



Fernanda Py Silva Cordeiro

**Comportamento das linhas de curvatura de
uma superfície no 3-espaço euclidiano próximo
a um ponto umbílico**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
abril de 2019



Fernanda Py Silva Cordeiro

**Comportamento das linhas de curvatura de
uma superfície no 3-espaço euclidiano próximo
a um ponto umbílico**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. David Martinez Torres

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ralph Costa Teixeira

Instituto de Matemática e Estatística – UFF

Prof. Ronaldo Alves Garcia

Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fernanda Py Silva Cordeiro

Graduou-se em Matemática-Licenciatura pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

Ficha Catalográfica

Py Silva Cordeiro, Fernanda

Comportamento das linhas de curvatura de uma superfície no 3-espço euclidiano próximo a um ponto umbílico / Fernanda Py Silva Cordeiro; orientador: Marcos Craizer. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática , 2019.

v., 47 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática .

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Direções principais;. 3. Pontos umbílicos de Darboux;. 4. Superfícies genéricas.. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática . III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Marcos Craizer, que verdadeiramente me orientou, pelo tempo dedicado, pela paciência e pelos conhecimentos passados.

Agradeço a Ralph Teixeira, David Torres e Ronaldo Alves por aceitarem fazer parte da banca. Fico honrada de ter matemáticos de tamanho respeito e que tanto admiro presentes nesse momento.

Agradeço à minha família e amigos, pelo apoio. Em especial a Leonardo Cabral, por toda ajuda e por sempre acreditar em mim.

Finalmente, agradeço à PUC-Rio e ao departamento de matemática, pela oportunidade de estudar em um lugar muito agradável e com pessoas de grande valor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Py Silva Cordeiro, Fernanda; Craizer, Marcos. **Comportamento das linhas de curvatura de uma superfície no 3-espaço euclidiano próximo a um ponto umbílico**. Rio de Janeiro, 2019. 47p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desse trabalho é entender o comportamento das direções principais de uma superfície perto de um ponto umbílico isolado. Trataremos inicialmente dos pontos umbílicos de Darboux. Nesse caso temos, essencialmente, três comportamentos distintos das linhas de curvatura. Também falaremos sobre pontos umbílicos isolados em superfícies com curvatura média constante. Nesse contexto, temos infinitas possibilidades para o comportamento das linhas de curvatura.

Palavras-chave

Direções principais; Pontos umbílicos de Darboux; Superfícies genéricas.

Abstract

Py Silva Cordeiro, Fernanda; Craizer, Marcos (Advisor). **Behavior of curvature lines of a surface in Euclidean 3-space close to an umbilical point**. Rio de Janeiro, 2019. 47p. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática , Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this work is to understand the behavior of principal directions of a surface near an isolated umbilical point. Initially, we will deal with a Darbouxian Umbilical Point. In this case, we essentially have three distinct behaviors of curvature lines. We also discuss isolated umbilical points in surfaces with constant mean curvature. In this context, we have infinite possibilities for the behavior of curvature lines.

Keywords

Principal directions; Darbouxian umbilical points; generic surfaces.

Sumário

1	Introdução	9
2	Noções de geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$	12
3	Pontos umbílicos de Darboux	15
3.1	A condição T	17
3.2	A condição D	19
4	Pontos umbílicos de Darboux - Parte II	27
4.1	Formas quadráticas	27
4.2	Formas cúbicas	28
4.3	Notação complexa	32
5	Pontos umbílicos em superfícies com curvatura média constante	38
5.1	Pontos umbílicos de Darboux em superfícies com curvatura média constante	44

