Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Yunelsy Nápoles Alvarez

Critérios de solubilidade de tipo Serrin para problemas de Dirichlet para equações de curvatura média pré-determinada em variedades

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Ricardo Sá Earp

Rio de Janeiro
Dezembro 2018

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Yunelsy Nápoles Alvarez

Critérios de solubilidade de tipo Serrin para problemas de Dirichlet para equações de curvatura média pré-determinada em variedades

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Sá Earp
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marcos Martins Alexandrino da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – USP

Profa. Cheng Xu
Instituto de Matemática e Estatística – UFF

Profa. Maria Fernanda Elbert
Instituto de Matemática – UFRJ

Profa. Barbara Nelli
Università degli Studi dell'Aquila

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Eric Joseph Toubiana
Université Paris Diderot

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de dezembro de 2018

Yunelsy Nápoles Alvarez

Possui graduação em Matemática pela *Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas*, Cuba. Possui mestrado com louvor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Atualmente desenvolve sua pesquisa nas áreas de Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Parcias.

Ficha Catalográfica

Alvarez, Yunelsy Nápoles

Critérios de solubilidade de tipo Serrin para problemas de Dirichlet para equações de curvatura média pré-determinada em variedades / Yunelsy Nápoles Alvarez; orientador: Ricardo Sá Earp. – Rio de Janeiro: PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2018.

v., 72 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Equação da curvatura média. 3. Problemas de Dirichlet. 4. EDP's quasilineares elípticas de segunda ordem. 5. Condição de Serrin. 6. Curvatura seccional. 7. Curvatura de Ricci. 8. Curvatura radial. 9. Teorema de comparação do hessiano e do laplaciano. 10. Variedades de Hadamard. 11. Espaço hiperbólico. I. Sá Earp, Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: No. 510

Às minhas estrelas Daiana e David.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador e amigo Ricardo Sá Earp por todos seus ensinamentos ao longo do mestrado e do doutorado, pela sua paciência e sua bondade infinita. Agradeço de forma especial a sua esposa Maria Magdalena, pela imensa generosidade durante todos esses anos e o carinho para com a minha família.

Agradeço a minha mãe por estar presente com o seu exemplo todos os dias da minha vida, por me ensinar que nenhum obstáculo ou dificuldade é insuperável, e por me deixar a melhor das heranças: seu amor incondicional, seu caráter, sua força, sua determinação e sua coragem.

Ao meu esposo Jorgito, por estar sempre ao meu lado, me apoiar e incentivar, por ser pai e mãe naqueles momentos em que for preciso, e por todas aquelas coisas que não preciso dizer.

Aos meus cunhados-irmãos Iveth e Yandriel, por todo o apoio e a ajuda sem os quais não tivesse conseguido concretizar este sonho. Agradeço também aos meus sogros Elizabeth e Jorge pela torcida incansável.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio, por terem contribuído à minha formação como matemático. Agradeço às pessoas da Secretaria do referido Departamento pela disposição e atenção para comigo, especialmente à querida Creuza pela ajuda incalculável durante todos esses anos.

Aos amigos Dania, Viviana, Mauricio, Orlando, Luis e Inés, pela ajuda oportuna, a amizade sincera e o companheirismo.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado. O presente trabalho também foi realizado com apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos membros da banca por terem aceito gentilmente o convite.

Resumo

Alvarez, Yunelsy Nápoles; Sá Earp, Ricardo. **Critérios de solubilidade de tipo Serrin para problemas de Dirichlet para equações de curvatura média pré-determinada em variedades**. Rio de Janeiro, 2018. 72p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta tese estabelecemos novos resultados de não existência e de existência de soluções para o problema de Dirichlet para a equação vertical da curvatura média pré-determinada em $M \times \mathbb{R}$, onde M é uma variedade Riemanniana completa de dimensão n. É bem conhecido que uma condição necessária para a solubilidade deste problema em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$ com certa regularidade é a *condição de Serrin*. Investigamos esse fato no contexto $M \times \mathbb{R}$ considerando uma ampla classe de variedades dentro da qual estão as variedades de Hadamard e as variedades cujas curvaturas seccionais estão limitadas superiormente por uma constante positiva. Precisamente, dados um domínio limitado Ω em M e uma função $H = H(x, z)$ contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ e não decrescente na variável z, mostramos que se a *condição de Serrin forte*, $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \sup\limits_{z \in \mathbb{R}} |H(y, z)| \ \forall\, y \in \partial\Omega$, não é satisfeita, então existem dados no bordo para os quais o referido problema não tem solução. Ressaltamos que $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ é a curvatura média de $\partial\Omega$ em M. Considerando que $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, estabelecemos um resultado de existência se H e ∇H satisfazem uma relação envolvendo a curvatura de Ricci de M, onde ∇ é o gradiente Riemanniano. Estabelecemos também um resultado de existência no caso em que $M = \mathbb{H}^n$ e $\sup\limits_{\Omega \times \mathbb{R}} |H(x, z)| \leqslant \frac{n-1}{n}$. Nossos resultados generalizam resultados clássicos de Jenkins-Serrin e Serrin para o espaço Euclidiano, bem como resultados de Spruck no contexto $M \times \mathbb{R}$. Por exemplo, concluímos que *se* $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ *é um domínio limitado cuja fronteira é de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$*, então o problema de Dirichlet para a equação vertical da curvatura média em* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *tem solução única para qualquer constante* H *e quaisquer dados no bordo contínuos se, e somente se,* $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} \geqslant n\,|H|$ *em* $\partial\Omega$.

Palavras–chave

Equação da curvatura média; problemas de Dirichlet; EDP's quasilineares elípticas de segunda ordem; condição de Serrin; curvatura seccional; curvatura de Ricci; curvatura radial; teorema de comparação do hessiano e do laplaciano; variedades de Hadamard; espaço hiperbólico.

Abstract

Alvarez, Yunelsy Nápoles; Sá Earp, Ricardo (Advisor). **Serrin type solvability criteria for Dirichlet problems for prescribed mean curvature equations in manifolds**. Rio de Janeiro, 2018. 72p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this thesis we establish new non-existence and existence results of solutions for the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature vertical equation in $M \times \mathbb{R}$, where M is a complete Riemannian manifold of dimension n. It is well known that a necessary condition for the solvability of this problem in bounded domains of $\mathbb{R}^n$ with certain regularity is the *Serrin condition*. We investigated this fact in the product $M \times \mathbb{R}$ considering a large class of Riemannian manifolds within which are the Hadamard manifolds and manifolds whose sectional curvature is bounded above by a positive constant. Precisely, given a bounded domain Ω in M and a function $H = H(x, z)$ continuous in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ and non-decreasing in the variable z, we show that if the *strong Serrin condition* $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} |H(y,z)| \ \ \forall\ y \in \partial\Omega$ fails, then there exists boundary data for which the aforementioned problem has no possible solution. We highlight that $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ is the mean curvature of $\partial\Omega$ in M. Considering that $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, we establish an existence result if H and ∇H satisfy a relation involving the Ricci curvature of M, where ∇ is the Riemannian gradient. We also establish an existence result in the case where $M = \mathbb{H}^n$ and $\sup\limits_{\Omega\times\mathbb{R}} |H(x,z)| \leqslant \frac{n-1}{n}$. Our results generalize classical results of Jenkins-Serrin and of Serrin for the Euclidean ambient space, as well as Spruck's results in the $M \times \mathbb{R}$ context. For instance, we conclude that *if $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ is a bounded domain whose boundary is of class $\mathscr{C}^{2,\alpha}$, then the Dirichlet problem for the vertical mean curvature equation in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ has a unique solution for every constant H and for arbitrary continuous boundary data if, and only if, $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} \geqslant n\,|H|$ in $\partial\Omega$.*

Keywords

Mean curvature equation; Dirichlet problems; second order quasilinear elliptic PDE's; Serrin condition; sectional curvature; Ricci curvature; radial curvature; Hessian and Laplacian comparison theorems; Hadamard manifolds; hyperbolic space.

Sumário

Lista de Símbolos

M	variedade Riemanniana completa de dimensão n, 13
$\mathcal{M}$	operador mínimo para gráficos verticais em $M \times \mathbb{R}$, 13
σ_{ij}	métrica em M, 13
$\nabla u(x)$	gradiente de u em M, 13
$\|\nabla u(x)\|$	norma de ∇u em M, 13
W	$W_u = \sqrt{1 + \|\nabla u(x)\|}$, 13
$\partial_i u$	$\frac{\partial u}{\partial x_i}$, 13
$\partial_{ij} u$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, 13
u^i	$\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij} \partial_j u$, coordenadas de ∇u, 13
$\nabla^2 u(x)$	Hessiano de u em x, 13
$\nabla^2_{ij} u(x)$	$\nabla^2 u(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, 13
$\mathcal{H}_\Sigma$	curvatura média de uma hipersuperfície Σ, 11
Ricc_x	curvatura de Ricci de M em x, 13
$\nabla_x H$	gradiente de H em M, 16
$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{Q} u = \mathcal{M} u - nH(x,u)W^3$, 18
$\gamma_y(t)$	$\exp_y(tN_y)$, N normal a uma hipersuperfície Σ em y, 19
$\mathrm{cut}(p)$	*cut locus* de p, 20
$\rho(x)$	$\mathrm{dist}(x, y_0)$, onde $y_0 \in M$, 22
H_t	curvatura média de uma hipersuperfície Σ_t paralela a Σ, 28

Reserve o seu direito de pensar, mesmo pensar errado é melhor do que não pensar

Hipátia de Alexandria

1
Introdução

Nós estudamos um problema clássico em Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Parciais. Para melhor explicar nossos objetivos, daremos neste primeiro momento um breve resumo do contexto histórico do problema.

Em 1910, Bernstein [1] mostrou que o problema de Dirichlet para a equação mínima em $\mathbb{R}^2$,

$$\left(1+u_y^2\right)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}\left(1+u_x^2\right)u_{yy}=0, \tag{1.1}$$

tem solução em discos para quaisquer dados no bordo contínuos. Ele também percebeu a possibilidade de substituir o disco por qualquer domínio analítico e convexo (veja [1, p. 236]). Provas deste fato foram dadas de forma independente em 1930 por Douglas [2] e Radó [3, p. 795], este último garantiu a unicidade da solução. Uma contribuição importante foi dada em 1965 por Finn [4] quando mostrou que para cada domínio não convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ podemos encontrar dados no bordo para os quais o problema de Dirichlet para a equação (1.1) não tem solução. Como consequência do seu trabalho e dos trabalhos desenvolvidos por Douglas e Radó, Finn, seguindo uma sugestão de Osserman, estabeleceu o seguinte teorema *sharp*:

Teorema de Douglas-Radó-Finn ([4, T. 4a p. 146]). *A equação* (1.1) *admite solução em* Ω *para quaisquer dados no bordo contínuo se, e somente se,* Ω *é convexo.*

Em 1966, Jenkins e Serrin [5] estudaram o problema de Dirichlet em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para a equação das hipersuperfícies mínimas

$$\mathcal{M}u := \left(\left(1+\|\nabla u\|^2\right)\delta_{ij}-\partial_i u\partial_j u\right)\partial_{ij}u=0. \tag{1.2}$$

Eles provaram que quando $n>2$ a condição que generaliza o caso $n=2$ é que $\mathcal{H}_{\partial\Omega}\geqslant 0$, onde $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ denota a curvatura média de $\partial\Omega$. Neste caso dizemos que Ω é um domínio *mean convex*. Mais especificamente, eles estabeleceram o seguinte resultado:

Teorema *sharp* de Jenkins-Serrin ([5, T. 1 p. 171]). *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^n$ *cuja fronteira é de classe* $\mathscr{C}^2$*. Então o problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas em* Ω *tem solução para quaisquer dados no bordo de classe* $\mathscr{C}^2$ *se, e somente se, a curvatura média de* $\partial\Omega$ *é não negativa.*

Isto significa que *mean convexity* é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução de (1.2) em Ω, contínua até o bordo, tomando valores no bordo de classe $\mathscr{C}^2$ arbitrários. A estimativa interior do gradiente para a equação da curvatura média obtida por Bombieri-De Giorgi-Miranda [6] permite que as soluções de (1.2) existam para valores no bordo contínuos.

Mais tarde, Serrin [7] centrou a sua atenção no estudo de problemas de Dirichlet para uma classe de equações elípticas mais gerais dentro da qual se encontra a equação da curvatura média:

$$\mathcal{M}u = nH(x). \tag{1.3}$$

Para sermos mais claros, ele obteve o seguinte teorema:

Teorema de Serrin ([7, T. p. 484]). *Seja* Ω *um domínio limitado do espaço Euclidiano n-dimensional, cuja fronteira é de classe* $\mathscr{C}^2$*. Seja* $H(x)$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *na clausura de* Ω*, e suponha que*

$$\|\nabla H(x)\| \leqslant \frac{n}{n-1}(H(x))^2 \ \forall\ x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Então o problema de Dirichlet em Ω *para a equação* (1.3) *tem solução para quaisquer dados no bordo de classe* $\mathscr{C}^2$ *se, e somente se,*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n\,|H(y)| \ \ \forall\ y \in \partial\Omega. \tag{1.5}$$

A solução é única se existe.

Como mencionado, isto significa que para qualquer $\varphi \in \mathscr{C}^2(\partial\Omega)$ existe uma única solução $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ de (1.3) tomando os valores φ em $\partial\Omega$. A condição (1.5) é conhecida como condição de Serrin. Como consequência, segue o seguinte resultado *sharp*:

Teorema *sharp* de Serrin ([7, p. 416]). *Seja* Ω *um domínio limitado no espaço Euclidiano n-dimensional, cuja fronteira é de classe* $\mathscr{C}^2$*. Então o problema de Dirichlet para a equação da curvatura média tem solução única para qualquer constante* H *e quaisquer dados no bordo de classe* $\mathscr{C}^2$ *se, e somente se,* $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} \geqslant n\,|H|$ *em* $\partial\Omega$*.*

Fora do contexto Euclidiano também tem sido estudados problemas de Dirichlet para equações cujas soluções descrevem hipersuperfícies de curvatura média pré-determinada.

Nesta tese estudamos o problema de Dirichlet em domínios limitados de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão $n \geqslant 2$ para a equação

$$\mathcal{M}u := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\right) = nH(x,u), \tag{1.6}$$

onde H é uma função não decrescente na variável z e as quantidades envolvidas estão calculadas com respeito à métrica de M. A equação (1.6) é a equação da curvatura média pré-determinada $H(x,z)$ para gráficos verticais no produto $M \times \mathbb{R}$. Denotando por $W = \sqrt{1+\|\nabla u(x)\|^2}$ segue que, num sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ em M,

$$\mathcal{M}u = \frac{1}{W}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\right)\nabla^2_{ij}u, \tag{1.7}$$

onde (σ^{ij}) é a inversa da métrica (σ_{ij}) de M, $u^i = \sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}\partial_j u$ são as coordenadas de ∇u e $\nabla^2_{ij}u(x) = \nabla^2\, u(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

Neste contexto existem apenas dois resultados de *existência* de tipo Serrin. Num trabalho pioneiro Joel Spruck [8] estabeleceu vários resultados de existência para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = nH \text{ em } \Omega, \\ \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Destacamos aqui o seguinte resultado:

Teorema de Spruck ([8, T 1.4 p. 787]). *Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado cuja fronteira é de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Seja $H \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo*

$$\operatorname{Ricc}_M \geqslant -\frac{n^2}{n-1}H^2 \ \textit{em}\ \Omega, \tag{1.9}$$

e

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant nH, \forall\ y \in \partial\Omega. \tag{1.10}$$

Então o problema de Dirichlet (1.8) *tem solução única para quaisquer dados no bordo φ contínuos.*

Ressaltamos que $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ denota a curvatura média de $\partial\Omega$ em M.

O outro resultado de existência de tipo Serrin que encontramos se deve a Aiolfi-Ripoll-Soret [9] considerando o problema de Dirichlet para a equação vertical das hipersuperfícies mínimas em $M \times \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = 0 \text{ em } \Omega, \\ \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Como consequência dos seus resultados segue:

Teorema de Aiolfi-Ripoll-Soret ([9, T. 1 p. 72]). *Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado cuja fronteira é de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Se Ω é mean convex então o problema de Dirichlet tem solução para quaisquer dados no bordo φ contínuos.*

Queremos apontar primeiramente que nesses trabalhos não se investiga se a condição de Serrin é *sharp*. Segundo a nossa pesquisa bibliográfica, existe somente um resultado de não existência no contexto $M \times \mathbb{R}$ obtido por Miriam Telichevesky [10], mesmo para domínios não limitados de M. No caso de domínios limitados o resultado é o seguinte:

Teorema de não existência de M. Telichevesky ([10, T. 6 p. 246]). *Sejam M é uma variedade de Hadamard cuja curvatura seccional está limitada superiormente por -1 e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $\mathscr{C}^2$. Se existe $y_0 \in \partial\Omega$ tal que $\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < 0$, então existe $\varphi \in \mathscr{C}^0(\partial\Omega)$ tal que o problema* (1.11) *não tem solução.*

Nesta tese nós generalizamos o teorema de não existência de M. Telichevesky. Especificamente, mostramos que, dada uma função $H(x,z)$ contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, não decrescente na variável z e que não muda de sinal, se a *condição de Serrin forte*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} |H(y,z)| \ \ \forall\, y \in \partial\Omega \tag{1.12}$$

não é satisfeita, então existem dados sobre o bordo para os quais o problema de Dirichlet para a equação (1.6) não tem solução em uma ampla classe de variedades Riemannianas. Como exemplos ressaltamos o teorema 2.5 que se refere às variedades de Cartan-Hadamard, e o teorema 2.6 relativo às variedades cujas curvaturas seccionais estão limitadas superiormente por uma constante positiva.

Como consequência imediatas desses resultados ressaltamos os seguintes. Combinando o teorema 2.6 com o teorema de Spruck deduz-se:

Teorema *sharp* de tipo Serrin. *Seja M uma variedade compacta, simplesmente conexa e cuja curvatura seccional K satisfaz $\frac{1}{4}K_0 < K \leqslant K_0$ onde $K_0 > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio com $\operatorname{diam}(\Omega) < \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ e $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Então o problema de Dirichlet para a equação vertical da curvatura média tem solução para qualquer constante H e quaisquer dados no bordo contínuos se, e somente se, $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} \geqslant n\,|H|$.*

Se combinamos o nosso teorema de não existência 2.5 com o teorema de existência de Aiolfi-Ripoll-Soret, segue que o teorema *sharp* de Jenkins-Serrin se estende a cada variedade de Cartan-Hadamard na classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$:

Teorema *sharp* de tipo Jenkins-Serrin. *Seja M uma variedade de Cartan-Hadamard e $\Omega \subset M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Então o problema de Dirichlet para a equação vertical das hipersuperfícies mínimas em Ω tem solução única para quaisquer dados no bordo contínuos se, e somente se, Ω é mean convex.*

Observamos que o teorema anterior já valia em variedades de Hadamard com curvatura seccional limitada superiormente por -1 como consequência direta da combinação do teorema de Aiolfi-Ripoll-Soret com o teorema de não existência de M. Telichevesky.

