PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Byron Abrahan Jiménez Oviedo

Processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientadora: Prof. Ana Patrícia Carvalho Gonçalves

Rio de Janeiro
Novembro de 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Byron Abrahan Jiménez Oviedo

Processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ana Patrícia Carvalho Gonçalves
Orientadora
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Marielle Odette Christine Simon
Departamento de Matemática-PUC–Rio

Prof. Adriana Neumann de Oliveira
UFGRS

Prof. Freddy Rolando Hernandez Romero
UFF

Prof. Milton David Jara Valenzuela
IMPA

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 14 de Novembro de 2014

Byron Abrahan Jiménez Oviedo

Graduou–se em Ensino da Matemática na Universidad Nacional de Costa Rica (Heredia, Costa Rica). Depois de cursar disciplinas de Matemática pura na Universidad de Costa Rica e de trabalhar como professor na Universidad Nacional de Costa Rica, decidiu vir ao Brasil para poder fazer estudos de pós-graduação na PUC.

Ficha Catalográfica

Jiménez, Byron

Processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios / Byron Abrahan Jiménez Oviedo; orientadora: Ana Patrícia Carvalho Gonçalves. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2014.

v., 80 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográicas.

1. Matemática – Tese. 2. Cadeias de Markov. 3. Processo de exclusão simples simétrico . 4. Equação do Calor. 5. Limite Hidrodinâmico. 6. Flutuações. I. Carvalho Gonçalves, Ana Patrícia. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus pais, e aos pais da minha esposa, porque eles sempre deram apoio incondicional.

Ao professor Frederico Palmeira e a sua família, por nos fazer parte deles.

À minha orientadora Professora Patrícia Gonçalves por acreditar em mim, pelo apoio, simpatia e entusiasmo de sempre.

À Creuza por ter feito um excelente trabalho, e estar sempre atenta para ajudar.

À Unversidad Nacional de Costa Rica, em especial a escola de matemática pelo apoio.

Ao CNPq o apoio financeiro.

E sobretudo à minha esposa Katalina, por seu amor incondicional, por apoiar-me nos momentos de desânimo, por sempre acreditar em mim, pela sua paciência, por seu sorriso de cada dia que motiva a minha existência.

Resumo

Jiménez, Byron; Carvalho Gonçalves, Ana Patrícia. **Processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios**. Rio de Janeiro, 2014. 80p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta dissertação de mestrado é demonstrado o limite hidrodinâmico do processo de exclusão simples simétrico em contato com reservatórios que se denota por $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$. A dinâmica que apresenta este processo, consiste em partículas realizando passeios aleatórios a tempo contínuo no espaço $\{1, ..., N-1\}$, onde duas partículas nunca ocupam o mesmo sítio simultaneamente. Além disso, na borda esquerda as partículas são criadas com taxa α e destruídas com taxa $1-\alpha$, e na borda direita, são criadas com taxa β e destruídas com taxa $1-\beta$. O teorema principal, é o Teorema 5.0.10, que diz, que para cada $t \geq 0$, para cada função G de classe C^2 no intervalo $[0,1]$ com $G(0) = 0 = G(1)$, para cada $\delta > 0$, se η_0 tem distribuição μ^N associada a um perfil $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$, então

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\eta^N_\cdot : \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} G\left(\frac{x}{N}\right) \eta_{tN^2}(x) - \int_{[0,1]} G(u)\rho(t,u)du \right| > \delta \right) = 0,$$

onde $\mathbb{P}_{\mu^N}$ é a medida induzida pelo processo de Markov partindo de μ^N e $\rho(t,u)$ é a única solução fraca da equação do calor com condições de Dirichlet dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \Delta\rho(t,x) & \text{para} \quad x \in [0,1], t > 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ \rho(t,0) = \alpha, \ \rho(t,1) = \beta & \text{para} \quad t \in [0,\infty) \end{cases}.$$

A tese termina com o estudo das flutuações fora do equilíbrio desse processo.