Lista de figuras

Figura 3.1	Superfície S_p de um ponto umbílico de Darboux que satisfaz a condição D1.	18
Figura 3.2	Projeção das linhas de curvatura na condição D1	23
Figura 3.3	Projeção das linhas de curvatura na condição D2	24
Figura 3.4	Projeção das linhas de curvatura na condição D3	25
Figura 3.5	<i>Lemon</i> - possui apenas uma direção do ponto umbílico por linhas de curvatura. O índice das direções principais no ponto umbílico é $\frac{1}{2}$	25
Figura 3.6	<i>Monstar</i> - Possui três direções contidas num setor angular, com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$, de aproximação do ponto umbílico por linhas de curvatura. O índice é $\frac{1}{2}$.	26
Figura 3.7	<i>Star</i> -As três direções cujas linhas de curvatura se aproximam não estão contidas num setor angular com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$. O índice é $\frac{-1}{2}$	26
Figura 4.1	Deltóide	33
Figura 4.2	Classificação dos pontos umbílicos no plano β	36
Figura 4.3	<i>Eternity</i>	37
Figura 5.1	Mudança de coordenadas	39
Figura 5.2	n=1	44
Figura 5.3	n=2	45
Figura 5.4	n=3	45

1

Introdução

Neste trabalho concentraremos nossos estudos no comportamento das linhas de curvatura perto de pontos umbílicos isolados. O capítulo 2 foi baseado na referência (1), o 3 foi baseado nas referências (3) e (4), o capítulo 4 em (2) e por fim, o capítulo 5 basea-se em (5).

Começaremos analisando as direções principais perto de pontos umbílicos de Darboux. p é um ponto umbílico de Darboux se satisfaz duas condições. A primeira condição nos permite construir uma nova superfície regular S_p tal que a coordenada w de um ponto $(x, y, w) \in S_p$ coincide com a declividade da projeção de uma direção principal do ponto $\alpha(x, y)$ de S no plano (x, y) .

Na superfície S_p encontramos um campo de vetores cuja a projeção da direção de seus vetores no plano (x, y) coincide com a projeção das direções principais de S .

Portanto, a projeção das curvas integrais de S_p representa para S as suas linhas de curvatura.

A segunda condição, é subdividida em três condições e cada uma delas está relacionada com um possível comportamento das linhas de curvatura, que está ligado a quantidade e comportamento das separatrizes. Veja as figuras 3.5, 3.6 e 3.7. Esses comportamentos foram nomeados por Hannay (3) como *Lemon*, *Monstar* e *Star*. As condições:

- D1 - *Lemon*: É a projeção de um ponto de sela.
- D2 - *Monstar*: É a projeção de um ponto de nó entre dois pontos de sela.
- D3 - *Star*: É a projeção de três pontos de sela.

Em seguida analisamos os pontos umbílicos de Darboux de uma outra forma. Para isso, inicialmente foram apresentados conceitos e proposições sobre formas quadráticas e formas cúbicas. Em seguida representamos essas formas utilizando notação complexa.

Assim, a partir de uma relação de equivalência, conseguimos representar uma classe de equivalência das formas cúbicas usando apenas 1 parâmetro complexo β ou 2 parâmetros reais.

Verificamos que o Jacobiano, definido em 4.7, entre a forma cúbica

$$C(x, y) = \frac{1}{6} (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)$$

e a forma quadrática $Q(x, y) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2)$, é equivalente à forma cúbica que determina as separatrizes de um ponto umbílico.

Observamos que esse Jacobiano possui duas raízes coincidentes se o parâmetro β que representa a cúbica estiver no círculo unitário. E possui duas raízes cujas retas que tem esses valores como declividade se o parâmetro β pertence a reflexão da cúspide que é três vezes maior que o deltóide. Ver figura 4.2.

Essas são as curvas que limitam, no plano β , as regiões que representam as condições $D1$, $D2$ e $D3$ de Darboux.

Posteriormente, direcionamos nossos estudos para superfícies que possuem curvatura média constante.

Consideramos $X(u, v)$ um sistema de coordenadas isotérmicas, isto é, um sistema de coordenadas cujos coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$. Associamos a $X(u, v)$ uma função complexa $\phi(u + iv) = \frac{e - g}{2} - if$. Pois, mais adiante, a igualdade

$$\text{Im}(\phi(w)(dw)^2) = f dv^2 + (e - g) dudv - f du^2 \quad (1-1)$$

nos será útil para a compreensão do comportamento das linhas de curvatura.

Verificamos, também com o auxílio da função complexa ϕ , que os pontos umbílicos de superfícies que possuem curvatura média constante, com a exceção do plano e da esfera, são isolados.

