012.

[7] Chung . K., *A a course in probability theory*, Academic Press, 2001.

[8] I. Karatzas e Shreve.S, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 1991.

[9] C. Kipnis e C. Landim, *Scaling limits of interacting particle systems*, Springer, 1998.

[10] C. Landim, A. Milanes, e S. Olla, *Stationary and nonequilibrium fluctuations in boundary driven exclusion processes*, Markov Processes Related Fields **14** (2008).

[11] T. Liggett, *Interacting particle system*, Springer, 1968.

[12] Ladyzhenskaya. O, *The boundary value problems of mathematical physic. applied mathematica sciences, 49*, Springer-Verlag, New York, 1985.

A
Martingais e processos de Markov

Definição A.0.3. *Seja $\{M_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ uma filtração, isto é, uma sequência crescente de σ-álgebras $\subset \mathcal{F}$. Então, $\{M_t\}_{t\geq 0}$ é um martingal se, e somente se,*

1. $\mathbb{E}|M_t| < \infty, \forall t \geq 0.$
2. M_t *é* $\mathcal{F}_t$*-mensurável,* $\forall t \geq 0.$
3. $\mathbb{E}[M_t|M_s] = M_s$*,* $\forall s \geq t.$

Nota A.0.4. *É fácil ver que um martingal tem esperança constante, isto é, $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ para todo $t \geq 0$.*

Teorema A.0.5. *(**Desigualdade de Doob**)*
Seja $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ um martingal de trajetórias contínuas à direita e fixe $\delta > 0$. Então,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^p}\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right], \forall p \geq 1,$$

e

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right], \forall p \geq 1.$$

Teorema A.0.6. *(**Fórmula de Dynkin**)*
Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo de Markov com gerador L e com espaço de estados E um conjunto enumerável. Consideremos $F : \mathbb{R}^+ \times E \to \mathbb{R}$ limitada, tal que:

1. $\forall x \in E,\ F(\cdot, x) \in C^2(\mathbb{R}^+)$,
2. $\exists C < \infty$*, tal que* $\sup_{(s,x)} |\partial_s^j F(s,x)| \leq C$*, para* $j = 1, 2$.

Sejam

$$M_t^F := F(t, X_t) - F(0, X_0) - \int_0^t (\partial_s + L)F(s, X_s)ds$$

$$N_t^F := (M_t^F)^2 - \int_0^t \underbrace{LF(s, X_s)^2 - 2F(s, X_s)LF(s, X_s)ds}_{:=B_s^F}.$$

Então, $\{M_t^F\}_{t\geq 0}$ e $\{N_t^F\}_{t\geq 0}$ são martingais, com respeito à filtração natural do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$. O processo $\int_0^t B_s^F ds$ se chama variação quadrática de M_t^F.

B
O Teorema de Portmanteau

Dadas P_n, P probabilidades sobre um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{S})$, definimos a convergência fraca por $P_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{w} P$ para indicar que $\int f dP_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \int f dP$, para cada função f limitada, contínua e real no espaço S.
O Teorema de Portmanteau, fornece equivalências úteis para convergência fraca. Um conjunto $A \in \mathcal{S}$ se diz P-contínuo se a fronteira ∂A satisfaz $P(\partial A) = 0$

Teorema B.0.7. ***(Portmanteau)***
Seja P_n, P probabilidade sobre um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{S})$. Então, são equivalentes:

1. $P_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{w} P.$
2. $\limsup\limits_{n\uparrow\infty} P_n(F) \leq P(F), \forall F \subset M, F$ *fechado.*
3. $\liminf\limits_{n\uparrow\infty} P_n(A) \geq P(A), \forall A \subset M, A$ *aberto.*
4. $\limsup\limits_{n\uparrow\infty} P_n(E) = P(E)$, *para todo conjunto* $E \subset S$, P*-contínuo.*

Para a demonstração do Teorema de Portmanteau veja [2], página 12.