Notamos também que não foi estabelecido um teorema análogo ao teorema *sharp* de Serrin nas variedades de Hadamard. Lembramos que a condição de Serrin é suficiente para a solubilidade do problema nestas variedades quando H satisfaz a condição (1.9) no teorema de Spruck. Por exemplo, no caso em que $M = \mathbb{H}^n$, (1.9) é satisfeita quando $H \geqslant \frac{n-1}{n}$. No caso oposto $0 < H < \frac{n-1}{n}$, Spruck percebeu a possibilidade de estabelecer um teorema de existência se $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} > nH$. Precisamente Spruck obteve o seguinte resultado:

Teorema de Spruck em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ([8, T 5.4 p. 797]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado cuja fronteira é de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Seja H uma constante não negativa e assuma que $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant nH$ (com desigualdade estrita se $0 < H < \frac{n-1}{n}$). Então o problema de Dirichlet* (1.8) *tem solução para quaisquer dados no bordo φ contínuos.*

Porém, essa restrição sobre a condição de Serrin não permite estabelecer um critério de solubilidade de tipo Serrin para qualquer constante H diretamente.

Na tese estabelecemos também o teorema de existência 4.4 considerando funções $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ que estende o teorema de Spruck em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ no caso em que $0 < H < \frac{n-1}{n}$. Da combinação desse resultado de existência com o nosso teorema de não existência 2.5 obtemos o primeiro critério de solubilidade de tipo Serrin neste contexto para H não necessariamente constante:

Teorema 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Seja $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $\partial_z H \geqslant 0$ e $0 \leqslant H \leqslant \frac{n-1}{n}$ em $\Omega \times \mathbb{R}$. Então o problema de Dirichlet para a equação* (1.6) *tem solução única $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cada $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ se, e somente se, vale a condição de Serrin forte* (1.12).

Como consequência segue então o seguinte resultado:

Teorema *sharp* de tipo Serrin em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Então o problema de Dirichlet para a equação* *vertical da curvatura média tem solução única para qualquer constante H e quaisquer dados no bordo contínuos se, e somente se, $(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega} \geqslant n\,|H|$.*

Queremos destacar também que até a presente tese, não encontramos na literatura nenhum resultado generalizando a parte de existência no teorema de Serrin para H não necessariamente constante. Observamos que a condição (1.9) no teorema de Spruck, tem uma função análoga neste contexto à condição (1.4) no teorema de Serrin para H constante.

Nós estendemos na tese o teorema de Spruck assumindo que $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}$ satisfaz a condição

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} (H(x,z))^2\,,\ \forall\, x \in \Omega, \tag{1.13}$$

onde ∇ é o gradiente Riemanniano. A condição (1.13) significa que, em cada x de Ω, a curvatura de Ricci está limitada inferiormente por

$$f(x) = n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} (H(x,z))^2\,.$$

A ideia da condição (1.13) decorre do lema 3.1 puramente geométrico. Mais precisamente, estabelecemos o teorema de existência 4.1. Combinando esse resultado de existência com o nosso teorema de não existência 2.5 obtemos o seguinte critério de solubilidade de tipo Serrin:

Teorema 1.2. *Seja M uma variedade de Cartan-Hadamard e $\Omega \subset M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Seja $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função que não muda de sinal em Ω satisfazendo $\partial_z H \geqslant 0$ e*

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} (H(x,z))^2\,,\ \forall\, x \in \Omega.$$

Então o problema de Dirichlet para a equação (1.6) *tem uma única solução $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cada $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ se, e somente se, vale a condição de Serrin forte* (1.12)*.*

Observamos também que este resultado generaliza na classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ o teorema de Serrin antes mencionado.

Também temos um critério de solubilidade em algumas variedades de curvatura seccional positiva usando o teorema 2.6 ao invés do teorema 2.5:

Teorema 1.3. *Seja M uma variedade compacta, simplesmente conexa e cuja curvatura seccional K satisfaz $\frac{1}{4}K_0 < K \leqslant K_0$ com $K_0 > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio com $\mathrm{diam}(\Omega) < \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ e $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Seja $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *uma função que não muda de sinal em* Ω *satisfazendo* $\partial_z H \geqslant 0$ *e*

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} \left(H(x,z)\right)^2, \ \forall\ x \in \Omega.$$

Então o problema de Dirichlet para a equação (1.6) *tem solução única* $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para cada* $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *se, e somente se, vale a condição de Serrin forte* (1.12).

Ressaltamos que, segundo a nossa pesquisa bibliográfica, existe na literatura somente um trabalho anterior ao nosso no qual se estabelecem critérios de solubilidade de tipo Serrin fora do contexto Euclidiano para H não necessariamente zero. Especificamente, Elias M. Guio [11] na sua tese de doutorado defendida na PUC-Rio, considerou um domínio limitado Ω de um hiperplano totalmente geodésico P de $\mathbb{H}^{n+1}$ (modelo do semiespaço superior) e estudou o problema de Dirichlet para a equação da curvatura média pré-determinada $H = H(x)$ para gráficos horizontais sobre Ω, isto é, hipersuperfícies que intersectam no máximo uma vez os horociclos horizontais ortogonais a Ω. Especificamente, denotando por C o cilindro hiperbólico gerado por esses horociclos ao longo de $\partial\Omega$ e por $\mathcal{H}_C$ a curvatura média hiperbólica de C, Elias M. Guio mostrou que se $H \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ satisfaz $0 \leqslant H \leqslant 1$ em $\overline{\Omega}$ e a condição de tipo Serrin

$$\mathcal{H}_C(y) \geqslant |H(y)| \ \ \forall\ y \in \partial\Omega, \tag{1.14}$$

então o referido problema de Dirichlet tem solução para quaisquer dados no bordo suficientemente suaves, e se (1.14) não é satisfeita, então existem dados suaves sobre $\partial\Omega$ para os quais este problema não tem solução.

Elias M. Guio obteve também um resultado *sharp* de tipo Serrin mostrando que (1.14) é uma condição necessária e suficiente para que o problema considerado tenha solução para qualquer constante H e quaisquer valores no bordo suficientemente suave. Ressaltamos que este trabalho foi muito útil para o desenvolvimento dos resultados apresentados.

A tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos os resultados de não existência. No capítulo 3 estabelecemos as estimativas a priori que permitem demonstrar os resultados de existência expostos no capítulo 4. Para facilitar a leitura encontram-se nos apêndices A e B resultados clássicos de EDP e Geometria Diferencial. No apêndice C obtém-se a expressão em coordenadas (1.7) e algumas fórmulas que usamos ao longo do texto.

2
Resultados de não existência

Lembramos que M indicará uma variedade Riemanniana completa de dimensão n. Seja $\Omega \subset M$ domínio limitado e H uma função contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. O objetivo deste capítulo é mostrar que se a condição de Serrin forte

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \sup_{z \in \mathbb{R}} |H(y,z)| \ \ \forall\, y \in \partial\Omega \tag{2.1}$$

não é satisfeita, então existem dados no bordo para os quais não existe nenhuma função $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = nH(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dada uma função $H(x,z)$ denotaremos por $\mathfrak{Q}$ o operador definido por

$$\mathfrak{Q}u = \mathcal{M}u - nH(x,u).$$

A seguinte proposição fundamental para os nossos propósitos tem suas raízes no trabalho de Finn [4, L p. 139] quando estabeleceu o seu resultado de não existência de soluções da equação mínima em domínios não convexos em $\mathbb{R}^2$. Devido a que o ponto crucial é o princípio do máximo este resultado foi estendido por Jenkins-Serrin [5, P. III p. 182] para o caso da equação mínima em $\mathbb{R}^n$, e posteriormente por Serrin [7, T. 1 p. 459] para operadores quasilineares elípticos mais gerais (veja também [12, T 14.10 p 347]). Fora do contexto Euclidiano temos também o trabalho de Miriam Telichevesky [10, L. 11 p. 250] para o caso mínimo em variedades Riemanniana. Para formalizar o resultado seguiremos as ideias dos trabalhos precedentes.

Proposição 2.1. *Seja $\Omega \in M$ um domínio limitado. Seja Γ' uma porção relativamente aberta de $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$. Seja $H(x,z) \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função não decrescente na variável z. Sejam $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\Omega \cup \Gamma') \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$*

e $v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}u \geqslant \mathfrak{Q}v & \text{em } \Omega, \\ u \leqslant v & \text{em } \partial\Omega \setminus \Gamma', \\ \frac{\partial v}{\partial N} = -\infty & \text{em } \Gamma', \end{cases}$$

onde N *é o campo normal unitário a* Γ' *interior a* Ω*. Sob estas condições* $u \leqslant v$ *em* Γ'*. Consequentemente* $u \leqslant v$ *em* Ω*.*

Demonstração. Vamos supor, por contradição, que $m = \max\limits_{\Gamma'}(u-v) > 0$. Dessa forma, $u \leqslant v + m$ em Γ'. Por conseguinte $u \leqslant v + m$ em $\partial\Omega$ já que $u \leqslant v$ em $\partial\Omega \setminus \Gamma'$ por hipótese. Além disso, como a função H é não decrescente em z e $m > 0$, resulta

$$\mathfrak{Q}(v+m) = \mathcal{M}(v+m) - nH(x, v+m) \leqslant \mathcal{M}v - nH(x,v) = \mathfrak{Q}v \leqslant \mathfrak{Q}u.$$

Como consequência do princípio do máximo (teorema A.2) $u \leqslant v + m$ em Ω. Seja $y_0 \in \Gamma'$ tal que $m = u(y_0) - v(y_0)$. Seja $\gamma_{y_0} = \exp_{y_0}(tN_{y_0})$, onde $t > 0$ é suficientemente perto de 0. Então

$$u(\gamma_{y_0}(t)) - u(y_0) \leqslant (v\left(\gamma_{y_0}(t)\right) + m) - (v(y_0) + m) = v(\gamma_{y_0}(t)) - v(y_0).$$

Dividindo por t e passando ao limite quando $t \to 0$ segue que $\frac{\partial u}{\partial N} \leqslant -\infty$, o que é uma contradição pois $u \in \mathscr{C}^1(\Gamma')$. Logo, $u \leqslant v$ em Γ'. Em decorrência do princípio do máximo $u \leqslant v$ em Ω. ■

O seguinte lema é a peça fundamental do capítulo. Nesse lema estabelecemos uma estimativa a priori da altura para qualquer solução da equação $\mathcal{M}u = nH(x,u)$ em Ω nos pontos de $\partial\Omega$ nos quais a condição de Serrin forte (2.1) não for satisfeita. Precisamos da seguinte definição.

Definição 2.1. Dada uma geodésica radial $\beta(t)$ parametrizada pelo comprimento de arco, dizemos que *as curvaturas radiais ao longo de* β *estão limitadas superiormente por* K_0 se $K_{\beta(t)}(\beta'(t), X) \leqslant K_0$, para cada $X \in T_{\beta(t)}M$ satisfazendo $\langle X, \beta'(t)\rangle = 0$ e $\|X\| = 1$, onde K é a curvatura seccional em M. ▼

Lema 2.2. *Sejam* $\Omega \subset M$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega$ *de classe* $\mathscr{C}^2$*. Sejam* $H \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *uma função não negativa e não decrescente em* z*, e* $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $\mathcal{M}u = nH(x,u)$*. Suponha que existe* $y_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < nH(y_0, k) \tag{2.3}$$

para algum $k \in \mathbb{R}$. Assuma que $\mathrm{cut}(y_0) \cap \Omega = \emptyset$ *e que as curvaturas radiais ao longo das geodésicas radiais que partem de y_0 e interceptam Ω estão limitadas superiormente por K_0 sendo que:*

(a) $K_0 \leqslant 0$, *ou*

(b) $K_0 > 0$ *e* $\mathrm{dist}(y_0, x) < \dfrac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ dependendo apenas de ε, de $\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0)$, da geometria de Ω e do módulo de continuidade de $H(x,k)$ em y_0, tal que

$$u(y_0) < \max\left\{k, \sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y_0)} u\right\} + \varepsilon. \tag{2.4}$$

Demonstração. Para achar a estimativa a prova será dividida em duas etapas. Na primeira etapa acharemos uma estimativa para $u(y_0)$ dependendo de k e de $\sup\limits_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u$ para certo a não dependendo de u. Posteriormente, na segunda etapa, estimaremos $\sup\limits_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u$ em função dos valores de u em $\partial\Omega \setminus B_a(y_0)$. Para finalizar diminuímos a em função de ε para obter a estimativa desejada.

Etapa 1.

Observemos primeiramente que da hipótese (2.3) decorre que existe $\nu > 0$ tal que

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < nH(y_0, k) - 4\nu. \tag{2.5}$$

Seja R_1 tal que $\partial B_{R_1}(y_0) \cap \Omega$ seja conexo e

$$|H(x,k) - H(y_0,k)| < \frac{\nu}{n}, \ \forall\, x \in B_{R_1}(y_0) \cap \Omega. \tag{2.6}$$

Isso segue do fato de $H(x,k)$ ser contínua em $\overline{\Omega}$.

Note também que podemos construir uma hipersuperfície mergulhada e orientada S, tangente a $\partial\Omega$ em y_0 e cuja curvatura média calculada com respeito ao vetor normal que aponta para o interior de Ω em y_0 satisfaz

$$\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < \mathcal{H}_S(y_0) < \mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) + \frac{\nu}{(n-1)}. \tag{2.7}$$

Note que estamos orientando S de forma tal que o seu campo normal N coincida com o campo normal a $\partial\Omega$ interior a Ω em y_0. Sabemos que para algum $\tau > 0$ a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Phi_t: & S & \longrightarrow & \Omega \\ & y & \longmapsto & \exp^{\perp}(y, tN_y) \end{array}$$

é um difeomorfismo para cada $0 \leqslant t < \tau$ (veja proposição B.7). Ou seja, $S_t := \Phi_t(S)$ é paralela a S para cada $0 \leqslant t < \tau$.

Consideremos a função distância $d(x) = \operatorname{dist}(x, S)$. Seja $0 < R_2 < \min\{\tau, R_1\}$ tal que

$$|\Delta d(x) - \Delta d(y_0)| < \nu, \ \forall\, x \in B_{R_2}(y_0) \cap \Omega. \tag{2.8}$$

Escolhemos $a < R_2$. Note que a, assim definido, depende apenas do módulo de continuidade de $H(x,k)$, de $\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0)$ e da geometria de Ω.

Dado $0 < \epsilon < a$, definimos

$$\Omega_\epsilon = \{x \in B_a(y_0) \cap \Omega; d(x) > \epsilon\}.$$

Seja $\phi \in \mathscr{C}^2(\epsilon, a)$ satisfazendo

P1. $\phi(a) = 0$, P2. $\phi' \leqslant 0$, P3. $\phi'' \geqslant 0$, P4. $\phi'(\epsilon) = -\infty$.

Seja $v = \max\left\{k, \sup\limits_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u\right\} + \phi \circ d$. Dessa forma, $v \geqslant u$ em $\partial\Omega_\epsilon \setminus S_\epsilon$. Além disso, se N é o campo normal a S_ϵ interior a Ω_ϵ e $x \in S_\epsilon \cap B_a(y_0)$, então

$$\frac{\partial v}{\partial N}(x) = \langle \nabla v(x), N\rangle = \langle \phi'(d(x))\nabla d(x), \nabla d(x)\rangle = \phi'(\epsilon) = -\infty.$$

Seja agora $x \in \Omega_\epsilon$. Para a função v, assim definida, vale (veja a fórmula de transformação (C.13))

$$\mathfrak{Q}v = \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}\Delta d + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}} - nH(x,v).$$

Desde que $v \geqslant k$ e H é não-decrescente na coordenada z segue que $H(x,v) \geqslant H(x,k)$. Logo,

$$\mathfrak{Q}v \leqslant \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}\Delta d + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}} - nH(x,k).$$

Como

$$(1+\phi'^2)^{1/2} > (\phi'^2)^{1/2} = |\phi'| = -\phi',$$

temos

$$\frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}} > -1.$$

Como estamos supondo que $H \geqslant 0$, resulta

$$-nH(x,k) < nH(x,k)\frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}.$$

Logo,

$$\mathfrak{Q}v < \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}\left(\Delta d(x) + nH(x,k)\right) + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}}. \tag{2.9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\Delta d(x) + nH(x,k) =& \Delta d(x) - \Delta d(y_0) + \Delta d(y_0) + nH(x,k)\\ >& -\nu - (n-1)\mathcal{H}_S(y_0) + nH(x,k) \qquad \text{(a)}\\ >& -2\nu - (n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) + nH(x,k) \qquad \text{(b)}\\ >& 2\nu - nH(y_0,k) + nH(x,k) \qquad \text{(c)}\\ >& \nu, \qquad \text{(d)}\end{aligned}$$

onde (a) é consequência de (2.8), (b) de (2.7), (c) de (2.5) e (d) de (2.6). Substituindo esta estimativa em (2.9) tem-se

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}v <& \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}\nu + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}}\\ =& \frac{1}{(1+\phi'^2)^{3/2}}\left(\phi'(1+\phi'^2)\nu + \phi''\right)\\ <& \frac{1}{(1+\phi'^2)^{3/2}}\left(\phi'^3\nu + \phi''\right).\end{aligned}$$

Definimos[1]

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\left((a-\epsilon)^{1/2} - (t-\epsilon)^{1/2}\right). \tag{2.10}$$

Observamos que ϕ satisfaz P1–P4 e $\phi'^3\nu + \phi'' = 0$ para todo $\epsilon < t < a$. De fato,

$$\phi'(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\nu}}(t-\epsilon)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\nu(t-\epsilon)}\right)^{1/2}$$

e

$$\phi''(t) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}(t-\epsilon)^{-3/2} = \frac{\nu}{8}\left(\frac{2}{\nu(t-\epsilon)}\right)^{3/2} = -\nu\phi'(t)^3.$$

Dessa forma, $\mathfrak{Q}v < 0$ em Ω_ϵ. Decorre, então, da proposição 2.1 a estimativa

$$u \leqslant v = \max\left\{k, \sup_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u\right\} + \phi(\epsilon) \quad \text{em} \quad S_\epsilon \cap B_a(y_0).$$

Em particular,

$$u(\gamma_{y_0}(\epsilon)) \leqslant \max\left\{k, \sup_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u\right\} + \sqrt{\frac{2}{\nu}}\left((a-\epsilon)^{1/2}\right).$$

Como esta estimativa vale para todo $\epsilon < a$, fazendo ϵ tender a 0 obtemos

$$u(y_0) \leqslant \max\left\{k, \sup_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u\right\} + \sqrt{\frac{2a}{\nu}}. \tag{2.11}$$

[1] Veja também [12, §14.4] e [11, T. 4.1 p. 40].

Etapa 2.

Seja $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, y_0)$. Vamos restringir ρ a $\Omega' = \Omega \setminus B_a(y_0)$. Usaremos as notações da seção B.1. Sejam $\delta = \mathrm{diam}(\Omega)$ e $\psi \in \mathscr{C}^2(a, \delta)$ satisfazendo

P5. $\psi(\delta) = 0$, P6. $\psi' \leqslant 0$, P7. $\psi'' \geqslant 0$, P8. $\psi'(a) = -\infty$.