Confirmamos que se $X(u, v)$ é uma carta isotérmica de uma superfície e $\tilde{z}(u + iv) = \tilde{u}(u, v) + i\tilde{v}(u, v)$ é um difeomorfismo holomorfo, então a carta $Y(\tilde{u}, \tilde{v})$ que satisfaz $Y(\tilde{z}) = X$ também é uma carta isotérmica.

E usamos a relação $\phi(z) = \tilde{\phi}(\tilde{z}(z)) \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}(z) \right)^2$ para verificar a existência de um sistema de coordenadas isotérmicas tal que a função complexa a ela associada é dada por $\phi(z) = z^n$.

Por fim, utilizando esse sistema de coordenadas isotérmicas e a igualdade 1-1, observamos que existem infinitas possibilidades para o comportamento das linhas de curvatura. Tais possibilidades dependem de $n \in \mathbb{N}$. Observamos também que o índice do ponto umbílico é $\frac{-n}{2}$. Observe a figura 5.2.

Para entender a relação entre os dois tipos de pontos umbílicos abordados, tomamos a parametrização de Monge de uma superfície com curvatura média constante. Notamos que não existem pontos umbílicos de Darboux do

tipo *Lemon* e do tipo *Monstar* numa superfície com curvatura média constante.

Perecebemos junto a isso, que nas superfícies com curvatura média constante, os pontos umbílicos com $n \neq 1$ não são pontos de Darboux pois sua parametrização de Monge não irá satisfazer a primeira condição de Darboux.

Neste capítulo enunciaremos conceitos básicos de geometria diferencial essenciais para o entendimento dos próximos capítulos. Não serão feitas as demonstrações dos teoremas e das proposições enunciadas aqui. Essas demonstrações podem ser encontradas em (1).

Definição 2.1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação diferenciável $x : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que x é um homeomorfismo diferenciável e para todo $q \in U$, a diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Definição 2.2 *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$, dizemos que p é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p)$ de um ponto crítico é chamado um valor crítico de F . Um ponto de $\mathbb{R}$ que não é um valor crítico de F é chamado um valor regular de F .*

Proposição 2.3 *Se $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in F(U)$ é um valor regular de F , então $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.*

Definição 2.4 *Seja $w \in T_p S$. A forma quadrática $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2$ é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.*

Podemos expressar a primeira forma fundamental em termos de $\{x_u, x_v\}$. Seja $w = ax_u + bx_v \in T_p S$. Pegue uma curva $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ em S tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Nesse caso, $a = u'(t)$ e $b = v'(t)$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle x_u u' + x_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_p \\ &= \langle x_u, x_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle x_u, x_v \rangle_p u' v' + \langle x_v, x_v \rangle_p (v')^2 \end{aligned}$$

Considerando

$$E = \langle x_u, x_u \rangle_p,$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle_p \text{ e}$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle_p.$$

Temos $I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$. E , F e G são chamados os coeficientes da primeira forma fundamental.

Definição 2.5 *Seja S uma superfície com orientação. A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$N(q) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}(q) \quad (2-1)$$

que toma seus valores na esfera unitária S^2 é chamada a aplicação de Gauss de S .

Proposição 2.6 *A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Definição 2.7 *Seja $v \in T_p S$. A forma quadrática $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .*

Definição 2.8 *Seja, $C \subset S$ uma curva regular que contém p , k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor unitário normal a C e N é o vetor normal unitário a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a curvatura normal de C em p .*

Proposição 2.9 *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal. Nomeadamente, $k_n(p) = II_p(w)$, sendo w um vetor normal unitário paralelo à reta tangente.*

Teorema 2.10 *Sendo $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ uma aplicação linear auto-adjunta. Existe um base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tais que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Os valores k_1 e k_2 , $k_1 \geq k_2$, são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $II_p(v) = \langle dN_p v, v \rangle$ sobre o círculo unitário de $T_p S$.*

Definição 2.11 *O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , são chamados curvaturas principais em p . As direções correspondentes e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .*

Definição 2.12 *Seja $C \subset S$ uma curva tal que para todo ponto $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p , então dizemos que C é uma linha de curvatura de S .*

Definição 2.13 Seja $p \in S$. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média H de S em p . Em termos das curvaturas principais temos $K = k_1 k_2$ e $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Definição 2.14 Se em $p \in S$, $k_1 = k_2$, então p é chamado um ponto umbílico de S .