Palavras–chave

Cadeias de Markov; Processo de exclusão simples simétrico; Equação do Calor; Limite Hidrodinâmico; Flutuações.

Abstract

Jiménez, Byron; Carvalho Gonçalves, Ana Patrícia(Advisor). **The symmetric simple exclusion process with reservoirs**. Rio de Janeiro, 2014. 80p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this dissertation we prove the hydrodynamic limit of the symmetric simple exclusion process with contact reservoirs, which is denoted by $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$. The dynamic of this process consists in particles performing continuous time random walks on the space $\{1, ..., N-1\}$, where two particles never occupy the same site simultaneously. At the left boundary, particles are created with rate α and annihilated with rate $1-\alpha$. On the right boundary, this is done with rates β and $1-\beta$, respectively. The main theorem is Theorem 5.0.10, that says, that for every $t \geq 0$, every function G of class $C^2[0,1]$ with $G(0) = 0 = G(1)$, for each $\delta > 0$, if η_0 has distribution μ^N associated to a profile $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$, then

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\eta^N_\cdot : \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} G\left(\frac{x}{N}\right) \eta_{tN^2}(x) - \int_{[0,1]} G(u)\rho(t,u)du \right| > \delta \right) = 0,$$

where $\mathbb{P}_{\mu^N}$ is the measure induced by the Markov process starting from μ^N and $\rho(t,u)$ is the unique solution of the heat equation with Dirichlet's boundary conditions, given by

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \Delta\rho(t,x) & \text{para} \quad x \in [0,1], t > 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ \rho(t,0) = \alpha, \ \rho(t,1) = \beta & \text{para} \quad t \in [0,\infty) \end{cases} .$$

The thesis ends with the study of nonequilibrium fluctuations for this process.

Keywords

Markov Chain; Symmetric Simple Exclusion Process; Heat Equation; Hydrodynamic Limit; Fluctuations.

Resumen

Jiménez, Byron; Carvalho Gonçalves, Ana Patrícia(Orientadora). **Proceso de exclusión simple simétrico en contacto con resevatorios**. Rio de Janeiro, 2014. 80p. Tesis de Maestría — Departmento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

En esta tesis vamos a probar el límite hidrodinámico del proceso de exclusión simple simétrico en contacto con reservatorio, que denotamos por $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$. La dinámica de este proceso consiste en partículas que realizan un paseo aleatorio en tiempo discreto en el espacio discreto $\{1, ..., N-1\}$, donde dos partículas nunca ocupan el mismo sitio simultáneamente. Además, en la frontera izquierda, las partículas son creadas con tasa α y destruidas con tasa $1-\alpha$. En la frontera derecha, son creadas con tasa β y destruidas con tasa $1-\beta$. El teorema principal es el Teorema 5.0.10, que dice que para cada $t \geq 0$, cada función G de clase $C^2[0,1]$ con $G(0) = 0 = G(1)$ y para cada $\delta > 0$, si η_0 tiene distribución μ^N asociada a un perfil $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\eta^N_\cdot : \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} G\left(\frac{x}{N}\right) \eta_{tN^2}(x) - \int_{[0,1]} G(u)\rho(t,u)du \right| > \delta \right) = 0,$$

donde $\mathbb{P}_{\mu^N}$ es una medida inducida por el proceso de Markov empezando de μ^N y $\rho(t,u)$ es la única solución de la ecuación de calor con condiciones de frontera de Dirichlet, dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \Delta\rho(t,x) & \text{para} \quad x \in [0,1], t > 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ \rho(t,0) = \alpha,\ \rho(t,1) = \beta & \text{para} \quad t \in [0,\infty) \end{cases} .$$

La tesis termina con el estudio de las fluctuaciones fuera del equilibrio del proceso.

Palabras Clave

Cadenas de Markov; Proceso de exclusión simple simétrico; Ecuación de Calor; Límite Hidrodinámico; Fluctuaciones.

Sumário