Seja $w = \sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y_0)} u + \psi \circ \rho$. Observamos que $w \in \mathscr{C}^2(\Omega \setminus B_a(y_0))$ (veja proposição B.1). A ideia novamente é usar a proposição 2.1. Note primeiramente que $w \geqslant u$ em $\partial\Omega \setminus B_a(y_0)$. Além disso, se N é o campo normal a $\partial B_a(y_0) \cap \Omega$ interior a Ω', resulta, para cada $x \in \partial B_a(y_0) \cap \Omega$,

$$\frac{\partial w}{\partial N}(x) = \langle \nabla w(x), N \rangle = \langle \psi'(\rho(x)) \nabla \rho(x), \nabla \rho(x) \rangle = \psi'(a) = -\infty.$$

Análogamente para w verifica-se (fórmula de transformação (C.13))

$$\mathfrak{Q}w = \frac{\psi'}{(1+\psi'^2)^{1/2}} \Delta\rho + \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{3/2}} - nH(x, w).$$

Desde que $H \geqslant 0$, segue

$$\mathfrak{Q}w \leqslant \frac{\psi'}{(1+\psi'^2)^{1/2}} \Delta\rho + \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{3/2}}.$$

Em qualquer uma das hipóteses (a) ou (b) as geodésicas radiais que partem de y_0 e interceptam Ω não possuem pontos conjugados (veja teorema B.6). Dessa forma podemos estimar $\Delta\rho$ usando o teorema de comparação do Laplaciano (teorema B.3).

No caso (a) comparamos M com $\mathbb{R}^n$ e obtemos

$$\Delta\rho(x) \geqslant \frac{n-1}{\rho(x)}$$

já que conhecemos a expressão do Laplaciano em $\mathbb{R}^n$ (veja proposição B.4).

Como também conhecemos a expressão do Laplaciano de uma esfera $S^n_{K_0}$ (veja novamente proposição B.4), sob a hipótese (b) comparamos M com $S^n_{K_0}$ e obtemos

$$\Delta\rho(x) \geqslant (n-1)\sqrt{K_0} \cot\left(\sqrt{K_0}\, \rho(x)\right).$$

Também da hipótese (b) segue que existe $0 < \kappa < \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ tal que $\mathrm{dist}(x, y_0) \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa$, para cada $x \in \overline{\Omega}$. Assim, para cada $x \in \Omega \setminus B_a(y_0)$, existe uma única geodésica radial minimizante β parametrizada pelo comprimento de arco tal $\beta(0) = y_0$ e $\beta(t_0) = x$, onde $t_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa$.

Definamos a função $\xi(t) = \sqrt{K_0}\,t\cot\left(\sqrt{K_0}\,t\right)$, $t > 0$. Note que ξ é decrescente e se anula em $t = \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$. Logo,

$$\xi(t) \geqslant \xi\left(\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa\right) > 0, \ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa\right].$$

Consequentemente,

$$\rho(x)\Delta\rho(x) \geqslant (n-1)C,$$

onde

$$C = \sqrt{K_0}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa\right)\cot\left(\sqrt{K_0}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} - \kappa\right)\right) > 0.$$

Por conseguinte, temos $\Delta\rho(x) \geqslant \frac{c}{\rho}$, onde $c = n-1$ sob a hipótese (a) e $c = (n-1)C$ sob a hipótese (b).

Desta forma,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}w \leqslant& \frac{\psi'}{(1+\psi'^2)^{1/2}} \cdot \frac{c}{\rho} + \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{3/2}}\\ =& \frac{1}{(1+\psi'^2)^{3/2}}\left(\frac{c}{\rho}\psi'(1+\psi'^2) + \psi''\right)\\ <& \frac{1}{(1+\psi'^2)^{3/2}}\left(\frac{c}{\rho}\psi'^3 + \psi''\right).\end{aligned}$$

Vamos definir[2]

$$\psi(t) = \left(\frac{2}{c}\right)^{1/2}\int_t^\delta \left(\log\frac{r}{a}\right)^{-1/2} dr. \tag{2.12}$$

Tal função satisfaz as hipóteses P5–P8, e $\dfrac{c}{t}\psi'(t)^3 + \psi(t)'' < 0$ para todo $a < t < \delta$. De fato,

$$\psi'(t) = -\left(\frac{2}{c}\right)^{1/2}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-1/2},$$

e

$$\begin{aligned}\psi''(t) =& -\left(\frac{2}{c}\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-3/2}\frac{a}{t}\frac{1}{a}\right)\\ =& \frac{1}{2t}\left(\frac{2}{c}\right)^{1/2}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-3/2}\\ =& \frac{c}{4t}\left(\frac{2}{c}\right)^{3/2}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-3/2}\\ =& -\frac{c}{4t}\psi'(t)^3\\ <& -\frac{c}{t}\psi'(t)^3.\end{aligned}$$

Assim sendo, $\mathfrak{Q}w < 0$ em Ω'.

[2] Veja também [12, §14.4]

Da proposição 2.1 podemos concluir que $u \leqslant w$ em $\partial B_a(y_0) \cap \Omega$, donde

$$\sup_{\partial B_a(y_0)\cap\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u + \psi(a). \tag{2.13}$$

Note que, na verdade, esta estimativa é válida para qualquer a tal que $\partial B_a(y_0) \cap \Omega$ seja conexo.

Substituindo a estimativa (2.13) na estimativa (2.11) obtida na etapa 1 obtemos

$$u(y_0) \leqslant \max\left\{k, \sup_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u\right\} + \psi(a) + \sqrt{\frac{2a}{\nu}}.$$

Observemos agora que $\lim_{a\to 0} \psi(a) = 0$. Com efeito, da expressão (2.12) vê-se que

$$\psi(a) = \left(\frac{2}{c}\right)^{1/2} \int_a^\delta \left(\log\frac{r}{a}\right)^{-1/2} dr,$$

e da mudança de variável $r = ae^{s^2}$ decorre

$$\psi(a) = 2a\left(\frac{2}{c}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{\log(\frac{\delta}{a})}} e^{s^2} ds.$$

Por conseguinte, para cada $\varepsilon > 0$, existe R_4 tal que se $a < R_4$, então

$$\psi(a) + \sqrt{\frac{2a}{\nu}} < \varepsilon.$$

Finalmente, escolhendo também $a < R_4$ temos (2.4). ■

Observação 2.3. Quando $H = H(x)$, segue que para cada $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$u(y_0) < \sup_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u + \varepsilon,$$

onde a depende apenas do módulo de continuidade de $H(x)$, de $\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0)$ e da geometria de Ω.

Teorema 2.4. *Sejam $\Omega \subset M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$. Seja $H \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função não decrescente em z e que não muda de sinal em Ω. Suponha que existe $y_0 \in \partial\Omega$ tal que*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < n \sup_{z\in\mathbb{R}} |H(y_0, z)|.$$

Assuma também que $\mathrm{cut}(y_0) \cap \Omega = \emptyset$ e que as curvaturas radiais ao longo das geodésicas radiais que interceptam Ω estão limitadas superiormente por K_0 sendo que:

(a) $K_0 \leqslant 0$, *ou*

(b) $K_0 > 0$ *e* $\operatorname{dist}(y_0, x) < \dfrac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

Então existe $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *tal que o problema de Dirichlet* (2.2) *não tem solução.*

Demonstração. Vamos supor primeiramente que $H \geqslant 0$. Assim, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < nH(y_0, k).$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi = k$ em $\partial\Omega \setminus B_a(y_0)$ e $\varphi(y_0) = k + \varepsilon$. Assim sendo, nenhuma solução de $\mathcal{M}u = nH(x,u)$ em Ω pode ter como seus valores no bordo a função φ já que a mesma não iria satisfazer a estimativa (2.4).

Observamos que é suficiente provar o caso em que $H \geqslant 0$. Mesmo assim completaremos a prova. Assuma que $H \leqslant 0$. Temos

$$\mathcal{M}(-u) = -nH(x,u) = -nH(x, -(-u))$$

e

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < -nH(y_0, k) = -nH(x, -(-k))$$

para $k \in \mathbb{R}$ já que $H \leqslant 0$ e $\partial_z H \geqslant 0$. Note também que a função $-H(x, -z)$ é não decrescente na variável z, logo, satisfaz as hipóteses do lema 2.2. Dessa forma a função $-u$ satisfaz a estimativa (2.4), donde

$$\begin{aligned} -u(y_0) &< \max\left\{-k, \sup_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} -u\right\} + \varepsilon \\ &= \max\left\{-k, -\inf_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u\right\} + \varepsilon \\ &= -\min\left\{k, \inf_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u\right\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Aplicamos o raciocínio anterior usando a estimativa

$$u(y_0) > \min\left\{k, \inf_{\partial\Omega\setminus B_a(y_0)} u\right\} - \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Destacamos agora algumas consequências diretas do teorema 2.4.

Teorema 2.5. *Sejam* M *uma variedade de Cartan-Hadamard e* $\Omega \subset M$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega$ *de classe* $\mathscr{C}^2$*. Seja* $H \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *uma função não decrescente em* z *e que não muda de sinal em* Ω*. Suponha que existe* $y_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < n \sup_{z\in\mathbb{R}} |H(y_0, z)|\,.$$

Então existe $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que o problema (P) não tem solução.

Demonstração. Segue diretamente do caso (a) do teorema anterior. ■

O teorema 2.5 inclui o resultado de não existência de Miriam Telichevesky [10, T. 6 p. 246] quando Ω é limitado.

Uma outra consequência importante é seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Sejam M uma variedade compacta, simplesmente conexa e cuja curvatura seccional K satisfaz $\frac{1}{4}K_0 \leqslant K \leqslant K_0$ onde $K_0 > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado e $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$. Seja $H \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função que não muda de sinal em Ω e não decrescente em z. Suponha que existe $y_0 \in \partial\Omega$ tal que*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y_0) < n \sup_{z\in\mathbb{R}} |H(y_0, z)|$$

e que $\operatorname{dist}(y_0, x) < \dfrac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$ *para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então existe $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que o problema de Dirichlet* (2.2) *não tem solução.*

Demonstração. As hipóteses sobre M implicam que o raio de injectividade de M é maior o igual a $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ pelo teorema de Klingenberg B.5. ■

3
Estimativas a priori

Neste capítulo estabelecemos as estimativas a priori que usaremos no capítulo 4 para provar os resultados de existência referentes ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\right) = nH(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nos auxiliaremos do seguinte lema de natureza geométrica.

Lema 3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e Γ uma hipersuperfície mergulhada e orientada de M de classe $\mathscr{C}^2$. Suponha que $\mathcal{H}_\Gamma \geqslant 0$ com respeito a uma orientação normal N. Sejam $y \in \Gamma$ fixado e $\gamma_y(t) = \exp_y(tN_y)$. Assuma que Γ_t é paralela a Γ para todo $t \in [0,\tau)$ e denotemos por $\mathcal{H}_t$ a curvatura média de Γ_t calculada em relação à orientação normal que coincide com $\gamma_y'(t)$ em $\gamma_y(t)$. Se que existe uma função $h \in \mathscr{C}^1[0,\tau)$ satisfazendo*

$$|h(0)| \leqslant \mathcal{H}_\Gamma(y) \tag{3.2}$$

e

$$(n-1)\left(|h'(t)| - (h(t))^2\right) \leqslant \operatorname{Ricc}_{\gamma_y(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t)) \ \forall\ t \in [0,\tau), \tag{3.3}$$

então

$$|h(t)| \leqslant \mathcal{H}_t(\gamma_y(t)) \ \forall\ 0 \leqslant t < \tau. \tag{3.4}$$

Além disso, $\mathcal{H}_t$ cresce ao longo de γ_y.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}(t) := \mathcal{H}_t(\gamma_y(t))$. Temos (veja corolário B.14)

$$\mathcal{H}'(t) \geqslant \frac{\operatorname{Ricc}_{\gamma_y(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t))}{n-1} + (\mathcal{H}(t))^2 .$$

De (3.3) segue

$$\mathcal{H}'(t) \geqslant |h'(t)| - (h(t))^2 + (\mathcal{H}(t))^2 . \tag{3.5}$$

Daí,

$$(\mathcal{H}(t) - h(t))' \geqslant (\mathcal{H}(t) + h(t))\,(\mathcal{H}(t) - h(t)) \tag{3.6}$$

e

$$(\mathcal{H}(t) + h(t))' \geqslant (\mathcal{H}(t) - h(t))\,(\mathcal{H}(t) + h(t))\,. \tag{3.7}$$

Sejam $v(t) = \mathcal{H}(t) - h(t)$ e $g(t) = \mathcal{H}(t) + h(t)$. De (3.6) tem-se

$$v'(t) \geqslant g(t)v(t).$$

Multiplicando a desigualdade por $e^{\int_0^t g(s)ds}$, resulta

$$\left(\frac{v(t)}{e^{\int_0^t g(s)ds}}\right)' \geqslant 0,$$

e, portanto,

$$\frac{v(t)}{e^{\int_0^t g(s)ds}} \geqslant v(0).$$

Como consequência de (3.2) segue que $v(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0, \tau)$, isto é

$$\mathcal{H}(t) \geqslant h(t), \;\; \forall t \in [0, \tau). \tag{3.8}$$

Usando (3.7) ao invés de (3.6) vê-se que

$$g'(t) \geqslant v(t)g(t).$$

De forma análoga obtemos que $g(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0, \tau)$, ou seja

$$\mathcal{H}(t) \geqslant -h(t), \;\; \forall t \in [0, \tau). \tag{3.9}$$

Das expressões (3.8) e (3.9) obtemos

$$\mathcal{H}(t) \geqslant |h(t)| \tag{3.10}$$

de onde segue (3.4). Substituindo (3.10) em (3.5) resulta que $\mathcal{H}'(t) \geqslant 0$. ■

3.1
Estimativa a priori da altura

Teorema 3.2. *Sejam $\Omega \in M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$ e $\varphi \in \mathscr{C}^0(\partial\Omega)$. Seja $H \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $\partial_z H \geqslant 0$,*

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} \left(H(x,z)\right)^2, \;\; \forall\; x \in \Omega, \tag{3.11}$$

e

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n\,|H(y, \varphi(y))|\,, \;\; \forall\; y \in \partial\Omega. \tag{3.12}$$

Se $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfaz (3.1), então

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{e^{\mu\delta} - 1}{\mu},$$

onde $\mu > n \sup \left\{ |H(x,z)|, (x,z) \in \overline{\Omega} \times \left[-\sup_{\partial\Omega} |\varphi|, \sup_{\partial\Omega} |\varphi| \right] \right\}$ *e* $\delta = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Demonstração. A prova do teorema segue as ideias de Serrin [7, T. p. 481] no caso Euclidiano mas usando o lema 3.1. Seja Ω_0 o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ que possuem um único ponto em $\partial\Omega$ realizando a distância $d(x) = d(x, \partial\Omega)$.

Seja $w = \phi \circ d + \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$, onde

$$\phi(t) = \frac{e^{\mu\delta}}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right).$$

Vamos mostrar primeiro que $u \leqslant w$. Suponha, por absurdo, que $v = u - w$ atinge um máximo $m > 0$. Como $u \leqslant w$ em $\partial\Omega$, então este máximo é atingido em $x_0 \in \Omega$. Dessa forma $u(x) - w(x) \leqslant u(x_0) - w(x_0) = m$ para cada $x \in \Omega$. Seja $y_0 \in \partial\Omega$ um ponto que realiza a distância $d(x_0) = t_0$ e γ_{y_0} a geodésica normal a $\partial\Omega$ que liga x_0 a y_0. Restringindo u e w a γ_{y_0} vemos que $\frac{\partial v}{\partial t}(t_0) = 0$ pois x_0 é um máximo de v. Dessa forma, $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial w}{\partial t}(t_0) = \phi'(t_0) > 0$, donde $\nabla u(x_0) \neq 0$. Consequentemente existe uma vizinhança V de x_0 tal que $\nabla u \neq 0$ em V. Logo, $\Gamma_0 = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\} \cap V$ é uma hipersuperfície de classe $\mathscr{C}^2$. Portanto, existe uma bola $B_\epsilon(z_0)$ tangente a Γ_0 em x_0 tal que

$$u > u(x_0) \text{ em } \overline{B_\epsilon(z_0)} \setminus \{x_0\}. \tag{3.13}$$

Note agora que

$$d(z_0, y_0) \leqslant d(z_0, x_0) + d(x_0, y_0) = \epsilon + d(x_0).$$

Sejam β a geodésica minimizante ligando z_0 a y_0 e $\tilde{z} = \partial B_\epsilon(z_0) \cap \operatorname{tr}(\beta)$. Então

$$d(\tilde{z}) \leqslant d(\tilde{z}, y_0) = d(z_0, y_0) - \epsilon \leqslant d(x_0) + \epsilon - \epsilon = d(x_0).$$

Assim, $w(\tilde{z}) \leqslant w(x_0)$ pois ϕ é crescente. Logo,

$$u(\tilde{z}) - w(x_0) \leqslant u(\tilde{z}) - w(\tilde{z}) \leqslant u(x_0) - w(x_0),$$

donde $u(\tilde{z}) \leqslant u(x_0)$. Logo, $\tilde{z} = x_0$ devido a (3.13) e, portanto, $z_0 = \gamma_{y_0}(t_0 + \epsilon)$. Isto implica que $x_0 \in \Omega_0$ já que se existir $y_1 \neq y_0$ satisfazendo $d(x_0) = d(x_0, y_1)$, então z_0 não estaria sobre a geodésica $\gamma_{y_1}(t)$ de onde segue-se que

$$d(z_0, y_1) < d(z_0, x_0) + d(x_0, y_1) = \varepsilon + d(x_0) = d(z_0)$$

o que é um absurdo.