C
Topologia e Compacidade

C.0.1
Teorema de Prohorov

Definição C.0.8. *Um conjunto de probabilidades* Π *definidas em um espaço métrico* $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ *é chamado rígido, se dado* $\epsilon > 0$, *existe um compacto* K *tal que* $\forall P \in \Pi$ *se tem* $P(K) > 1 - \epsilon$.

Teorema C.0.9. (***Teorema de Prohorov***)
Seja Π *um conjunto de probabilidades de* $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$. *Se* Π *e rígido, então toda a sequência de probabilidades de* Π *tem uma subsequência fracamente convergente, ou seja,* Π *relativamente compacta. Além disso, se* $\mathcal{S}$ *for completo e separável, então vale o recíproco.*

Os seguintes resultados sobre o espaço $D([0,T], \mathcal{S})$ são clássicos na literatura, onde $\mathcal{S}$ é um espaço métrico completo e separável (para um estudo mais completo sobre o assunto, veja [9]).

C.0.2
Topologia e compacidade

Consideremos o espaço $D([0,T], \mathcal{S})$ de funções definidas em $[0,T]$ contínuas à direita e com limite à esquerda (càdlàg) tomando valores em $\mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é um espaço separável com uma distância δ. Pequenas mudanças no instante em que ocorre um salto pode ser muito marcante para as trajetórias tomando a distância uniforme. Para evitar isto, a distância que é utilizada em $D([0,T], \mathcal{S})$ é a distância de Skorohod.
Para definir esta distância primeiro consideremos

$$\Lambda = \{\lambda : [0,T] \to [0,T] \mid \lambda \text{ função contínua estritamente crescente}\}.$$

Além disso, se $\lambda \in \Lambda$ definimos

$$\|\lambda\| = \sup_{t \neq s} \left| \log \left(\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right|,$$

e se $\mu, \nu \in \mathcal{S}$, então definimos a distância de Skorohod por

$$d(\mu, \nu) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \|\lambda\|, \sup_{0 \leq t \leq T} \delta(\mu_t, \nu_{\lambda(t)}) \right\}.$$

Proposição C.0.10. *O espaço $D([0,T],\mathcal{S})$ munido da métrica d, é um espaço métrico completo e separável.*

Para a demonstração da proposição acima veja [2], página 115.

Lema C.0.11. *Sejam $\mu^n, \mu \in D([0,T],\mathcal{S})$. Então $\mu^n \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \mu$, na topologia de Skorohod, se, e somente se, existem reparametrizações $\lambda_n \in \Lambda$ tais que $|\lambda_n(t) - t| \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em t e $\mu^n_{\lambda(\cdot)} \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \mu$ uniformemente em $D([0,T],\mathcal{S}$*

Assim, podemos utilizar o Teorema de Prohorov C.0.1 para estender o Teorema de Arzelà-Ascoli ao conjunto $D([0,T],\mathcal{S})$ e obter uma caracterização dos conjuntos relativamente compactos. Para isto lembremos o módulo de continuidade uniforme de uma trajetória μ, definida por

$$\omega_\mu(\gamma) = \sup_{|s-t|\leq\gamma} \delta(\mu_s, \mu_t),$$

o qual precisamos modificar por

$$\omega'_\mu(\gamma) := \inf_{\{t_i\}_{0\leq i<r}} \max_{0\leq i<r} \sup_{t_i\leq s<t<t_{i+1}} \delta(\mu_s, \mu_t), \tag{C.1}$$

onde o primeiro ínfimo é tomado sobre todas as partições $\{t_i\}_{0\leq i<r}$ do intervalo $[0,T]$ tal que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = T$$

e

$$t_i - t_{i-1} > \gamma, \forall i \in \{1, 2, \cdots r\}.$$

Lema C.0.12. *$\mu : [0,T] \to \mathcal{S}$ pertence ao conjunto $D([0,T],\mathcal{S})$ se, e somente se, $\omega'_\mu(\gamma) \underset{\gamma\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$.*

Então, podemos caracterizar os conjuntos compactos em $D([0,T],\mathcal{S})$ em termos do módulo de continuidade modificado definido em (C.1).