Observação 2.0.1 A expressão da segunda forma fundamental na base $\{x_u, x_v\}$ é dada por $II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$, sendo

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = -\langle N_u, x_u \rangle,$$

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = -\langle N_v, x_u \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle \quad e$$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = -\langle N_v, x_v \rangle.$$

e, f e g são chamados os coeficientes da segunda forma fundamental.

Observação 2.0.2 É possível escrever a matriz de dN_p em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Consequentemente, temos também as curvaturas Gaussiana e média, sendo $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ e

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (2-2)$$

Observação 2.0.3 Segue da definição de linha de curvatura que, para que uma curva $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ seja uma linha de curvatura de S , é necessário e suficiente que $dN(\alpha(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$. A partir daí obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0. \quad (2-3)$$

Definição 2.15 Sejam E, F espaços vetoriais. Uma forma bilinear $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $b(u, v)$ linear em cada uma de suas variáveis $u \in E, v \in F$.

3

Pontos umbílicos de Darboux

Para toda superfície S com um ponto umbílico p_0 , existe, numa vizinhança de p_0 , uma parametrização de Monge $\alpha(x, y) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S, p_0)$,

$$\alpha(x, y) = (x, y, h(x, y)). \quad (3-1)$$

Sendo $h(x, y)$ definida por,

$$h(x, y) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2) + \frac{a}{6} x^3 + \frac{b}{2} x^2 y + \frac{c}{2} x y^2 + \frac{d}{6} y^3 + 0[4]. \quad (3-2)$$

Conseguimos essa carta com a inversa da projeção da superfície no plano tangente a S em p_0 e escolhendo em $T_{p_0}S$ uma base x, y ortonormal adequada, conseguimos zerar o coeficiente do termo $x^2 y$, b .

Com uma base ortonormal qualquer em $T_{p_0}S$, temos que:

- O termo constante é zero porque o ponto $(0, 0, 0)$ pertence à superfície.
- Os coeficientes dos termos x e y zeram pois o plano tangente a S em $(0, 0)$ é gerado por $x(1, 0, h_x(0, 0)) + y(0, 1, h_y(0, 0))$ e este plano é, por construção, o plano (x, y) . Logo temos $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$ e isto implica que os coeficientes dos termos x e y são 0.
- Os coeficiente de x^2 , y^2 são iguais. De fato, com a parametrização $\alpha = (x, y, h(x, y))$, a matriz dN no ponto $(0, 0, 0)$ é

$$\begin{bmatrix} h_{xx} & -h_{xy} \\ -h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix}$$

Como $(0, 0, 0)$ é um ponto umbílico, temos que nesse ponto a curvatura normal $k_n = \langle dN(r), r \rangle$ é constante. Fazendo $r = (1, 0)$ e $r = (0, 1)$ obtemos respectivamente $k_n = h_{xx}$, $k_n = h_{yy}$ isto implica que $k_n = h_{xx} = h_{yy}$.

- O coeficiente xy é zero. Com a parametrização $\alpha = (x, y, h(x, y))$ mencionada e a matriz dN no ponto $(0, 0, 0)$, fazendo $r = (1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ obtemos $k_n = \frac{1}{2} \cdot (2k_n - 2h_{xy})$ o que implica em $h_{xy} = 0$.

- Por fim, se o coeficiente do termo x^2y for diferente de 0, podemos zerá-lo com uma rotação dessa base ortonormal. De fato sejam

$$h = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{6}y^3 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + 0[4]$$

com $b \neq 0$,

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Daí teremos,

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Com as substituições necessárias encontramos o coeficiente do termo x'^2y' que é:

$$\frac{a'}{6}(-3\cos^2\theta\sin\theta) + \frac{b'}{2}(\cos^3\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta) + \frac{c'}{2}(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta) + \frac{d'}{6}(\sin^2\theta\cos\theta)$$

Para $\theta = \pi$ o coeficiente de x'^2y' é $-\frac{b'}{2}$ e para $\theta = -\pi$ o coeficiente de x'^2y' é $\frac{b'}{2}$, como a expressão acima é contínua com relação a θ , temos que existe algum θ para o qual o valor dessa expressão é zero.