No entanto, vamos mostrar que isso também é impossível. Sabemos que $d \in \mathscr{C}^2(\Omega_0)$ (veja lema B.13). Em Ω_0 temos (ver fórmula de transformação (C.13))

$$\mathcal{M}w = \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}}\Delta d + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}}. \tag{3.14}$$

Para cada $x \in \Omega_0$, sejam $y \in \partial\Omega$ o ponto mais perto de x e $\gamma_y(t)$ a geodésica ortogonal a $\partial\Omega$ em y interior a Ω. Defina $h(t) = \frac{n}{n-1}H\left(\gamma_y(t), \varphi(y)\right)$. Note que y está fixado. De (3.12) decorre

$$|h(0)| = \frac{n}{n-1}\left|H\left(y, \varphi(y)\right)\right| \leqslant \mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) = \mathcal{H}(0).$$

Além disso,

$$h'(t) = \frac{n}{n-1}\Big\langle \nabla_x H(\gamma_y(t), \varphi(y)), \gamma_y'(t)\Big\rangle.$$

Tomando em conta (3.11) tem-se também

$$(n-1)\left(|h'(t)| - (h(t))^2\right) \leqslant \mathrm{Ricc}_{\gamma_y(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t)).$$

Podemos aplicar então o lema 3.1 à função $h(t)$ para obter

$$n\left|H(\gamma_y(t), \varphi(y))\right| \leqslant (n-1)\mathcal{H}_t(\gamma_y(t)).$$

Logo,

$$\Delta d(x) \leqslant -n\left|H\left(x, \varphi(y(x))\right)\right| \ \ \forall\ x \in \Omega_0,$$

onde $y(x)$ é o ponto em $\partial\Omega$ mais perto de x. Substituindo esta última estimativa em (3.14) obtemos

$$\mathcal{M}w \leqslant -n\left|H\left(x, \varphi(y(x))\right)\right| \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}} + \frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}}.$$

Note que

$$\phi''(t) = -\mu e^{\mu(\delta - t)} = -\mu\phi'(t) < -n\left|H(x, \varphi(y(x)))\right|\phi'(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}w \leqslant &- n\left|H\left(x, \varphi(y(x))\right)\right| \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{1/2}} - n\left|H\left(x, \varphi(y(x))\right)\right| \frac{\phi'}{(1+\phi'^2)^{3/2}} \\ = &- n\left|H\left(x, \varphi(y(x))\right)\right| \frac{\phi'(2+\phi'^2)}{(1+\phi'^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Do fato de termos $a(2+a^2) \geqslant (1+a^2)^{3/2}$ sempre que $a \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$, resulta

$$\mathcal{M}w < -n\,|H\,(x, \varphi(y(x)))| \tag{3.15}$$

pois $\phi' \geqslant 1$. Desde que $\partial_z H \geqslant 0$ tem-se

$$\mp H(x, \pm w) = \mp H\left(x, \pm\phi(d(x)) \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right) \leqslant \mp H\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right).$$

Usando este fato e (3.15) concluímos então,

$$\begin{aligned}
\pm\mathfrak{Q}(\pm w) =& \mathcal{M}w \mp nH\,(x, \pm w)\\
<& -n\,|H\,(x, \varphi(y(x)))| \mp nH\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right)\\
\leqslant& \pm nH\,(x, \varphi(y(x))) \mp nH\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right)\\
\leqslant& \pm nH\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right) \mp nH\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right).
\end{aligned}$$

Logo, $\pm\mathfrak{Q}(\pm w) \leqslant 0$, daí

$$\mathfrak{Q}(w+m) = \mathcal{M}(w+m) - nH(x, w+m) \leqslant \mathcal{M}w - nH(x, w) = \mathfrak{Q}w \leqslant \mathfrak{Q}u,$$

$u \leqslant w + m$ e $u(x_0) = w(x_0) + m$. Isso implicaria que $u \equiv w + m$ em Ω_0 pelo princípio do máximo, mas $u < w + m$ em $\partial\Omega$. Consequentemente, $u \leqslant w$ em $\overline{\Omega}$.

Usando o raciocínio anterior mostramos que $u \geqslant -w$ em Ω. ■

Observação 3.3. Seja $x \in \Omega_0$ e denotemos por $y(x)$ o ponto em $\partial\Omega$ mais perto de x, ou seja, x está sobre a geodésica minimizante $\gamma_y(t) = \exp_y(tN_y)$. Então a condição (3.11) pode ser substituída pela condição

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n\,\|\nabla_x H(x, \varphi(y(x)))\| - \frac{n^2}{n-1}\left(H(x, \varphi(y(x)))\right)^2,\ \forall\, x \in \Omega_0.$$

Note também que basta que seja o tensor de Ricci na direção de $\gamma_y'(t)$.

3.2 Estimativa a priori do gradiente no bordo

Teorema 3.4. *Sejam $\Omega \in M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$ e $\varphi \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. Seja $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ uma solução do problema de Dirichlet* (3.1), *onde $H \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega} \times \left[-\sup_{\overline{\Omega}}|u|, \sup_{\overline{\Omega}}|u|\right]\right)$ satisfaz $\partial_z H \geqslant 0$,*

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} \left(H(x,z)\right)^2, \ \forall\ x \in \Omega, \tag{3.16}$$

e

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \left|H(y,\varphi(y))\right|, \ \forall\ y \in \partial\Omega. \tag{3.17}$$

Então

$$\sup_{\partial\Omega} \|\nabla u\| \leqslant \|\varphi\|_1 + e^{C\left(1+\|H\|_1+\|\varphi\|_2\right)\left(1+\|\varphi\|_1\right)^3\left(\|u\|_0+\|\varphi\|_0\right)},$$

onde $C = C(n,\Omega)$.

Demonstração. Usaremos a ideia clássica de estabelecer uma barreira superior e uma inferior em $\partial\Omega$. Seja $d(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$. Sabemos que existe $\tau > 0$ tal que d é de classe $\mathscr{C}^2$ sobre o conjunto de pontos satisfazendo $d(x) \leqslant \tau$ (veja corolário B.8). Seja $\psi \in \mathscr{C}^2([0,\tau])$ uma função não negativa satisfazendo

P1. $\psi'(t) \geqslant 1$, P2. $\psi''(t) \leqslant 0$, P3. $t\psi'(t) \leqslant 1$.

Seja $a < \tau$ a ser fixado posteriormente e consideremos o conjunto

$$\Omega_a = \{x \in M; d(x) < a\}.$$

Definamos $w^{\pm} = \pm\psi\circ d + \varphi$. Denotando também por $\mathcal{M}$ o operador dado pela expressão em coordenadas (C.5), temos

$$\pm\mathfrak{Q}w^{\pm} = \pm\mathcal{M}w^{\pm} \mp nH(x,w^{\pm})W_{\pm}^3$$

onde usamos a notação

$$W_{\pm} = \sqrt{1+\|\nabla w^{\pm}\|^2} = \sqrt{1+\|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\|^2}.$$

Vamos mostrar primeiramente que $\pm\mathfrak{Q}w^{\pm} \leqslant 0$ em Ω_a. Desde que $\partial_z H \geqslant 0$ tem-se

$$\mp H(x,w^{\pm}(x)) = \mp H(x,\pm\psi(d(x))+\varphi(x)) \leqslant \mp H(x,\varphi(x)),$$

logo

$$\pm\mathfrak{Q}w^{\pm} \leqslant \pm\mathcal{M}w^{\pm} \mp nH(x,\varphi(x))W_{\pm}^3 \leqslant \pm\mathcal{M}w^{\pm} + n\left|H(x,\varphi(x))\right| W_{\pm}^3. \tag{3.18}$$

Vamos estimar agora $\pm\mathcal{M}w^{\pm}$. Primeiramente temos (ver fórmula de transformação (C.11))

$$\begin{aligned} \pm\mathcal{M}w^{\pm} &= \psi' W_{\pm}^2 \Delta d + \psi'' W_{\pm}^2 - \psi''\langle\nabla d, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\rangle^2 \\ &-\psi'\,\nabla^2 d(\nabla\varphi,\nabla\varphi) \mp \nabla^2\varphi(\pm\psi'\nabla d+\nabla\varphi, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como $\psi'' < 0$ e $\langle \nabla d, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\rangle^2 \leqslant \|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\|^2$, então

$$\psi'' W_\pm^2 - \psi''\langle \nabla d, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\rangle^2 \leqslant \psi''. \tag{3.20}$$

Além disso, uma vez que $\nabla^2\, d(x)$ é uma forma bilinear contínua temos

$$\left|\nabla^2\, d(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\right| \leqslant \|d\|_2 \, \|\varphi\|_1^2 \, .$$

Já que $\psi' \geqslant 1$ segue

$$\psi' \left|\nabla^2\, d(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\right| \leqslant \psi'^2 \, \|d\|_2 \, \|\varphi\|_1^2 \, . \tag{3.21}$$

Da mesma forma,

$$\left|\nabla^2\, \varphi(\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi)\right| \leqslant \|\varphi\|_2 \, \|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\|^2 \, . \tag{3.22}$$

Notando que

$$\|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\|^2 = \left(\psi'^2 + 2\psi'\langle \pm\nabla d, \nabla\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right) \leqslant \left(\psi'^2 + 2\psi' \, \|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_1^2\right)$$

e lembrando que $\psi' \geqslant 1$, temos

$$\|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\|^2 \leqslant \left(1 + \|\varphi\|_1\right)^2 \psi'^2 \tag{3.23}$$

e também

$$W_\pm^2 \leqslant 1 + \left(1 + \|\varphi\|_1\right)^2 \psi'^2 \leqslant 2\left(1 + \|\varphi\|_1\right)^2 \psi'^2. \tag{3.24}$$

Das expressões (3.22) e (3.23) obtemos

$$\left|\nabla^2\, \varphi(\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi, \pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi)\right| \leqslant \|\varphi\|_2 \left(1 + \|\varphi\|_1\right)^2 \psi'^2. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.20), (3.21), (3.25) em (3.19) tem-se

$$\pm\mathcal{M}w^\pm \leqslant \psi' W_\pm^2 \Delta d + \psi'' + c\psi'^2, \tag{3.26}$$

onde

$$c = \|d\|_2 \, \|\varphi\|_1^2 + \|\varphi\|_2 \left(1 + \|\varphi\|_1\right)^2 . \tag{3.27}$$

Usando (3.26) em (3.18) temos

$$\pm\mathfrak{Q}w^\pm \leqslant \psi' W_\pm^2 \Delta d + \psi'' + c\psi'^2 + n\left|H(x, \varphi(x))\right| W_\pm^3. \tag{3.28}$$

Para cada $y \in \partial\Omega$ denotemos novamente $\gamma_y(t) = \exp_y(tN_y)$, $0 \leqslant t \leqslant a$. Aplicando novamente o lema 3.1 à função $h(t) = \frac{n}{n-1} H(\gamma_y(t), \varphi(y))$, obtém-se $\mathcal{H}'(t) \geqslant 0$, para cada $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Logo, $\mathcal{H}_t(\gamma_y(t)) \geqslant \mathcal{H}_{\partial\Omega}(y)$ para cada $0 \leqslant t \leqslant a$. Daí,

$$\Delta d(x) \leqslant \Delta d(y) \leqslant -n\left|H(y, \varphi(y))\right| \;\; \forall \; x \in \Omega_a, \tag{3.29}$$

onde $y = y(x)$ é o único ponto em $\partial\Omega$ mais próximo de x. Substituindo (3.29) em (3.28) obtemos

$$\begin{aligned}\pm\mathfrak{Q}w^{\pm} \leqslant & \psi' W_{\pm}^2(-n\,|H(y,\varphi(y))|) + \psi'' + c\psi'^2 + n\,|H(x,\varphi(x))|\, W_{\pm}^3 \\ = & n\psi' W_{\pm}^2(|H(x,\varphi(x))| - |H(y,\varphi(y))| - |H(x,\varphi(x))|) \\ & + \psi'' + c\psi'^2 + n\,|H(x,\varphi(x))|\, W_{\pm}^3\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\pm\mathfrak{Q}w^{\pm} \leqslant & n\psi' W_{\pm}^2(|H(x,\varphi(x))| - |H(y,\varphi(y))|) \\ & + n\,|H(x,\varphi(x))|\, W_{\pm}^2\,(W_{\pm} - \psi') + \psi'' + c\psi'^2.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Definamos agora

$$g(t) = H(\gamma_y(t), \varphi(\gamma_y(t))),\ 0 \leqslant t \leqslant a.$$

Daí,

$$g'(t) = \Big\langle \nabla_x H(\gamma_y(t), \varphi(\gamma_y(t))), \gamma_y'(t)\Big\rangle + \partial_z H(\gamma_y(t), \varphi(\gamma_y(t)))\Big\langle \nabla\varphi(\gamma_y(t)), \gamma_y'(t)\Big\rangle$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}|g'(t)| \leqslant & \|\nabla_x H(\gamma_y(t), \varphi(\gamma_y(t)))\| + \partial_z H(\gamma_y(t), \varphi(\gamma_y(t)))\,\|\nabla\varphi(\gamma_y(t))\| \\ \leqslant & (1 + \|\varphi\|_1)\, h_1.\end{aligned}$$

onde

$$h_1 = \sup_{\Omega\times\left[-\sup\limits_{\Omega}|u|,\sup\limits_{\Omega}|u|\right]} \|\nabla_{M\times\mathbb{R}} H\|\,.$$

logo, $|g(d(x))| - |g(0)| \leqslant |g(d(x)) - g(0)| \leqslant (1 + \|\varphi\|_1)\, h_1 d(x)$. Conclui-se que

$$|H(x,\varphi(x))| - |H(y,\varphi(y))| \leqslant h_1(1 + \|\varphi\|_1) d(x).$$

Logo,

$$n\psi' W_{\pm}^2(|H(x,\varphi(x))| - |H(y,\varphi(y))|) \leqslant nh_1\,(1 + \|\varphi\|_1)\, d(x)\psi'(d(x)) W_{\pm}^2.$$

Usando a propriedade P3 e (3.24) resulta

$$n\psi' W_{\pm}^2(|H(x,\varphi(x))| - |H(y,\varphi(y))|) \leqslant 2nh_1\,(1 + \|\varphi\|_1)^3\, \psi'^2. \tag{3.31}$$

Por outro lado,

$$W_{\pm} \leqslant 1 + \|\pm\psi'\nabla d + \nabla\varphi\| \leqslant 1 + \psi' + \|\nabla\varphi\|$$

e, portanto
$$W_\pm - \psi' \leqslant 1 + \|\varphi\|_1 \,. \tag{3.32}$$
De (3.24) e (3.32) tem-se
$$n\,|H(x,\varphi(x))|\,(W_\pm - \psi')\,W_\pm^2 \leqslant 2nh_0\,(1+\|\varphi\|_1)^3\,\psi'^2, \tag{3.33}$$
onde
$$h_0 = \sup_{\Omega\times\left[-\sup\limits_\Omega|u|,\sup\limits_\Omega|u|\right]} |H(x,z)|\,.$$

Substituindo (3.31) e (3.33) em (3.30) obtemos
$$\pm\mathfrak{Q}w^\pm \leqslant \Big(c + 2n\,\|H\|_1\,(1+\|\varphi\|_1)^3\Big)\,\psi'^2 + \psi'',$$
onde
$$\|H\|_1 = h_0 + h_1.$$
Lembrando da expressão de c dada em (3.27) tem-se
$$\begin{aligned} c + 2n\,\|H\|_1\,(1+\|\varphi\|_1)^3 &= \|d\|_2\,\|\varphi\|_1^2 + \|\varphi\|_2\,(1+\|\varphi\|_1)^2 + 2n\,\|H\|_1\,(1+\|\varphi\|_1)^3 \\ &\leqslant 2n\,(\|d\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|H\|_1)\,(1+\|\varphi\|_1)^3 \\ &< 2n\,(1+\|d\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|H\|_1)\,(1+\|\varphi\|_1)^3 \\ &< 2n\,(1+\|d\|_2)\,(1+\|\varphi\|_2 + \|H\|_1)\,(1+\|\varphi\|_1)^3 \,. \end{aligned}$$
Definimos
$$\nu = C\,(1+\|H\|_1 + \|\varphi\|_2)\,(1+\|\varphi\|_1)^3 \,, \tag{3.34}$$
onde
$$C = 2n\,(1+\|d\|_2 + 1/\tau)\,. \tag{3.35}$$
Note que C depende apenas de n e Ω, e que $C > 1/\tau$.

Dessa maneira,
$$\pm\mathfrak{Q}w^\pm < \nu\psi'^2 + \psi''.$$
Se escolhermos
$$\psi(t) = \frac{1}{\nu}\log(1+kt),$$
tem-se $\pm\mathfrak{Q}w^\pm < 0$ em Ω_a. De fato,
$$\psi'(t) = \frac{k}{\nu(1+kt)} \tag{3.36}$$
e
$$\psi''(t) = -\frac{k^2}{\nu(1+kt)^2}. \tag{3.37}$$
Note também que
$$t\psi'(t) = \frac{kt}{\nu(1+kt)} \leqslant \frac{1}{\nu} < 1,$$

logo ψ satisfaz a propriedade P3. Por outro lado, de (3.37) vemos que $\psi'' < 0$ que é a propriedade P2. Isso implica que $\psi'(t) > \psi'(a)$, para cada $t \in [0, a]$. Assim sendo, P1 é satisfeita se $\psi'(a) = 1$, isto é

$$\frac{k}{\nu(1+ka)} = 1. \tag{3.38}$$

Além disso, para termos $\pm w^{\pm} \geqslant \pm u$ em $\partial\Omega_a \setminus \partial\Omega$ basta que

$$\psi(a) = \|u\|_0 + \|\varphi\|_0 \,. \tag{3.39}$$

Com efeito, se (3.39) vale, então para cada $x \in \partial\Omega_a \setminus \partial\Omega$ temos

$$\pm w^{\pm}(x) = \psi(a) \pm \varphi(x) = \|u\|_0 + \|\varphi\|_0 \pm \varphi(x) \geqslant \|u\|_0 \geqslant \pm u(x).$$

Note que (3.39) é equivalente a

$$1 + ka = e^{\nu(\|u\|_0 + \|\varphi\|_0)}. \tag{3.40}$$

Substituindo (3.40) em (3.38) obtemos

$$k = \nu e^{\nu(\|u\|_0 + \|\varphi\|_0)}. \tag{3.41}$$

Usando (3.40) novamente tem-se

$$a = \frac{e^{\nu(\|u\|_0 + \|\varphi\|_0)} - 1}{k} = \frac{e^{\nu(\|u\|_0 + \|\varphi\|_0)} - 1}{\nu e^{\nu(\|u\|_0 + \|\varphi\|_0)}}.$$

Note que $a < \frac{1}{\nu}$ e que das expressões (3.34) e (3.35) segue que $\nu > \frac{1}{\tau}$. Consequentemente, $a < \tau$ como foi suposto.

Finalmente, se $x \in \partial\Omega$, $w^{\pm}(x) = \pm\psi(0) + \varphi(x) = u(x)$. Dessa forma, $w^- \leqslant u \leqslant w^+$ em Ω_a pelo princípio do máximo. Logo,

$$-\psi \circ d \leqslant u - \varphi \leqslant \psi \circ d \text{ em } \Omega_a,$$

sendo que em $\partial\Omega$ as três expressões são nulas. Consequentemente, dado $y \in \partial\Omega$ e $0 \leqslant t \leqslant a$,

$$-\psi(t) + \psi(0) \leqslant (u - \varphi)(\gamma_y(t)) - (u - \varphi)(\gamma_y(0)) \leqslant \psi(t) - \psi(0).$$

Dividindo por $t > 0$ e passando ao limite quando $t \to 0^+$, temos

$$-\psi'(0) \leqslant \langle \nabla u(y) - \nabla\varphi(y), N\rangle \leqslant \psi'(0),$$

donde,

$$|\langle \nabla u(y) - \nabla\varphi(y), N\rangle| \leqslant \psi'(0).$$

Por conseguinte,

$$|\langle \nabla u(y), N\rangle| \leqslant |\langle \nabla \varphi(y), N\rangle| + \psi'(0). \tag{3.42}$$

Como $u \equiv \varphi$ em $\partial\Omega$ segue

$$\nabla u(y) = (\nabla\varphi(y))^T + \langle \nabla u(y), N\rangle N,$$

onde N é o campo normal a $\partial\Omega$. Uma vez que vale (3.42) conclui-se

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(y)\|^2 &= \left\|(\nabla\varphi(y))^T\right\|^2 + \langle \nabla u(y), N\rangle^2 \\
&\leqslant \left\|(\nabla\varphi(y))^T\right\|^2 + (|\langle \nabla\varphi(y), N\rangle| + \psi'(0))^2 \\
&= \left\|(\nabla\varphi(y))^T\right\|^2 + \langle \nabla\varphi(y), N\rangle^2 + 2\,|\langle \nabla\varphi(y), N\rangle|\,\psi'(0) + \psi'(0)^2 \\
&\leqslant \|\nabla\varphi(y)\|^2 + 2\,\|\nabla\varphi(y)\|\,\psi'(0) + \psi'(0)^2 \\
&= (\|\nabla\varphi(y)\| + \psi'(0))^2 .
\end{aligned}$$

Tomando em conta a expressão ψ' dada em (3.36), a de k em (3.41) e a de ν dada em (3.34) obtemos a estimativa desejada. ■

Ressaltamos que a hipótese (3.16) foi usada para garantirmos que $\Delta d(x) \leqslant \Delta d(y)$ para cada $x \in \Omega_a$. Por conseguinte, a nossa estimativa também é válida em domínios nos quais a curvatura média das hipersuperfícies paralelas ao bordo aumente no sentido de Ω sem a necessidade de (3.16). Uma condição suficiente sobre um domínio *mean convex* para que isso ocorra é

$$\mathrm{Ricc}_{\gamma_y(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t)) \geqslant -(n-1)\left(\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y)\right)^2, \ \forall\, y \in \partial\Omega. \tag{3.43}$$

Para ver isso podemos aplicar o lema 3.1 à função constante $h(t) = \mathcal{H}_{\partial\Omega}(y)$. Em particular, o teorema 3.4 também é válido se M tem curvatura de Ricci não negativa sem a necessidade da hipótese (3.16), e também no caso em que for negativa e substituirmos a hipótese (3.16) por (3.43).