Proposição C.0.13. *Um conjunto A de $D([0,T],\mathcal{S})$ é relativamente compacto se, e somente se,*

1. *$\{\mu_t \in \mathcal{S} : \mu \in A, t \in [0,T]\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}$.*

2. *$\lim_{\gamma\to 0} \sup_{\mu\in A} \omega'_\mu(\gamma) = 0$.*

Com este resultado temos a seguinte conclusão a partir do Teorema de Prohorov dado no Teorema C.0.1.

Teorema C.0.14. *Seja $\{P^N\}_{N\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade em $D([0,T],\mathcal{S})$. A sequência é relativamente compacta se, e somente se,*

1. *Para cada* $t \in [0,T]$ *e* $\epsilon > 0$, *existe um compacto* $K(t,\epsilon) \subset \mathcal{S}$ *tal que*

$$\sup_{N\geq 1} P^N \left(\mu \in D([0,T],\mathcal{S}) : \mu_t \notin K(t,\epsilon)\right) < \epsilon.$$

2. *Para cada* $\epsilon > 0$ *temos*

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty} P^N \Big(\mu \in D([0,T],\mathcal{S}) : \omega'_\mu(\gamma) > \epsilon\Big) = 0.$$

A condição 2. do teorema anterior fica muito difícil de verificar na prática por outro lado, não é difícil verificar que

$$\omega'_\mu(\gamma) \leq \omega_\mu(2\gamma).$$

Logo, a condição 2. pode ser substituída por
$2'$. Para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty} P^N \left(\mu \in D([0,T],\mathcal{S}) : \omega_\mu(\gamma) > \epsilon\right) = 0.$$

É fácil ver que todos os pontos limites de $\{P^N\}_{N\geq 1}$ em $D([0,T],\mathcal{S})$ que satisfazem a condição $2'$., estão concentrados em uma trajetória contínua. O seguinte resultado obtido por Aldous, nos dá uma condição suficiente para garantir a segunda condição do Teorema C.0.14.

Proposição C.0.15. *Uma sequência de medidas de probabilidade* $\{P^N\}_{N\geq 1}$ *em* $D([0,T],\mathcal{S})$ *satisfaz a condição 2. do Teorema C.0.14 se*

$$\lim_{\gamma\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_T,\theta\leq\gamma} P^N \left(\mu \in D([0,1],\mathcal{S}) : \delta(\mu_{\tau+\theta},\mu_\tau) > \epsilon\right) = 0, \forall\epsilon > 0,$$

onde $\mathcal{T}_T$ *é o conjunto de todos os tempos de parada limitados por* T.

No nosso contexto, temos que $\mathcal{S} = \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é o espaço de todas as medidas positivas em $[0,1]$ com a topologia fraca. Para provar que uma sequência $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ de medidas de probabilidade sobre $D([0,T],\mathcal{M})$ é relativamente compacta, o seguinte resultado diz que é suficiente provar as condições do Teorema C.0.14 para cada processo $\langle \pi_t^N, g_k\rangle$ onde g_k pertence a um subconjunto denso $\{g_k\}_{k\geq 1}$ denso de $C[0,1]$. Mas precisamente:

Proposição C.0.16. *Seja* $\{g_k\}_{k\geq 1}$ *uma família densa em* $C_0^2[0,1]$. *Uma sequência* $\{\mathbb{Q}^N\}_{N\geq 1}$ *de medidas de probabilidade em* $D([0,T],\mathcal{M})$ *é relativamente compacta se* $\forall k \geq 0$ *a família* $\{\mathbb{Q}^{N,g_k}\}_{N\geq 1}$ *de medidas de probabilidade* *em $D([0,T],\mathbb{R})$ tem esta propriedade, onde a medida de probabilidade $\mathbb{Q}^{N,g_k}$ é a medida de probabilidade induzida pela aplicação*

$$\mathcal{H} : (D([0,T],\mathcal{M}),\mathbb{Q}^N) \to (D([0,T],\mathbb{R}),\mathbb{Q}^{N,g_k})$$

$$\{\pi_t^N\}_{t\geq 0} \to \{\langle \pi_t^N, g_k\rangle\}_{t\geq 0}.$$

C.0.3
Continuidade e convergência em $D([0,T],\mathcal{M})$.