Observação 3.0.1 No próximo capítulo, vamos analisar a forma cúbica sem a simplificação $b = 0$.

Definição 3.1 Em uma superfície S , dada pela expressão 3-1, considerando a , c e d os coeficientes da parametrização de Monge $\alpha(x, y)$. O ponto umbílico p_0 é um ponto de Darboux se satisfizer as seguintes condições:

$$T: c(c - a) \neq 0$$

D : Uma das seguintes condições é satisfeita:

$$D_1: \frac{a}{c} > \left(\frac{d}{2c}\right)^2 + 2;$$

$$D_2: \left(\frac{d}{2c}\right)^2 + 2 > \frac{a}{c} > 1, a \neq 2c;$$

$$D_3: \frac{a}{c} < 1.$$

Uma vez que a condição T é satisfeita, a condição D não depende da carta escolhida. A demonstração desse fato será feita após a interpretação geométrica das condições D_1 , D_2 e D_3 .

3.1

A condição T

As direções principais são determinadas pela equação 2-3. No caso da superfície S com a parametrização de Monge $\alpha(x, y)$, as direções principais são determinadas pela seguinte equação:

$$[cy + L](dy)^2 - [(c - a)x + dy + M](dx)(dy) - [cy + N](dx)^2 = 0 \quad (3-3)$$

onde L , M e N são curvas suaves de grau maior ou igual a 2.

A condição T assegura que os conjuntos

$$S_p = \{(x, y, p) | [cy + L]p^2 - [(c - a)x + dy + M]p - [cy + N] = 0\} \text{ e} \quad (3-4)$$

$$S_q = \{(x, y, q) | [cy + L] - [(c - a)x + dy + M]q - [cy + N]q^2 = 0\} \quad (3-5)$$

são superfícies suaves.

De fato, suponha $c(c - a) \neq 0$ e seja:

$$F(x, y, p) = [cy + L]p^2 - [(c - a)x + dy + M]p - [cy + N] \quad (3-6)$$

Temos que $S_p = F^{-1}(0)$. Segue que se 0 é um valor regular de F , pela proposição 2.3, S_p é uma superfície regular.

Observe que $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ apenas quando $x = y = 0$. De fato, como estamos interessados no comportamento das direções principais perto do ponto umbílico, podemos considerar apenas uma vizinhança de $(0, 0)$. Suponha $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ e $y \neq 0$ e tome uma vizinhança de $(0, 0)$ tal que $\left| \frac{Lp^2 + N}{y} \right| < |c|$.

Isto é possível porque L e M tendem a zero quando $|(x, y)|$ tende a zero e, L e M possuem ordem maior ou igual a 2. A partir dessa restrição, obtemos a seguinte inequação:

$$|Lp^2 + N| < |cy(p^2 + 1)|.$$

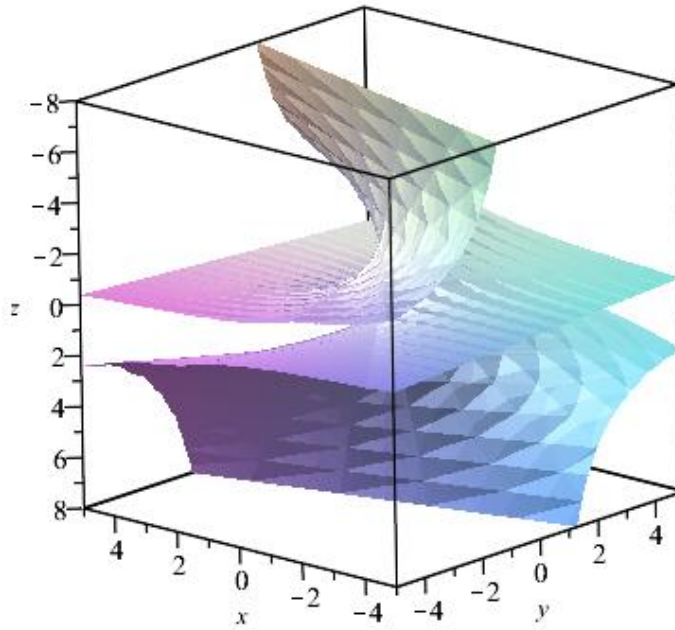


Figura 3.1: Superfície S_p de um ponto umbílico de Darboux que satisfaz a condição D1.