Por outro lado, considere um domínio *mean convex* Ω de $\mathbb{H}^n$. Se $\lambda_i(t)$ representa a i-ésima curvatura principal das paralelas ao bordo de Ω ao longo da geodésica $\gamma_y(t)$, então (veja a expressão (B.11))

$$\lambda_i'(t) = \frac{\operatorname{sech}^2(t)\left((\lambda_i(0))^2 - 1\right)}{(1 - \lambda_i(0)\tanh t)^2}. \tag{3.44}$$

Logo, a curvatura média aumenta ao longo de $\gamma_y(t)$ se $\lambda_i(0) \geqslant 1$. Tal é o caso de qualquer bola geodésica B_R já que as curvaturas principais são todas iguais a $\coth(R) > 1$. Mas se $\lambda_i < 1$, então a curvatura média decresce no sentido de

Ω. Para exemplificar vamos considerar a geodésica vertical

$$L = \{z \in \mathbb{H}^2; \mathrm{Re}\,(z) = 0\}.$$

Então o conjunto de pontos que estão a uma distância ρ de L são duas semirretas L^+ e L^- com o mesmo ponto assintótico $z = 0$, e formando um ângulo não orientado $\alpha \in (0, \pi/2)$ com L. A curvatura geométrica de L^+ e L^- é $\tanh(\rho) = \sin(\alpha)$. Tais curvas são chamadas de *curvas equidistantes*. Considere agora o domínio

$$D = \{z \in \mathbb{H}^2; \arg(z) > \pi/2 - \alpha\}.$$

Seja $\theta < \alpha$. Então o conjunto

$$\{z \in \mathbb{H}^2; \arg(z) = \pi/2 - \theta\} \subset D$$

é equidistante a L^+ e sua curvatura é $\mathrm{sen}(\theta) < \mathrm{sen}(\alpha)$. Para mais detalhes veja [13, Prop. 2.5.16 p. 98, Def. 2.5.18 p. 100, Prop. 2.6.20 p. 121]

No entanto, nos domínios limitados de $\mathbb{H}^n$ nos quais não podamos garantir que a curvatura das paralelas aumente no sentido de Ω, sempre podemos escolher τ suficientemente pequeno de forma tal que para alguma constante $\kappa > 0$,

$$\left|\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) - \mathcal{H}_{d(x)}(x)\right| \leqslant \kappa d(x).$$

Isso também segue da expressão (3.44). Assim sendo, obtivemos o seguinte resultado que nos permite estender o teorema de Spruck em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *Sejam $\Omega \in \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$ e $\varphi \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. Seja $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ uma solução do problema de Dirichlet* (3.1)*, onde $H \in \mathscr{C}^1\left(\Omega \times \left[-\sup\limits_{\overline{\Omega}} |u|, \sup\limits_{\overline{\Omega}} |u|\right]\right)$ satisfaz $\partial_z H \geqslant 0$, e*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n\,|H(y, \varphi(y))|\,,\ \forall\ y \in \partial\Omega.$$

Então

$$\sup_{\partial\Omega} \|\nabla u\| \leqslant \|\varphi\|_1 + e^{C\left(1+\|H\|_1+\|\varphi\|_2\right)\left(1+\|\varphi\|_1\right)^3\left(\|u\|_0+\|\varphi\|_0\right)},$$

onde $C = C(n, \Omega)$.

Demonstração. A estimativa segue os passos da prova do teorema 3.4 com a diferença de que precisamos substituir (3.29) por

$$\Delta d(x) \leqslant \Delta d(y) + (n-1)\kappa d(x) \leqslant -n\,|H(y, \varphi(y))| + n\kappa d(x).$$

Neste caso se escolhe $C = 2n\left(1 + \kappa + \|d\|_2 + 1/\tau\right)$ em lugar da que foi dada na expressão (3.35). ■

3.3 Estimativa a priori global do gradiente

Teorema 3.6. *Seja $\Omega \in M$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$. Seja $u \in \mathscr{C}^3(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ uma solução da equação $\mathcal{M}u = nH(x,u)W^3$, onde $H \in \mathscr{C}^1\left(\Omega \times \left[-\sup_{\overline{\Omega}} |u|, \sup_{\overline{\Omega}} |u|\right]\right)$ satisfaz $\partial_z H \geqslant 0$. Então*

$$\sup_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \leqslant \left(\sqrt{3} + \sup_{\partial\Omega} \|\nabla u\|\right) \exp\left(2 \sup_{\Omega} |u| \left(1 + 8n\left(\|H\|_1 + R\right)\right)\right),$$

onde $R \geqslant 0$ é tal que $\operatorname{Ricc} \geqslant -R$ *em* Ω.

A técnica que iremos usar para demonstrar o teorema tem sua origem no trabalho de Caffarelli-Nirenberg-Spruck [14, p. 51] no contexto Euclidiano. Outros trabalhos fora do ambiente Euclidiano também tem utilizado essa técnica (veja [15, Lema 5.2 p. 62] e [16, Lema 3.1 p. 4]).

Demonstração. Defina $w(x) = \|\nabla u(x)\| \, e^{Au(x)}$, $A \geqslant 1$. Suponha que w atinge um máximo em $x_0 \in \overline{\Omega}$. Se $x_0 \in \partial\Omega$, então

$$w(x) \leqslant w(x_0) = \|\nabla u(x_0)\| \, e^{Au(x_0)}.$$

Assim

$$\sup_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \leqslant \sup_{\partial\Omega} \|\nabla u\| \, e^{2A \sup_{\Omega}|u|}. \tag{3.45}$$

Suponhamos agora que $x_0 \in \Omega$. Suponhamos que $\nabla u(x_0) \neq 0$ e definamos coordenadas normais em x_0 de modo que $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{x_0} = \frac{\nabla u(x_0)}{\|\nabla u(x_0)\|}$. Dessa forma,

$$\partial_k u(x_0) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_{x_0}, \nabla u(x_0) \right\rangle = \|\nabla u(x_0)\| \, \delta_{k1}. \tag{3.46}$$

Denotemos por σ a métrica nestas coordenadas. Sabemos que

$$\sigma_{ij}(x_0) = \sigma^{ij} = \delta_{ij} \tag{3.47}$$

$$\partial_k \sigma_{ij}(x_0) = \partial_k \sigma^{ij}(x_0) = 0 \tag{3.48}$$

$$\Gamma_{ij}^k(x_0) = 0. \tag{3.49}$$

Lembremos também que $\nabla u(x) = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, onde

$$u^i = \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} \partial_j u. \tag{3.50}$$

Daí

$$\|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^{ij}\partial_i u \partial_j u. \tag{3.51}$$

Notemos agora que a função $\tilde{w}(x) = \ln w(x) = Au(x) + \ln \|\nabla u(x)\|$ também atinge um máximo em x_0. Desta forma, para cada $0 \leqslant k \leqslant n$, valem as relações $\partial_k \tilde{w}(x_0) = 0$ e $\partial_{kk}\tilde{w}(x_0) \leqslant 0$. Temos

$$\partial_k \tilde{w}(x) = A\partial_k u(x) + \frac{\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x)}{2\|\nabla u(x)\|^2},$$

$$\partial_{kk}\tilde{w}(x) = A\partial_{kk}u(x) + \frac{1}{2}\partial_k \left(\|\nabla u\|^{-2}\right)(x)\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x) + \frac{\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x)}{2\|\nabla u(x)\|^2}.$$

Como

$$\partial_k \left(\|\nabla u\|^{-2}\right) = \partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)^{-1} = -\left(\|\nabla u\|^2\right)^{-2}\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right),$$

então

$$\partial_{kk}\tilde{w}(x) = A\partial_{kk}u(x) - \frac{\left(\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x)\right)^2}{2\|\nabla u(x)\|^4} + \frac{\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x)}{2\|\nabla u(x)\|^2}.$$

Logo,

$$A\partial_k u(x_0) + \frac{\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0)}{2\|\nabla u(x_0)\|^2} = 0, \tag{3.52}$$

e

$$A\partial_{kk}u(x_0) - \frac{\left(\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0)\right)^2}{2\|\nabla u(x_0)\|^4} + \frac{\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0)}{2\|\nabla u(x_0)\|^2} \leqslant 0. \tag{3.53}$$

Lembrando de (3.51) temos

$$\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\partial_k \sigma^{ij}\right)\partial_i u \partial_j u + 2\sigma^{ij}\partial_{ki}u\partial_j u\right) \tag{3.54}$$

De (3.46), (3.47) e (3.48) decorre

$$\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = 2\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\partial_{ki}u(\|\nabla u(x_0)\|\,\delta_{j1}),$$

donde

$$\partial_k \left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = 2\|\nabla u(x_0)\|\,\partial_{1k}u(x_0). \tag{3.55}$$

Substituindo (3.46) e (3.55) em (3.52) verifica-se

$$A\|\nabla u(x_0)\|\,\delta_{k1} + \frac{2\|\nabla u(x_0)\|\,\partial_{1k}u(x_0)}{2\|\nabla u(x_0)\|^2} = 0,$$

logo,

$$\partial_{1k}u(x_0) = -A\,\|\nabla u(x_0)\|^2\,\delta_{k1}. \tag{3.56}$$

Substituindo também (3.56) em (3.55) obtemos

$$\partial_k\left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = -2A\,\|\nabla u(x_0)\|^3\,\delta_{k1}. \tag{3.57}$$

Por outro lado, partindo da expressão (3.54) segue

$$\begin{aligned}\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(&\left(\partial_{kk}\sigma^{ij}\right)\partial_i u\partial_j u + \left(\partial_k\sigma^{ij}\right)\partial_k\left(\partial_i u\partial_j u\right) \\ &+2\left(\left(\partial_k\sigma^{ij}\right)\partial_{ki}u\partial_j u + \sigma^{ij}\partial_{kki}u\partial_j u + \sigma^{ij}\partial_{ki}u\partial_{kj}u\right)\Big).\end{aligned}$$

De (3.46), (3.47) e (3.48) segue

$$\begin{aligned}\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = \|\nabla u(x_0)\|^2\left(\partial_{kk}\sigma^{11}\right) + 2\,\|\nabla u(x_0)\|\,\partial_{kk1}u \\ +2\sum_{i=1}^{n}(\partial_{ki}u(x_0))^2.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Derivando duas vezes com respeito a x_k a equação $\sigma\circ\sigma^{-1} = Id$ e avaliando em x_0 vemos que $\partial_{kk}\sigma^{-1}(x_0) = -\partial_{kk}\sigma(x_0)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\partial_{kk}\sigma_{11} =& \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle = 2\frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \\ =& 2\left(\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle + \left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|^2\right).\end{aligned}$$

Lembrando de (3.49) temos então

$$\partial_{kk}\sigma^{11}(x_0) = -\partial_{kk}\sigma_{11}(x_0) = -2\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle. \tag{3.59}$$

Substituindo (3.59) em (3.58) concluí-se

$$\begin{aligned}\partial_{kk}\left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = 2\Big(& -\|\nabla u(x_0)\|^2\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \\ &+\|\nabla u(x_0)\|\,\partial_{kk1}u(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{ki}u(x_0)\right)^2\Big).\end{aligned} \tag{3.60}$$

Usando as expressões (3.57) e (3.60) em (3.53) verifica-se

$$\begin{aligned}A\partial_{kk}u(x_0) - 2A^2\,\|\nabla u(x_0)\|^2\,\delta_{k1} + \frac{\partial_{kk1}u(x_0)}{\|\nabla u(x_0)\|} - \left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \\ +\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{ki}u(x_0)\right)^2}{\|\nabla u(x_0)\|^2} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Decorre de (3.56) que, para $k=1$,

$$-A^2\|\nabla u(x_0)\|^2 - 2A^2\|\nabla u(x_0)\|^2 + \frac{\partial_{111}u(x_0)}{\|\nabla u(x_0)\|} - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \\ + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(-A\|\nabla u(x_0)\|^2\right)^2\delta_{i1}}{\|\nabla u(x_0)\|^2} \leqslant 0,$$

logo,

$$\partial_{111}u(x_0) \leqslant 2A^2\|\nabla u(x_0)\|^3 + \|\nabla u(x_0)\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle. \tag{3.61}$$

Se $k>1$, então

$$A\partial_{kk}u(x_0) + \frac{\partial_{kk1}u(x_0)}{\|\nabla u(x_0)\|} - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \leqslant -\frac{\sum_{i=1}^{n}(\partial_{ki}u(x_0))^2}{\|\nabla u(x_0)\|^2} \leqslant 0,$$

logo

$$\partial_{kk1}u(x_0) \leqslant -A\partial_{kk}u(x_0)\|\nabla u(x_0)\| + \|\nabla u(x_0)\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle. \tag{3.62}$$

Na sequência vamos a avaliar em x_0 a equação em coordenadas (C.5), isto é,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(W^2\sigma^{ij} - u^i u^j\right)\nabla^2_{ij}u = nH(x,u)W^3. \tag{3.63}$$

Lembramos que

$$\nabla^2_{ij}u(x) = \nabla^2 u(x)\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \partial_{ij}u - \sum_{k=1}^{n}\Gamma^k_{ij}\partial_k u, \tag{3.64}$$

$$\Delta u(x) = \operatorname{tr}\left(X \longrightarrow \nabla_X \nabla u\right) = \sum_{ij}\sigma^{ij}\nabla^2_{ij}u(x). \tag{3.65}$$

De (3.50), (3.64) e (3.65) temos

$$u^i(x_0) = \partial_i u(x_0) = \|\nabla u(x_0)\|\,\delta_{i1} \tag{3.66}$$

$$\nabla^2_{ij}u(x_0) = \partial_{ij}u(x_0) \tag{3.67}$$

$$\Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\partial_{ii}u(x_0). \tag{3.68}$$

Substituindo estas expressões em (3.63) e usando (3.56), vemos que a equação da curvatura média em x_0 toma a forma

$$\begin{aligned} nH_0W_0^3 =& W_0^2\Delta u(x_0) - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\|\nabla u(x_0)\|\,\delta_{i1}\right)\left(\|\nabla u(x_0)\|\,\delta_{j1}\right)\partial_{ij}u \\ =& W_0^2\Delta u(x_0) - \|\nabla u(x_0)\|^2\,\partial_{11}u(x_0) \\ =& W_0^2\sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) + \partial_{11}u(x_0) \\ =& W_0^2\sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) - A\,\|\nabla u(x_0)\|^2, \end{aligned}$$

onde $H_0 = H(x_0, u(x_0))$ e $W_0 = \sqrt{1 + \|\nabla u(x_0)\|^2}$. Logo,

$$\sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) = nH_0W_0 + \frac{A\,\|\nabla u(x_0)\|^2}{W_0^2}. \tag{3.69}$$

Finalmente vamos derivar (3.63) com respeito a x_1. Tem-se

$$\begin{aligned} \partial_1\left(W^2\right)\Delta u + W^2(\partial_1\Delta u) - 2\sum_{i,j=1}^{n} u^i\left(\partial_1 u^j\right)\nabla_{ij}^2 u - \sum_{i,j=1}^{n} u^i u^j\partial_1(\nabla_{ij}^2 u) \\ = n(\partial_1 H + \partial_z H\partial_1 u)W^3 + nH\partial_1\left(W^3\right). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Vamos calcular as derivadas envolvidas nesta equação e avaliar em x_0. Desde que vale (3.57) deduz-se

$$\partial_1\left(W^2\right)(x_0) = \partial_1\left(\|\nabla u\|^2\right)(x_0) = -2A\,\|\nabla u(x_0)\|^3, \tag{3.71}$$

$$\partial_1\left(W^3\right)(x_0) = \frac{3}{2}W_0\partial_1\left(W^2\right)(x_0) = -3AW_0\,\|\nabla u(x_0)\|^3. \tag{3.72}$$

Além disso, usando (3.50), temos

$$\partial_1 u^i = \partial_1\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}\partial_j u = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\partial_1\sigma^{ij}\right)\partial_j u + \sigma^{ij}\partial_{1j}u\right).$$

Usando (3.56) resulta

$$\partial_1 u^i(x_0) = \partial_{1i}u(x_0) = -A\,\|\nabla u(x_0)\|^2\,\delta_{i1}. \tag{3.73}$$

Por outro lado, de (3.64) deduz-se

$$\partial_1(\nabla_{ij}^2 u)(x) = \partial_{1ij}u(x) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle - \left\langle \nabla u(x), \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle.$$

Logo,

$$\partial_1(\nabla^2_{ij}u)(x_0) = \partial_{1ij}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla u(x_0) \right\rangle. \tag{3.74}$$

Finalmente, decorre de (3.65),

$$\partial_1 \Delta u(x) = \sum_{ij} \left(\left(\partial_1 \sigma^{ij} \right) \nabla^2_{ij} u(x) + \sigma^{ij} \partial_1 \left(\nabla^2_{ij} u(x) \right) \right).$$

De (3.74) segue

$$\partial_1(\Delta u)(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{1ii}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right). \tag{3.75}$$