Lema C.0.17. *Sejam $\pi_\cdot^N, \pi_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M})$ tais que $\pi_\cdot^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_\cdot$, na topologia de Skorohod. Então $\pi_t^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{w} \pi_t$ fracamente $\forall t \in [0,T]$.*

Demonstração. Pelo Lema C.0.11 existe uma sequência de parametrizações $\{\lambda_N\}_{N\geq 1} \in [0,T]$ tal que $\lambda_N(t) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} t$ uniformemente em t, e tal que $\pi_{\lambda_N(t)}^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{w} \pi_t$ uniformemente para todo t. Também note que $\lambda_N(x) = x$ para $x \in \{0,T\}$, isto pois, λ_N é uma função crescente e bijectiva. Assim, imediatamente temos $\pi_x^N \xrightarrow[N\uparrow\infty]{w} \pi_x$.
Agora, seja $A = \{t \in [0,T] : \pi_\cdot$ é contínua em t$\}$. Note que a medida de Lebesgue em $[0,T]$ de A é 1, pois, $\pi_\cdot$ é càdlàg (tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades). Então, fixando uma $t \in A$ e tomando $\tilde{d}$ a métrica que induz a convergência fraca em $\mathcal{M}$, para $\pi, \pi^N \in \mathcal{M}$ e pela desigualdade triangular temos que

$$d(\pi_t, \pi_t^N) \leq d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) + d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi_t^N),$$

logo

$$|t - \lambda_N^{-1}(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq T} |t - \lambda_N^{-1}(t)| = \sup_{0\leq t\leq T} |t - \lambda_N(t)| \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} 0.$$

Como $\pi_\cdot$ é contínua em t obtemos, $\lim_{N\to\infty} d(\pi_t, \pi_{\lambda_N^{-1}(t)}) = 0$ e analogamente

$$d(\pi_{\lambda_N^{-1}(t)}, \pi_t^N) \leq \sup_{0\leq t\leq T} d(\pi_t, \pi_{\lambda_N(t)}^N) \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} 0.$$

□

Proposição C.0.18. *Para toda função $G \in C\left([0,T]\times[0,1]\right)$ a função $\Phi_G : D([0,T],\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Phi_G(\pi_\cdot) = \int_0^T \langle \pi_s(u), G(s,u)\rangle ds,$$

é contínua.

Demonstração. Tomemos $\pi^N_\cdot, \pi_\cdot \in D([0,T],\mathcal{M})$ tais que

$$\pi^N_\cdot \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_\cdot,$$

na topologia de Skorohod.
Pelo Lema C.0.17 temos que

$$\begin{aligned} & \pi^N_t \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \pi_t, \forall t \in [0,T] \\ \Rightarrow \quad & \langle \pi^N_t, G\rangle \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \langle \pi_t, G\rangle, \end{aligned}$$

e pelo Teorema da convergência dominada (Ver [1],página 44) temos

$$\int_0^T \langle \pi^N_t, G\rangle dt \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \int_0^T \langle \pi_t, G\rangle dt.$$

□

Lema C.0.19. *Se* $G_1, G_2, G_3 \in C[0,1]$, *a função* $\Phi_G : D([0,T],\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Phi_G(\pi_\cdot) = \sup_{0\le t\le T} \left| \langle \pi_t, G_1\rangle - \langle \pi_0, G_2\rangle + \int_0^t \langle \pi_s, G_3\rangle ds \right|,$$

é contínua.

Para a demonstração veja [6], página 9.