Substituindo (3.66), (3.67), (3.71), (3.72), (3.73), (3.74) e (3.75) em (3.70) se obtêm

$$\begin{aligned}
& n\partial_1 H(x_0) W_0^3 + n\partial_z H(x_0) \left\| \nabla u(x_0) \right\| W_0^3 - 3nAH_0W_0 \left\| \nabla u(x_0) \right\|^3 \\
= & -2A \left\| \nabla u(x_0) \right\|^3 \Delta u(x_0) + W_0^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{1ii}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right) \\
& + 2A \left\| \nabla u(x_0) \right\|^3 \partial_{11}u(x_0) \\
& - \left\| \nabla u(x_0) \right\|^2 \left(\partial_{111}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right) \\
= & -2A \left\| \nabla u(x_0) \right\|^3 \left(\Delta u(x_0) - \partial_{11}u(x_0) \right) \\
& + W_0^2 \sum_{i>1} \left(\partial_{1ii}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right) \\
& + W_0^2 \left(\partial_{111}u(x_0) - \left\| \nabla u(x_0) \right\| \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \right) \\
& - \left\| \nabla u(x_0) \right\|^2 \left(\partial_{111}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right) \\
= & -2A \left\| \nabla u(x_0) \right\|^3 \sum_{i>1} \partial_{ii}u(x_0) \\
& + W_0^2 \sum_{i>1} \left(\partial_{1ii}u(x_0) - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla u(x_0) \right\rangle \right) \\
& + \partial_{111}u(x_0) - \left\| \nabla u(x_0) \right\| \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Usando (3.61), (3.62), (3.69) e que

$$\mathrm{Ricc}_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \sum_{i>1}\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle,$$

obtemos

$$n\partial_1 H(x_0)W_0^3 + n\partial_z H(x_0)\left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^3 - 3nAH_0W_0\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3$$

$$\begin{aligned}
\leqslant &- 2A\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 \sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) \\
&+ W_0^2\sum_{i>1}\left(-A\partial_{ii}u(x_0)\left\|\nabla u(x_0)\right\| + \left\|\nabla u(x_0)\right\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle\right. \\
&\qquad\qquad\left. - \left\|\nabla u(x_0)\right\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle\right) \\
&+ 2A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 + \left\|\nabla u(x_0)\right\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle \\
&\qquad - \left\|\nabla u(x_0)\right\|\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &- 2A\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 \sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) \\
&- A\left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) + 2A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 \\
&+ \left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\sum_{i>1}\left(\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &\left(-2A\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 - A\left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\right)\sum_{i>1}\partial_{ii}u(x_0) \\
&+ 2A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 + \left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\sum_{i>1}\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leqslant &- A\left\|\nabla u(x_0)\right\|\left(1 + 3\left\|\nabla u(x_0)\right\|^2\right)\left(nH_0W_0 + \frac{A\left\|\nabla u(x_0)\right\|^2}{W_0^2}\right) \\
&+ 2A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 - \left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\,\mathrm{Ricc}_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &- A\left\|\nabla u(x_0)\right\| nH_0W_0\left(1 + 3\left\|\nabla u(x_0)\right\|^2\right) - \frac{A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3}{W_0^2}\left(1 + 3\left\|\nabla u(x_0)\right\|^2\right) \\
&+ 2A^2\left\|\nabla u(x_0)\right\|^3 - \left\|\nabla u(x_0)\right\| W_0^2\,\mathrm{Ricc}_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right).
\end{aligned}$$

Desde que $\partial_z H \geqslant 0$ obtemos

$$
\begin{aligned}
& n\partial_1 H W_0^3 \\
\leqslant & AnH_0W_0 \|\nabla u(x_0)\| \left(3\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1 - 3\|\nabla u(x_0)\|^2\right) \\
& + \frac{A^2\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^2}\left(2W_0^2 - 1 - 3\|\nabla u(x_0)\|^2\right) - \|\nabla u(x_0)\| W_0^2 \operatorname{Ricc}_{x_0}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & - AnH_0W_0\|\nabla u(x_0)\| + \frac{A^2\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^2}\left(1 - \|\nabla u(x_0)\|^2\right) \\
& - \|\nabla u(x_0)\| W_0^2 \operatorname{Ricc}_{x_0}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \tfrac{\partial}{\partial x_1}\right).
\end{aligned}
$$

Sejam

$$
\begin{aligned}
h_0 &= \sup_{\Omega\times\left[-\sup\limits_{\Omega}|u|,\sup\limits_{\Omega}|u|\right]} |H| \\
h_1 &= \sup_{\Omega\times\left[-\sup\limits_{\Omega}|u|,\sup\limits_{\Omega}|u|\right]} \left(\|\nabla_x H\| + \partial_z H\right).
\end{aligned}
$$

e $R \geqslant 0$ tal que $-\operatorname{Ricc} \leqslant R$ em Ω. Então

$$
\frac{A^2\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^2}\left(\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1\right) \leqslant Anh_0W_0\|\nabla u(x_0)\| + \|\nabla u(x_0)\| W_0^2 R + nh_1W_0^3.
$$

Dividindo por W_0^3 segue

$$
\begin{aligned}
\frac{A^2\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^5}\left(\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1\right) &\leqslant Anh_0\frac{\|\nabla u(x_0)\|}{W_0^2} + nh_1 + \frac{\|\nabla u(x_0)\|}{W_0}R, \\
&\leqslant Anh_0 + nh_1 + R, && (*) \\
&\leqslant An\left(h_0 + h_1 + R\right) && (**)
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ usamos o fato de $W_0^2 > W_0 > \|\nabla u(x_0)\|$, e em $(**)$ que $A, n > 1$. Denotando por $H_1 = h_0 + h_1$ e dividindo por A^2 obtemos

$$
\frac{\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^5}\left(\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1\right) < \frac{n}{A}\left(H_1 + R\right).
$$

Podemos supor que $\|\nabla u(x_0)\| > 1$. Como

$$
W_0^3 = \left(1 + \|\nabla u(x_0)\|^2\right)^{3/2} < \left(2\|\nabla u(x_0)\|^2\right)^{3/2} < 2\sqrt{2}\,\|\nabla u(x_0)\|^3 < 4\|\nabla u(x_0)\|^3,
$$

resulta
$$\frac{\|\nabla u\|^3}{W_0^3} > \frac{1}{4}.$$
Logo,
$$\frac{1}{4}\frac{\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1}{W_0^2} < \frac{\|\nabla u(x_0)\|^3}{W_0^3}\frac{\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1}{W_0^2} < \frac{n}{A}\left(H_1 + R\right),$$
isto é,
$$\frac{\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1}{\|\nabla u(x_0)\|^2 + 1} < \frac{4n}{A}\left(H_1 + R\right),$$
Escolhendo $A > 8n\left(H_1 + R\right)$ temos
$$\frac{\|\nabla u(x_0)\|^2 - 1}{\|\nabla u(x_0)\|^2 + 1} < \frac{1}{2},$$
donde
$$\|\nabla u(x_0)\| < \sqrt{3}.$$
Consequentemente,
$$w(x) \leqslant w(x_0) = \|\nabla u(x_0)\|\, e^{Au(x_0)} \leqslant \sqrt{3}\, e^{Au(x_0)}$$
e, portanto,
$$\sup_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \leqslant \sqrt{3}\, e^{2A \sup_{\Omega}|u|}. \tag{3.76}$$
Juntando (3.45) e (3.76) obtemos
$$\sup_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \leqslant \sqrt{3}\, e^{2A \sup_{\Omega}|u|} + \sup_{\partial\Omega} \|\nabla u\|\, e^{2A \sup_{\Omega}|u|},$$
Escolhendo
$$A = 1 + 8n\left(\|H\|_1 + R\right).$$
obtemos a estimativa desejada. ■

4
Resultados de Existência

Usando a teoria do grau de Leray-Schauder a solubilidade de um certo problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = nH(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \quad u = \varphi \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

depende fortemente de estimativas a priori na classe $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ para a família de problemas relacionados

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = \tau nH(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \quad u = \tau\varphi \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_τ}$$

independente de τ. As estimativas que foram estabelecidas no capítulo 3 são essenciais para os resultados de existência apresentados neste capítulo.

Teorema 4.1. *Sejam $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ e $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Seja $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $\partial_z H \geqslant 0$ e*

$$\mathrm{Ricc}_x \geqslant n \sup_{z\in\mathbb{R}} \|\nabla_x H(x,z)\| - \frac{n^2}{n-1} \inf_{z\in\mathbb{R}} \left(H(x,z)\right)^2, \;\; \forall \; x \in \Omega. \tag{4.1}$$

Se

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n\left|H(y,\tau\varphi(y))\right|, \;\; \forall \; \tau \in [0,1], \;\; \forall \; y \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

então o problema (P) possui uma única solução $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que para cada $\tau \in [0,1]$ e cada solução u do problema (P_τ), temos uma estimativa a priori na classe $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ para u independente de u e de τ. O teorema 3.2 nos da uma estimativa a priori da altura. Com efeito, notemos primeiramente que se u é uma solução do problema (P_τ), então em $\partial\Omega$ tem-se

$$u \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\tau\varphi| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\varphi| = w.$$

Além disso, uma vez que (3.15) vale segue

$$\mathcal{M}w \leqslant -\, n\,|H(x,\varphi(y))| \leqslant -n\tau\,|H(x,\varphi(y))| \leqslant \pm n\tau H\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega} |\varphi|\right).$$

Lembramos que $y(x) \in \partial\Omega$ é o ponto mais perto de x. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \pm\mathfrak{Q}_\tau(\pm w) =& \mathcal{M}w \mp n\tau H(x,\pm w) \\ \leqslant& \pm\, n\tau H\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega} |\varphi|\right) \mp n\tau H\left(x, \pm \sup_{\partial\Omega} \varphi\right). \end{aligned}$$

Logo, $\pm\mathfrak{Q}_\tau(\pm w) \leqslant 0$. Procedendo-se de maneira análoga à prova do teorema 3.2 deduz-se que w e $-w$ são uma barreira superior e inferior respectivamente para o problema (P_τ).

Por outro lado, do teorema 3.4 segue que ∇u é uniformemente limitado em $\partial\Omega$. Além disso, como qualquer solução u deste problema pertence a $\mathscr{C}^3(\Omega)$ (ver seção C.2), então ∇u é uniformemente limitado em $\overline{\Omega}$ pelo teorema 3.6 por uma constante que não depende de u nem de τ. Pela regularidade da equação da curvatura média, o teorema de Ladyzhenskaya e Ural'tseva (teorema A.3) garante a existência de $\beta \in (0,1)$ tal que

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leqslant C, \tag{4.3}$$

onde C é independente de u e de τ. O resto da prova segue a ideia da prova do teorema A.4. Assim, obtivemos uma solução do problema (P). A unicidade segue do princípio do máximo (teorema A.2). ■

Observação 4.2. Fixando $\tau \in (0,1)$ e aplicando o mesmo raciocínio às funções τH e $\tau\varphi$, obtemos solução do problema (P_τ) para cada $\tau \in [0,1]$.

Observação 4.3. Se $H = H(x)$, a estimativa interior devido a Spruck [8] permite que as soluções existam para cada $\varphi \in \mathscr{C}^0(\partial\Omega)$.

Na literatura temos o seguinte resultado de existência devido a Dajczer-Hinojosa-Lira [17] para gráficos de Killing, e que nós adaptamos ao nosso contexto:

Teorema de Djaczer-Hinojosa-Lira ([17, T. 1 p. 232]). *Seja $\Omega \in M$ um domínio com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Suponha que*

$$\mathrm{Ricc}_M \geqslant -(n-1) \inf_{\partial\Omega} \mathcal{H}^2_{\partial\Omega}. \tag{4.4}$$

Seja $H \in \mathscr{C}^\alpha(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Se

$$n \sup_{\Omega} |H| \leqslant (n-1) \inf_{\partial\Omega} \mathcal{H}_{\partial\Omega}, \tag{4.5}$$

então existe uma única função $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *tomando os valores* φ *em* $\partial\Omega$ *e cujo gráfico vertical em* $M \times \mathbb{R}$ *tem curvatura média* H.

Neste caso a hipótese (4.1) sobre a função H foi substituida pela condição geométrica (4.4). Essa condição garante a estimativa do gradiente no bordo como explicamos na seção 3.2. Entretanto note que a condição (1.10) foi substituída pela condição (4.5), muito mais forte. Portanto, o teorema 4.1 não está incluído no teorema de Djaczer-Hinojosa-Lira quando H depende apenas de x.

Por outro lado, Bérard-Sá Earp [18] demonstraram que para cada $H \in \left(0, \frac{n-1}{n}\right]$ existe uma hipersuperfície simplesmente conexa e completa S_H em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ que são gráficos verticais inteiros sobre $\mathbb{H}^n$ de curvatura média constante H. Tais hipersuperfície são dadas por fórmulas explícitas. O resultado específico que usaremos é uma parte do teorema 2.1 deste trabalho.

Teorema de Bérard-Sá Earp ([18, T. 2.1 p. 22]). *Existe um gráfico vertical inteiro e simplesmente conexo* $S_{\frac{n-1}{n}}$ *acima do slice* $t = 0$*, tangente ao mesmo em* 0 *e com curvatura média constante* $H = \frac{n-1}{n}$*. A função altura cresce exponencialmente.*

Com ajuda do teorema de Bérard-Sá Earp podemos estabelecer o seguinte resultado de existência.

Teorema 4.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega$ *de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *e* $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$*. Seja* $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *satisfazendo* $\partial_z H \geqslant 0$ *e* $\sup_{\Omega\times\mathbb{R}} |H| \leqslant \frac{n-1}{n}$*. Se*

$$(n-1)\mathcal{H}_{\partial\Omega}(y) \geqslant n \left| H\left(y, \tau\varphi(y)\right) \right|, \ \forall\ \tau \in [0,1], \ \forall\ y \in \partial\Omega,$$

então o problema de Dirichlet (P) *possui uma única solução* $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Chamaremos também de $S_{\frac{n-1}{n}}$ uma traslação vertical no sentido $z < 0$ do paraboloide dado no teorema de Bérard-Sá Earp contendo $\mathrm{Gr}(\varphi|_{\partial\Omega})$ na sua componente *mean convex*. Suponha por contradição que o gráfico S_τ de uma solução do problema (P_τ) ultrapassa $S_{\frac{n-1}{n}}$. Trasladamos $S_{\frac{n-1}{n}}$ verticalmente ainda no sentido de $z < 0$ até que não exista nenhum ponto de contato entre eles. Trasladando de volta teremos um primeiro ponto de contato interior aos dois gráficos. Isto é uma contradição pelo princípio do máximo já que

$$\sup_{\Omega\times\mathbb{R}} |\tau H| \leqslant \sup_{\Omega\times\mathbb{R}} |H| \leqslant \frac{n-1}{n}.$$

Portanto qualquer traslação vertical no sentido $z < 0$ de $S_{\frac{n-1}{n}}$ que contenha $\mathrm{Gr}(\varphi|_{\partial\Omega})$ constitui uma barreira inferior para as soluções de (P_τ).

Analogamente, fazendo uma reflexão do paraboloide dado pelo teorema, temos uma barreira superior para u. Isso fornece estimativa a priori de altura para a família de soluções dos problemas (P_τ) independente de τ.

Além disso, do teorema 3.5 segue uma estimativa a priori do gradiente em $\partial\Omega$. O resto da prova segue como no teorema 4.1. ■

Observamos que o teorema 4.4 estende o teorema de Spruck em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ devido a que nosso teorema permite considerar a igualdade na condição de Serrin (veja também observação 4.3). Isso decorre do teorema 3.5.

Referências Bibliográficas

[1] S. Bernstein, **Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale**, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **27** (1910), 233–256.

[2] J. Douglas, **Solution of the problem of Plateau**, Trans., Amer. Math. Soc. **33** (1931), 263–321.

[3] T. Radó, **The problem of the least area and the problem of Plateau**, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), no. 1, 763–796.

[4] R. Finn, **Remarks relevant to minimal surfaces, and to surfaces of prescribed mean curvature**, Journal d'Analyse Mathématique **14** (1965), no. 1, 139–160.

[5] H. Jenkins e J. Serrin, **The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions.**, Journal für die reine und angewandte Mathematik **229** (1968), 170–187.

[6] E. Bombieri, E. De Giorgi, e M. Miranda, **Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche**, Archive for Rational Mechanics and Analysis **32** (1969), no. 4, 255–267.

[7] J. Serrin, **The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables**, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **264** (1969), no. 1153, 413–496.

[8] J. Spruck, **Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in $\boldsymbol{M^n \times R}$**, Pure and Applied Mathematics Quarterly **3** (2007), no. 3, 785–800.

[9] A. Aiolfi, J. Ripoll, e M. Soret, **The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation on arbitrary domains of a Riemannian manifold**, manuscripta mathematica **149** (2016), 71–81.

[10] M. Telichevesky, **A note on minimal graphs over certain unbounded domains of Hadamard manifolds**, Pacific Journal of Mathematics **281** (2016), 243–255.

[11] E. M. Guio, **Estimativas a priori do gradiente, existência e não-existência, para uma equação da curvatura média no espaço hiperbólico**, Ph.D. thesis, PUC-Rio, 4 2003.

[12] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[13] R. Sá Earp e E. Toubiana, **Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann**, Cassini, 2009.

[14] L. Caffarelli, L. Nirenberg, e J. Spruck, **Nonlinear second order elliptic equations IV: Starshaped compact Weingarten hypersurfaces**, Current topics in partial differential equations (1986), 47–70.

[15] J. L. M. Barbosa e R. Sa Earp, **Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with Convex Planar Boundary, II**, Séminaire de théorie spectrale et géometrie, Grenoble **16** (1998), 43–79.

[16] B. Nelli e R. Sa Earp, **Some properties of hypersurfaces of prescribed mean curvature in H^{n+1}**, Bulletin des Sciences Mathématiques **120** (1996), 537–553.

[17] M. Dajczer, P. A. Hinojosa, e J. H. de Lira, **Killing graphs with prescribed mean curvature**, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **33** (2008), no. 2, 231–248.

[18] P. Bérard e R. Sa Earp, **Examples of H-hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and geometric applications**, Matemática Contemporânea **34** (2008), no. 2008, 19–51.

[19] W. Klingenberg, **A Course in Differential Geometry**, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1978.

[20] M. P. do Carmo, **Geometria Riemanniana**, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

[21] M. Alexandrino, **Hipersuperfícies de Nível de uma função Transnormal**, Master's thesis, PUC-Rio, 09 1997.

[22] M. P. do Carmo, **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[23] H. Hopf, **Differential Geometry in the Large: Seminar Lectures New York University 1946 and Stanford University 1956**, 2 ed., Lec. Notes in Math. 1000, Springer-Verlag, 1989.

[24] R. Sá Earp e E. Toubiana, **Variants on Alexandrov reflection principle and other applications of maximum principle**, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **19** (2000-2001), 93–121.

[25] B. Sirakov, **Modern theory of nonlinear elliptic PDE**, 07 2015, Notes to a course given at the 30th Colóquio Brasileiro de Matemática at IMPA.

[26] M. H. Protter e H. F. Weinberger, **Maximum Principles in Differential Equations**, Partial differential equations, Springer New York, 1999.

[27] Q. Han, **Nonlinear Elliptic Equations of the Second Order**, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2016.

[28] I. Ya. Bakel'man, **Geometric problems in quasilinear elliptic equations**, Russian Mathematical Surveys **25** (1970), no. 3, 45–109.

[29] E. M. Guio e R. Sá Earp, **Existence and non-existence for a mean curvature equation in hyperbolic space**, Communications on Pure & Applied Analysis **4** (2005), no. 3, 549–568.

[30] R. E. Greene e H. Wu, **Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole**, Lecture Notes in Mathematics, vol. 699, Springer-Verlag, 1979.

[31] A. Haar, **Über das Plateausche Problem**, Mathematische Annalen **97** (1927), 124–158.

[32] J. B. M. C. Meusnier, **Mémoire sur la courbure des surfaces**, Acad. Sci. Paris **10** (1777/1785), 477–510.

[33] M. Dajczer e J Ripoll, **An extension of a theorem of Serrin to graphs in warped products**, The Journal of Geometric Analysis **15** (2005), no. 2, 193–205.

[34] M. Dajczer, J. H. de Lira, e J. Ripoll, **An interior gradient estimate for the mean curvature equation of Killing graphs and applications**, Journal d'Analyse Mathématique **129** (2016), no. 1, 91–103.

[35] T. Marquardt, **Remark on the anisotropic prescribed mean curvature equation on arbitrary domains**, Mathematische Zeitschrift **264** (2010), no. 3, 507–511.

[36] J. A. Gálvez e V. Lozano, **Geometric barriers for the existence of hypersurfaces with prescribed curvatures in $M^n \times \mathbb{R}$**, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **54** (2015), no. 2, 2407–2419.

[37] L. J. Alías e M. Dajczer, **Constant mean curvature graphs in a class of warped product spaces**, Geometriae Dedicata **131** (2008), no. 1, 173–179.

[38] L. Caffarelli, L. Nirenberg, e J. Spruck, **The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian**, Acta Math. **155** (1985), 261–301.

[39] P. Petersen, **Riemannian Geometry**, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998.

[40] J. Barbosa, J. Gomes, e A. Silveira, **Foliation of 3-dimensional space forms by surfaces with constant mean curvature**, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática **18** (1987), 1–12.

[41] Y. Li e L. Nirenberg, **Regularity of the distance function to the boundary**, ArXiv Mathematics e-prints (2005).

[42] Robert L. Foote, **Regularity of the distance function**, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 153–155.

[43] I. Chavel, **Riemannian geometry: a modern introduction**, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2006.

[44] P.-A. Nitsche, **Existence of prescribed mean curvature graphs in hyperbolic space**, manuscripta mathematica **108** (2002), no. 3, 349–367.

Índice Remissivo

A
Resultados clássicos sobre equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem

Teorema A.1 (Regularidade interior de Schauder – [12, T. 6.17 p. 109]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e suponha que $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ satisfaz $\mathfrak{L}u = f$, onde $\mathfrak{L}$ é um operador linear estritamente elíptico. Assuma que os coeficientes de $\mathfrak{L}$ e f estão em $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\Omega)$. Então $u \in \mathscr{C}^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Se f e os coeficientes de $\mathfrak{L}$ estão em $\mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$, então $u \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$.*

Teorema A.2 (Príncipio da comparação — [12, T. 10.1 p. 263, T. 10.2 p. 264]). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u,\ v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}u \geqslant \mathfrak{Q}v & \text{em } \Omega, \\ u \leqslant v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\mathfrak{Q}$ é um operador quasilinear elíptico de segunda ordem definido por

$$\mathfrak{Q}u(x) := \sum_{ij} a_{ij}(x, u, \nabla u) D_{ij} u(x) + b(x, u, \nabla u).$$

Suponha que as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\mathfrak{Q}$ *é localmente estritamente elíptico com respeito a u ou v.*

(ii) a_{ij} *não dependem de z.*

(iii) b *é não crescente em z.*

(iv) a_{ij} *é localmente limitado em $\Omega \times \mathbb{R}^n$, e a_{ij} e b são continuamente diferenciáveis com respeito a p em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

Então $u \leqslant v$ em Ω. Se $\mathfrak{Q}u > \mathfrak{Q}v$ em Ω então $u < v$ em Ω. Se

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}u = \mathfrak{Q}v & \text{em } \Omega, \\ u = v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u = v$ em Ω.

Teorema A.3 (Ladyzhenskaya-Ural'tseva – [12, T. 13.7 p. 331]). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio com* $\partial\Omega$ *de classe* $\mathscr{C}^2$ *e* $\mathfrak{Q}$ *um operador elíptico em* $\overline{\Omega}$ *tal que* $a_{ij} \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *e* $b \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$*. Seja* $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}u = 0 \quad em \;\; \Omega, \\ \quad u = \varphi \quad em \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $\varphi \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$*. Então*

$$[u_i]_{\alpha,\Omega} < C \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

onde $C = C(n, \|u\|_{1,\Omega}, \|\varphi\|_{2,\Omega}, ..., \Omega)$ *e* $\alpha = \alpha(n, \|u\|_{1,\Omega}, ..., \Omega) > 0$.

Teorema A.4 ([12, T. 11.4 p. 281]). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio com* $\partial\Omega$ *de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$*. Sejam* $\varphi \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $\mathfrak{Q}$ *um operador elíptico em* $\overline{\Omega}$ *tal que* $a_{ij}, b \in \mathscr{C}^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$*. Assuma que para qualquer solução u do problema*

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}_\tau u & = \sum_{ij} a_{ij}(x, u, \nabla u)\partial_{ij}u + \tau b(x, u, \nabla u) = 0 \;\; em \;\; \Omega, \\ \quad u & = \tau\varphi \quad em \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

temos

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{1,\beta}} < M$$

para algum $\beta \in (0,1)$ *e* $M > 0$ *independente de* u *e* τ*. Segue que o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}u & = 0 \;\; em \;\; \Omega, \\ \quad u & = \varphi \quad em \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução em $\mathscr{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

B
Resultados clássicos de Geometria Diferencial

B.1
Função distância a um ponto

Definição B.1 (Função distância a um ponto). Seja M^n uma variedade Riemanniana. Definimos a *função distância a um ponto* fixado $y_0 \in \overline{M}$ como sendo a função

$$\begin{array}{rccl} \rho: & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{dist}(x, y_0). \end{array}$$

▼

Proposição B.1. *Seja M uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional constante c, $y_0 \in M$ e $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, y_0)$. Então*

$$\rho \in \mathscr{C}^2(M \setminus (\operatorname{cut}(y_0) \setminus \{y_0\})\,.$$

Proposição B.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, $y_0 \in M$ e $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, y_0)$. Seja $\gamma : [0, b] \to M \setminus \operatorname{cut}(y_0)$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco saindo de y_0. Então $\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para todo $t \in [0, b]$. Como consequência $\nabla\rho(x)$ é normal às esferas geodésicas. Além disso, se B é uma bola geodésica e $e_1, \ldots, e_{n-1}$ são as direções principais de ∂B em $x \in \partial B$ e λ_i as respectivas direções principais, então*

$$\lambda_i(x) = \nabla^2 \rho(x)(e_i, e_i)$$

para cada $x \in B$.

Teorema de comparação para o Hessiano e o Laplaciano

Teorema B.3 (Teorema de comparação do Hessiano e Laplaciano – [30, T. A p. 19]). *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas completas tal que $\dim(M_1) \leqslant \dim(M_2)$. Para $i = 1, 2$, seja $\gamma_i : [0, b] \to M_i$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que $p_i = \gamma_i(0)$ e $\gamma_i([0, b])$ não possui pontos conjugados a p_i. Seja ρ_i a função distância a p_i em M_i. Suponha que a curvatura radial K_2 ao longo de $\gamma_2(t)$ é maior o igual que a curvatura radial K_1 ao longo de $\gamma_1(t)$. Então, para cada $t \in [0, b]$, temos*

$$\nabla^2 \rho_2(\gamma_2(t))(X_2, X_2) \leqslant \nabla^2 \rho_1(\gamma_1(t))(X_1, X_1)$$

para todo $X_i \in T_{\gamma_i(t)}M_i$ *satisfazendo* $\|X_1\| = \|X_2\|$ *e* $\langle X_1, \gamma_1' \rangle = \langle X_2, \gamma_2' \rangle$. *Consequentemente,*

$$\Delta\rho_2(\gamma_2(t)) \leqslant \Delta\rho_1(\gamma_1(t)).$$

Demonstração. Notemos primeiramente que basta mostrar para vetores unitários ortogonais a γ'. Fixemos $t_0 \in [0, b]$. Para cada $i = 1, 2$, seja $x_i = \gamma_i(t_0)$ e $X_i \in T_{x_i}M_i$ tal que $\langle X_i, \gamma_i'(t_0) \rangle = 0$ e $\|X_i\| = 1$. Como não existem pontos conjugados a p_i em $\gamma_i([0, b])$, existe um campo de Jacobi J_i ao longo de γ_i tal que $J_i(0) = 0$ e $J_i(t_0) = X_i$. Note que $\langle J_i, \gamma_i' \rangle = 0$ ao longo de γ_i e $[J_i, \gamma_i'] = 0$ ao longo de γ_i. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \rho_i(x_i)(X_i, X_i) &= \Big\langle \nabla_{X_i} \nabla\rho_i(x_i), X_i \Big\rangle \\
&= \Big\langle \nabla_{J_i(t_0)} \nabla\rho_i(x_i), J_i(t_0) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \nabla_{J_i(t_0)} \gamma_i'(t_0), J_i(t_0) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \nabla_{\gamma_i'(t_0)} J_i(t_0), J_i(t_0) \Big\rangle \\
&= \langle J_i'(t_0), J_i(t_0) \rangle \\
&= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle J_i'(t), J_i(t) \rangle dt \\
&= \int_0^{t_0} \left(\langle J_i''(t), J_i(t) \rangle + \|J_i'(t)\|^2 \right) dt \\
&= \int_0^{t_0} \left(\|J_i'(t)\|^2 - \langle R(J_i(t), \gamma_i'(t))\gamma_i'(t), J_i(t) \rangle \right) dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla^2 \rho_i(x_i)(X_i, X_i) = I_{t_0}(J_i, J_i). \tag{B.1}$$

Seja $\{E_1^i, \ldots, E_{n-1}^i,\}$ uma base ortonormal de $T_{x_i}^{\perp}\gamma_i(t_0)$ tal que $E_1^i = X_i$, e seja $E_j^i(t)$ o transporte paralelo de E_j^i ao longo de γ_i. Definamos funções $h_j(t)$, $t \in [0, b]$ por

$$J_1(t) = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(t) E_j^1(t).$$

Note que $h_j(0) = 0$ para cada $1 \leqslant j \leqslant n-1$ e $h_j(t_0) = \delta_{1j}$. Definamos $J_2^*(t) = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(t) E_j^2(t)$. Então $J_2^*(0) = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(0) E_j^2(0) = 0 = J_2(0)$ e também $J_2^*(t_0) = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(t_0) E_j^2(t_0) = E_1^2(t_0) = X_2 = J_2(t_0)$. Pelo lema do índice temos

$$I_{t_0}(J_2, J_2) \leqslant I_{t_0}(J_2^*, J_2^*) = \int_0^{t_0} \left(\|J_2^{*\prime}(t)\|^2 - \langle R(J_2^*(t), \gamma_2'(t))\gamma_2'(t), J_2^*(t) \rangle \right) dt.$$

Agora, por hipóteses $K_2(J_2^*, \gamma_2') \geqslant K_1(J_1, \gamma_1')$. Além disso, como

$$\|J_2^*\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(t)^2 = \|J_1\|^2$$

então

$$\|J_2^* \wedge \gamma_2'\|^2 = \|J_2^*\|^2 \|\gamma_2'\|^2 - \langle J_2^*, \gamma_2' \rangle = \|J_1 \wedge \gamma_1'\|.$$

Consequentemente,

$$\langle R(J_2^*(t), \gamma_2'(t))\gamma_2'(t), J_2^*(t)\rangle = \|J_2^* \wedge \gamma_2'\|^2 K_2(J_2^*, \gamma_2') \geqslant \langle R(J_1(t), \gamma_1'(t))\gamma_1'(t), J_1(t)\rangle.$$

Também

$$\|J_2^{*\prime}\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} h_j'(t)^2 = \|J_1'\|^2.$$

Logo,

$$I_{t_0}(J_2^*, J_2^*) \leqslant I_{t_0}(J_1, J_1)$$

e, portanto,

$$I_{t_0}(J_2, J_2) \leqslant I_{t_0}(J_1, J_1).$$

De (B.1) temos

$$\nabla^2 \rho_2(x_2)(X_2, X_2) \leqslant \nabla^2 \rho_1(x_1)(X_1, X_1). \tag{B.2}$$

Consequentemente, se $\{X_1^i, \ldots, X_{n-1}^i, \gamma_i'\}$ é uma base ortonormal de $T_{x_i}M_i$, então

$$\Delta\rho_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \nabla^2 \rho_i(x_i)\left(X_j^i, X_j^i\right) + \nabla^2 \rho_i(x_i)\left(\nabla\rho_i(x_i), \nabla\rho_i(x_i)\right).$$

Como o segundo termo é nulo e vale (B.2), temos $\Delta\rho_2(x_2) \leqslant \Delta\rho_1(x_1)$. ∎

Proposição B.4 (Hessiano da função distância a um ponto em formas espaciais). *Seja M uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional constante c. Sejam $y_0 \in M$ e $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, y_0)$. Sejam $x \in M \setminus \mathrm{cut}(y_0)$, γ uma geodésica radial minimizante ligando x a y_0 e g solução de*

$$\begin{cases} g''(t) + cg(t) = & 0, \\ g(0) = & 0, \\ g(\rho(x)) = & 1. \end{cases} \tag{B.3}$$

Então, para cada $X \in T_xM$ satisfazendo $\langle X, \gamma' \rangle = 0$ e $\|X\| = 1$, temos

$$\nabla^2 \rho(x)(X,X) = g'(\rho(x)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x)} & \textit{se } c = 0, \\ \sqrt{c}\cot\left(\sqrt{c}\,\rho(x)\right) & \textit{se } c > 0, \\ \sqrt{-c}\coth\left(\sqrt{-c}\,\rho(x)\right) & \textit{se } c < 0. \end{cases} \tag{B.4}$$

Como consequência,

$$\Delta\rho(x) = (n-1)g'(\rho(x)). \tag{B.5}$$

Demonstração. Denotemos por $t_0 = \rho(x)$ e seja $X \in T_xM$ tal que $\langle X, \gamma'(t_0)\rangle = 0$ e $\|X\| = 1$. Como x não é conjugado a y_0, então existe um campo de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(0) = 0$, $J(t_0) = X$. Seja agora $X(t)$ o transporte paralelo de $X = X(t_0)$ ao longo de γ. Seja

$$\tilde{J}(t) = g(t)X(t),$$

onde g é a solução de (B.3). Então

$$\tilde{J}'(t) = g'(t)X(t) \quad \text{e} \quad \tilde{J}''(t) = g''(t)X(t),$$

e, portanto,

$$\tilde{J}''(t) + c\tilde{J}(t) = (g''(t) + cg(t))X(t) = 0.$$

Além disso, $\tilde{J}(0) = g(0)X(0) = 0$ e $\tilde{J}(t_0) = g(t_0)X(t_0) = X(t_0)$. Logo $J(t) = g(t)X(t)$ pela unicidade dos campos de Jacobi.

Por outro lado, da mesma forma que fizemos na prova do teorema anterior, temos

$$\nabla^2 \rho(x)(X,X) = \int_0^{t_0} \left(\|J'(t)\|^2 - \langle R(J(t),\gamma'(t),\gamma'(t)), J(t)\rangle\right) dt,$$

Substituindo a expressão de J, se obtêm

$$\nabla^2 \rho(x)(X,X) = \int_0^{t_0} \left(g'(t)^2 - g(t)^2 R(X(t),\gamma'(t),\gamma'(t),X(t))\right) dt. \tag{B.6}$$

Se M tem curvatura seccional constante c, então $R(X,\gamma',\gamma') = cX$, logo

$$\nabla^2 \rho(x)(X,X) = \int_0^{t_0} \left(g'(t)^2 - cg(t)^2\right) dt. \tag{B.7}$$

Logo, como g satisfaz (B.3) temos

$$g'(t)^2 - cg(t)^2 = g'(t)^2 + g(t)(-cg(t)) = g'(t)^2 + g(t)g''(t) = (g(t)g'(t))'$$

e, portanto

$$\nabla^2 \rho(x)(X,X) = \int_0^{t_0} (g(t)g'(t))'\, dt = g(t_0)g'(t_0) - g(0)g'(0) = g'(t_0). \tag{B.8}$$

Assim, se $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de S_{t_0} em x, então

$$\Delta\rho(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \nabla^2 \rho(x)\,(X_i, X_i) + \nabla^2 \rho(x)\,(\nabla\rho(x), \nabla\rho(x))\,.$$

Como o segundo termo é zero e vale (B.8), obtemos

$$\Delta\rho(x) = (n-1)g'(t_0) \qquad \blacksquare$$

Lema B.5 (Klingenberg – [20, Prop. 3.1 p. 305]). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa e de dimensão $n \geqslant 3$. Assuma que a curvatura seccional de M satisfaz $\frac{1}{4}K_0 < K \leqslant K_0$ para uma constante K_0 positiva. Então o raio de injetividade de M satisfaz $i(M) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$.*

Teorema B.6 ([19, Teo. 6.5.6 p. 151], [43, Teo. p. 107]). *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $\gamma(t)$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Se as curvaturas radiais ao longo de γ são limitadas superiormente por uma constante K_0, então $\gamma(0)$ não possui pontos conjugados ao longo de γ em $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right)$. Se $K_0 \leqslant 0$ interpretamos $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}} = \infty$.*

B.2 Função distância a uma hipersuperfície mergulhada

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção foram tomados de [21], dissertação de mestrado do ex-aluno do departamento de Matemática Marcos M. Alexandrino. Eventualmente damos outras referências.

Definição B.2 (Hipersuperfícies paralelas – [21, Def. 1.5 p. 15]). Sejam M^n uma variedade Riemanniana, e L e K duas hipersuperfícies merguhadas em M. Assuma que existe um campo normal unitário N a K. Se diz que L é paralela a K se existe $t_0 > 0$ tal que a função

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{t_0}: & K & \longrightarrow & L \\ & y & \longmapsto & \exp^{\perp}(y, t_0 N_y) = \exp_y(t_0 N_y), \end{array} \tag{B.9}$$

$\blacktriangledown$

Proposição B.7 ([21, Obs. 1.2 p. 16], [39, p. 119]). *Seja K uma hipersuperfície mergulhada de uma variedade Riemanniana M^n. Então para cada $y \in K$, existe uma vizinhança V de y e $\tau > 0$ tal que $\Phi_t(V \cap K)$ é paralela a V para todo $t < \tau$.*

Corolário B.8. *Seja Ω um domínio limitado de classe $\mathscr{C}^2$ em uma variedade Riemanniana M^n com $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$. Então existe $\tau > 0$ tal que a hipersuperfície $\Phi_t(\partial\Omega)$ é paralela a $\partial\Omega$ para todo $t \in [0, \tau)$.*

Lema B.9 (Curvaturas principais das paralelas em formas espaciais – [21, §1.5.1 p. 16]). *Sejam $M^n(c)$ uma variedade completa de curvatura seccional constante c, K uma hipersuperfície mergulhada em M e $y \in K$ fixado. Suponha que K_t é paralela a K para todo $t \in [0, \delta]$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n-1$ sejam $\lambda_i(t)$ a $i-$ésima curvatura principal de K_t em $x = \gamma_y(t)$ e g_i satisfazendo*

$$\begin{cases} g_i''(t) + cg_i(t) = & 0, \\ g_i(0) = & 1, \\ g_i'(0) = & -\lambda_i(0). \end{cases} \tag{B.10}$$

Então

$$\lambda_i(t) = -\frac{g_i'(t)}{g_i(t)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i(0)}{1-\lambda_i(0)t} & \text{se } c = 0, \\ \dfrac{\tan t + \lambda_i(0)}{1-\lambda_i(0)\tan t} & \text{se } c = 1, \\ \dfrac{-\tanh t + \lambda_i(0)}{1-\lambda_i(0)\tanh t} & \text{se } c = -1. \end{cases} \tag{B.11}$$

Definição B.3 (Função distância a uma hipersuperfície mergulhada). Seja M^n uma variedade Riemanniana. Definimos a *função distância a uma hipersuperfície mergulhada* K em M como sendo a função

$$\begin{array}{rccc} d: & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{dist}(x, K), \end{array}$$

onde

$$\operatorname{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} \operatorname{dist}(x, y). \qquad \blacktriangledown$$

Proposição B.10 ([43, p. 139]). *Seja K uma hipersuperfície mergulhada de uma variedade Riemanniana M^n. Então para qualquer curva γ parametrizada pelo comprimento de arco conectando $y \in K$ a $x \in M$ tem-se que $\ell(\gamma) = d(x) = d(x, K)$ somente se $\gamma = \gamma_y(tN_y) = \exp_y(tN_y)$ onde N_y é o normal a K em y.*

Proposição B.11 ([21, Prop. 1.5 p. 16]). *Seja K uma hipersuperfície mergulhada de uma variedade Riemanniana M^n. Suponha que $K_t = \Phi_t(K)$ é paralela a K para todo $t \in [0, \tau)$. Então $\nabla d(x)$ é normal a K_t em x para cada $x \in K_t$. Além disso, se denotamos por $\mathcal{H}_t$ a curvatura média de K_t, então*

$$\Delta d(x) = -(n-1)\mathcal{H}_t(x), \tag{B.12}$$

para cada $x \in K_t$, para cada $t \in [0, \tau)$.

Lema B.12 ([12, Lema 14.16 p. 355]). *Seja K uma hipersuperfície mergulhada e orientada de uma variedade Riemanniana M^n. Então existe $\tau > 0$ tal que $d \in \mathscr{C}^2\left(\{x \in M; 0 < d(x) < \tau\}\right)$.*

Lema B.13 ([8, Prop. 4.1 p. 794], [41],). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio limitado cuja fronteira é de classe $\mathscr{C}^2$. Seja*

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; \exists! y \in \partial\Omega; d(x) = d(x,y)\}.$$

Então $d \in \mathscr{C}^2(\Omega_0)$.

Corolário B.14 (Expressão infinitesimal da fórmula da segunda variação – [40, Teo. 2.7 p. 3]). *Seja K uma hipersuperfície mergulhada de uma variedade Riemanniana M^n. Suponha que K_t é paralela a K para todo $t \in [0,\tau)$. Seja $y \in K$ fixado. Denote por $\lambda_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, as curvaturas principais de K_t ao longo de $\gamma_y(t)$ e por $\mathcal{H}(t)$ a sua curvatura média. Então*

$$(n-1)\mathcal{H}'(t) = \mathrm{Ricc}_{\gamma(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t)) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t)^2. \tag{B.13}$$

Como consequência,

$$\mathcal{H}'(t) \geqslant \frac{\mathrm{Ricc}_{\gamma(t)}(\gamma_y'(t), \gamma_y'(t))}{n-1} + \mathcal{H}(t)^2. \tag{B.14}$$

Demonstração. Fixe t_0 e sejam $e_i = e_i(t_0)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, as direções principais de K_{t_0} em $x = \gamma_y(t_0)$. Seja $e_i(t)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de γ_y. Da proposição B.11 tem-se

$$-(n-1)\mathcal{H}(t) = \Delta d(\gamma_y(t)). \tag{B.15}$$

Derivando esta equação com respeito a t e avaliando em $t = t_0$ se obtêm

$$\begin{aligned}
-(n-1)\mathcal{H}'(t_0) &= \frac{d}{dt} \operatorname{div} \nabla d(\gamma_y(t))\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt} \operatorname{div} \gamma_y'(t)\Big|_{t=t_0} && (*) \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i(t)} \gamma_y'(t), e_i(t) \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)} \gamma_y'(t), \gamma_y'(t) \right\rangle \Big|_{t=t_0} && (**) \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i(t)} \gamma_y'(t), e_i(t) \right\rangle \Big|_{t=t_0}, && (***)
\end{aligned}$$

tomando em conta que em $(*)$ e $(**)$ foi usado que $\gamma_y'(t)$ e $\nabla d(\gamma_y(t))$ são o normal unitário a M_t em $\gamma_y(t)$ e em $(***)$ se usou o fato de que γ_y é uma geodésica. Usando agora as propriedades da métrica segue

$$
\begin{aligned}
&-(n-1)\mathcal{H}'(t_0)\\
=&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n-1}\left(e_i(t)\left\langle\gamma_y'(t),e_i(t)\right\rangle-\left\langle\gamma_y'(t),\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)\right\rangle\right)\Big|_{t=t_0}\\
=&-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\gamma_y'(t),\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)\right\rangle\Big|_{t=t_0}\\
=&-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left\langle\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}\gamma_y'(t),\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)\right\rangle+\left\langle\gamma_y'(t),\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)\right\rangle\right)\Big|_{t=t_0}\\
=&-\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\gamma_y'(t),\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)\right\rangle\Big|_{t=t_0}\\
=&-\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}\overline{\nabla}_{e_i(t)}e_i(t)-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}e_i(t)-\overline{\nabla}_{[\gamma_y'(t),e_i(t)]}e_i(t),\gamma_y'(t)\right\rangle\Big|_{t=t_0}\\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\overline{\nabla}_{[\gamma_y'(t),e_i(t)]}e_i(t),\gamma_y'(t)\right\rangle\Big|_{t=t_0},
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que e_i é paralelo ao longo de γ_y para cada $1\leqslant i\leqslant n-1$. Além disso,

$$\left[\gamma_y'(t),e_i(t)\right]=\overline{\nabla}_{\gamma_y'(t)}e_i(t)-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\gamma_y'(t)=-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\gamma_y'(t),$$

logo

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\overline{\nabla}_{[\gamma_y'(t),e_i(t)]}e_i(t),\gamma_y'(t)\right\rangle\\
=&-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\gamma_y'(t)\left\langle e_i(t),\gamma_y'(t)\right\rangle-\left\langle e_i(t),\overline{\nabla}_{-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\gamma_y'(t)}\gamma_y'(t)\right\rangle\\
=&-\left\langle e_i(t),\overline{\nabla}_{-\overline{\nabla}_{e_i(t)}\gamma_y'(t)}\gamma_y'(t)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Avaliando em t_0 temos

$$
\begin{aligned}
&-(n-1)\mathcal{H}'(t_0)\\
=&-\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle R\left(\gamma_y'(t_0),e_i(t_0)\right)e_i(t_0),\gamma_y'(t_0)\right\rangle+\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle e_i(t_0),\overline{\nabla}_{\lambda_i(t_0)e_i(t_0)}\gamma_y'(t_0)\right\rangle\\
=&-\sum_{i=1}^{n-1}K(\gamma_y'(t_0),e_i'(t_0))+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(t_0)\left\langle e_i(t_0),\overline{\nabla}_{e_i(t_0)}\gamma_y'(t_0)\right\rangle\\
=&-\mathrm{Ricc}_{\gamma(t_0)}(\gamma_y'(t_0),\gamma_y'(t_0))-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(t_0)^2.
\end{aligned}
$$

Como t_0 é qualquer temos (B.13). A desigualdade (B.14) é consequência direta da desigualdade entre as médias quadrática e aritmética. ∎

C
A equação da curvatura média para gráficos verticais em $M \times \mathbb{R}$

Seja S uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana M. Sabemos que num sistema de coordenadas a curvatura média de S pode ser calculada segundo a expressão

$$nH = \operatorname{tr}(A_N) = \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} b_{ij} \tag{C.1}$$

onde g é a métrica induzida em S e $b_{ij} = II(X_i, X_j)$ são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Suponhamos agora que S é o gráfico vertical sobre um domínio $\Omega \subset M$ de uma função $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$. Isto é,

$$S = \{(x, u(x)); x \in \Omega\}.$$

Denotemos por σ_{ij} a métrica de M e por z a coordenada para $\mathbb{R}$. Vamos munir $M \times \mathbb{R}$ com a métrica produto $d\overline{g} = ds^2 + dz^2$. A base tangente para estas coordenadas é $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Dessa forma, para cada $1 \leqslant i, j \leqslant n$, tem-se $\overline{g}_{ij} = \sigma_{ij}$, $\overline{g}_{iz} = \overline{g}_{zj} = 0$ e $\overline{g}_{zz} = 1$.

Definindo

$$\begin{array}{rccl} F: & \Omega & \longrightarrow & M \times \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x, u(x)), \end{array}$$

temos $S = F(\Omega)$. Logo, os vetores coordenados estão dados por $X_i = dF_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \partial_i u \frac{\partial}{\partial z}$. Portanto, os coeficientes da métrica g induzida em S estão dados por

$$g_{ij} = \sigma_{ij} + \partial_i u \partial_j u.$$

É fácil observar que

$$g^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}. \tag{C.2}$$

Além disso, o campo normal a S é

$$N = \frac{-\nabla u(x) + \frac{\partial}{\partial z}}{W},$$

onde

$$W = \sqrt{1 + \|\nabla u(x)\|^2}.$$

Por outro lado, os coeficientes da segunda forma fundamental neste caso estão dados por

$$b_{ij} = II(X_i, X_j) = \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_i} X_j \right\rangle_{M\times\mathbb{R}} = \frac{1}{W}\left\langle -\nabla u + \tfrac{\partial}{\partial z}, \overline{\nabla}_{X_i} X_j \right\rangle_{M\times\mathbb{R}}.$$

Desde que $\overline{\nabla}_{X_i} X_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \partial_{ij} u \frac{\partial}{\partial z}$, segue-se

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{1}{W}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j}, -\nabla u \right\rangle_M + \frac{1}{W}\partial_{ij} u \\ &= -\frac{1}{W}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left\langle \tfrac{\partial}{\partial x_j}, \nabla u\right\rangle_M - \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla u \right\rangle_M \right) + \frac{1}{W}\partial_{ij} u \\ &= -\frac{1}{W}\left(\partial_{ij} u - \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla u \right\rangle_M \right) + \frac{1}{W}\partial_{ij} u, \end{aligned}$$

portanto

$$b_{ij} = \frac{1}{W}\nabla^2_{ij} u. \tag{C.3}$$

Substituindo (C.2) e (C.3) em (C.1), vemos que u satisfaz a equação

$$\mathcal{M}u = \frac{1}{W}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\right)\nabla^2_{ij} u = nH(x,u). \tag{C.4}$$

Se denotamos por A a matriz do operador $\mathcal{M}$, então $A = \frac{1}{W}g^{-1}$. Portanto os autovalores de A são positivos. Alem disso, os autovalores dependem de x e do gradiente de u, logo $\mathcal{M}$ é localmente uniformemente elíptico. Além disso, se Ω for limitado e $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, então $\mathcal{M}$ é uniformemente elíptico.

Ao longo do texto usamos também a seguinte equação equivalente

$$\mathcal{M}u = \sum_{i,j=1}^{n}\left(W^2\sigma^{ij} - u^i u^j\right)\nabla^2_{ij} u = nH(x,u)W^3. \tag{C.5}$$

C.1 Fórmulas de Transformação para a equação da curvatura média

Primeiramente note que o operador $\mathcal{M}$ em (C.5) pode ser escrito como

$$\mathcal{M}u = W^2\Delta u(x) - \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u). \tag{C.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}u =& W^2 \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^{ij} \nabla^2_{ij} u - \sum_{i,j=1}^{n} u^i u^j \nabla^2_{ij} u \\ =& W^2 \Delta u - \sum_{i=1}^{n} u^i \sum_{j=1}^{n} u^j \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla u, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle \\ =& W^2 \Delta u - \big\langle \nabla_{\nabla u} \nabla u, \nabla u \big\rangle.\end{aligned}$$

Sejam $\Omega \in M$ um domínio limitado e $\varphi \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\psi \in \mathscr{C}^2(I)$. Definamos

$$w = \psi \circ \varrho + \varphi,$$

onde ϱ é uma função distância (veja seções B.2 e B.1). Então, $\partial_i w = \psi' \partial_i \varrho + \partial_i \varphi$ e $w^i = \psi' \varrho^i + \varphi^i$ e, portanto $\nabla w = \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi$. Daí,

$$\begin{aligned}\nabla^2_{ij} w &= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla w, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle \\ &= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi), \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle \\ &= \Big\langle \psi'' \partial_i \varrho \nabla \varrho + \psi' \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla \varrho + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla \varphi, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle \\ &= \psi'' \partial_i \varrho \big\langle \nabla \varrho, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \big\rangle + \psi' \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla \varrho, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle + \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla \varphi, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \Big\rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla^2_{ij} w = \psi'' \partial_i \varrho \partial_j \varrho + \psi' \nabla^2_{ij} \varrho + \nabla^2_{ij} \varphi \tag{C.7}$$

$$= \psi'' \big\langle \nabla \varrho, \tfrac{\partial}{\partial x_i} \big\rangle \big\langle \nabla \varrho, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \big\rangle + \psi' \, \nabla^2 \varrho \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \right) + \nabla^2 \varphi \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{C.8}$$

Assim, por un lado, usando (C.7), temos

$$\begin{aligned}\Delta w(x) =& \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \nabla^2_{ij} w \\ =& \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \left(\psi'' \partial_i \varrho \partial_j \varrho + \psi' \nabla^2_{ij} \varrho + \nabla^2_{ij} \varphi \right) \\ =& \psi'' \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \partial_i \varrho \partial_j \varrho + \psi' \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \nabla^2_{ij} \varrho + \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \nabla^2_{ij} \varphi.\end{aligned}$$

Como ϱ é uma função distância, então

$$\sum_{i,j} \sigma^{ij}(x) \partial_i \varrho \partial_j \varrho = \|\nabla \varrho\|^2 = 1.$$

Logo,

$$\Delta w(x) = \psi'' + \psi' \Delta \varrho + \Delta \varphi. \tag{C.9}$$

Por outro lado, de (C.8) obtemos

$$\nabla^2 w(X,Y) = \psi'' \langle \nabla \varrho, X \rangle \langle \nabla \varrho, Y \rangle + \psi' \, \nabla^2 \varrho(X,Y) + \nabla^2 \varphi(X,Y),$$

para quaisquer X e Y. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w(\nabla w, \nabla w) =& \psi'' \langle \nabla \varrho, \nabla w \rangle^2 + \psi' \, \nabla^2 \varrho(\nabla w, \nabla w) + \nabla^2 \varphi(\nabla w, \nabla w) \\
=& \psi'' \langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi \rangle^2 + \psi' \, \nabla^2 \varrho(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi) \\
& + \nabla^2 \varphi(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi) \\
=& \psi'' \langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi \rangle^2 \\
& + \psi' \left(\psi'^2 \, \nabla^2 \varrho(\nabla \varrho, \nabla \varrho) + 2\psi' \, \nabla^2 \varrho(\nabla \varrho, \nabla \varphi) + \nabla^2 \varrho(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \right) \\
& + \nabla^2 \varphi(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi).
\end{aligned}$$

Também,

$$\nabla^2 \varrho(\nabla \varrho, X) = \nabla^2 \varrho(X, \nabla \varrho) = \left\langle \nabla_X \nabla \varrho, \nabla \varrho \right\rangle = \frac{1}{2} X \left(\|\nabla \varrho\|^2 \right) = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w(\nabla w, \nabla w) = \psi'' \langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi \rangle^2 + \psi' \, \nabla^2 \varrho(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \\
+ \nabla^2 \varphi(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Substituindo (C.9) e (C.10) em (C.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} w =& W^2(\psi'' + \psi' \Delta \varrho + \Delta \varphi) - \Big(\psi'' \langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi \rangle^2 + \psi' \, \nabla^2 \varrho(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \\
& + \nabla^2 \varphi(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi) \Big),
\end{aligned}$$

onde $W = W(\nabla w) = \sqrt{1 + \|\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi\|^2}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} w =& \psi' W^2 \Delta \varrho + \psi'' W^2 - \psi'' \langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi \rangle^2 \\
& - \psi' \, \nabla^2 \varrho(\nabla \varphi, \nabla \varphi) - \nabla^2 \varphi(\psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi, \psi' \nabla \varrho + \nabla \varphi).
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Além disso, se φ for constante, então $W^2 = 1 + \psi'^2$ e $\langle \nabla \varrho, \psi' \nabla \varrho \rangle^2 = \psi'^2$. Logo,

$$\mathcal{M} w = \psi'(1 + \psi'^2) \Delta \varrho + \psi''. \tag{C.12}$$

Análogamente, se $\mathcal{M}$ está dado pela expressão (C.4), segue

$$\mathcal{M} w = \frac{\psi'}{(1 + \psi'^2)^{1/2}} \Delta \varrho + \frac{\psi''}{(1 + \psi'^2)^{3/2}}. \tag{C.13}$$

C.2 Regularidade das soluções da equação da curvatura média

Consideremos a equação (C.4). Seja $\Omega \subset M$ um domínio e assuma que $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\Omega \times \mathbb{R})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Seja $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ satisfazendo $\mathcal{M}u = nH(x,u)$ em Ω. Em coordenadas locais temos

$$\mathcal{M}u = \sum_{ij} \frac{1}{W}\left(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\right)\partial_{ij}u - \sum_i \sum_{kl} \frac{1}{W}\left(\sigma^{kl} - \frac{u^k u^l}{W^2}\right)\Gamma^i_{kl}\partial_i u.$$

Se denotamos por

$$a_{ij}(x, \nabla u) = \frac{1}{W}\left(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\right),$$

e

$$b_i(x, \nabla u) = -\sum_{kl} \frac{1}{W}\left(\sigma^{kl} - \frac{u^k u^l}{W^2}\right)\Gamma^i_{kl} = -\sum_{kl} a_{kl}\Gamma^i_{kl}$$

vemos que u satisfaz a equação

$$\mathfrak{L}^u u = \sum_{ij} a^u_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_i b^u_i(x)\partial_i u = f^u(x),$$

onde $a^u_{ij}(x) = a_{ij}(x, \nabla u(x))$, $b^u_i(x) = b_i(x, u(x))$ e $f^u(x) = nH(x, u(x))$. Note que os coeficientes de $\mathfrak{L}^u$ e f^u pertencem a $\mathscr{C}^\alpha(\Omega)$, segue que $u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ pelo teorema de regularidade interior de Schauder (vide teorema A.1). Como $H \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\Omega)$, podemos repetir o mesmo argumento para obtermos $u \in \mathscr{C}^{3,\alpha}(\Omega)$.