Para que o ponto pertença à superfície ele deve satisfazer $[cy + L]p^2 - [(c - a)x + dy + M]p - [cy + N] = 0$, considerando também $\frac{\partial F}{\partial p} = 2p[cy + L] - [(c - a)x + dy + M] = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} [cy + L]p^2 + [cy + N] &= 0 \\ \Rightarrow cy(p^2 + 1) + Lp^2 + N &= 0 \\ \Rightarrow cy(p^2 + 1) &= -Lp^2 - N \\ \Rightarrow |-Lp^2 - N| &= |cy(p^2 + 1)| \end{aligned}$$

Absurdo, pois consideramos uma vizinhança de $(0, 0)$ tal que $|-Lp^2 - N| < |cy(p^2 + 1)|$. Logo, se $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, então $y = 0$.

Analogamente, mostra-se que se $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ então $x = 0$.

Em $(0, 0, p)$, 0 é um valor regular de F pois temos que,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -(c-a)p \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -c - dp + 2cp^2 \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ não se anulam simultaneamente pois $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ apenas quando $p = 0$, mas quando $p = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, porque por hipótese, $c \neq 0$. Portanto, S_p é uma superfície regular.

É interessante observar também que, se zero é um valor regular de F , então $c(c-a) \neq 0$. Suponha $c(c-a) = 0$. Se $c-a = 0$, então $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, mas para que $\frac{\partial F}{\partial y}$ seja diferente de 0 para todo p devemos ter $d^2 + 4c^2 < 0$ que é um absurdo. Se $c = 0$, então $\frac{\partial F}{\partial x} = ap$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = -dp$ se anulam em $p = 0$.

3.2

A condição D

Na Superfície S_p considere o seguinte campo de vetores L'_p :

$$\begin{aligned} x' &= 2p[cy + L] - [(c-a)x + dy + M] = \frac{\partial F}{\partial p} \\ y' &= p(2p[cy + L] - [(c-a)x + dy + M]) = p \frac{\partial F}{\partial p} \\ p' &= (c-a)p + pc + dp^2 - cp^3 + 0[1] = - \left[\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Temos que $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial p} \right)$, sendo assim, $\langle L'_p, \nabla F \rangle = 0$. Logo L'_p é tangente à superfície.

Observação 3.2.1 A projeção de uma curva integral C de L'_p no plano (x, y) , representa para S a projeção de uma linha de curvatura.

De fato, para que uma curva C em S_p seja uma curva integral, o vetor derivada de todo ponto x deve ser paralelo ao vetor $L'_p(x)$.

Por construção, num ponto (x, y, p) da superfície S_p , p corresponde ao coeficiente angular de uma das direções principais da superfície S , no parâmetro (x, y) .

Segue que a direção da projeção de um vetor do campo L'_p coincide com uma das direções principais de S no mesmo parâmetro.

Sejam $P_1 : S_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção da superfície S_p no plano (x, y) e $P_2 : L'_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção do campo de vetores L'_p no plano (x, y) . Temos que $P_1^{-1}(x, y) = \{(x, y, r_1), (x, y, r_2)\}$ sendo r_1 e r_2 os coeficientes angulares das direções principais da superfície S no ponto (x, y) .

Temos ainda que $P_2(L'_p(x, y, r_1)) = \left(\frac{\partial F_p}{\partial p}(x, y, r_1), r_1 \frac{\partial F_p}{\partial p}(x, y, r_1) \right)$ cujo coeficiente angular é r_1 e $P_2(L'_p(x, y, r_2)) = \left(\frac{\partial F_p}{\partial p}(x, y, r_2), r_2 \frac{\partial F_p}{\partial p}(x, y, r_2) \right)$ cujo coeficiente angular é r_2 . Por isso, fora de $(0, 0)$ a projeção do campo de vetores L'_p no plano (x, y) , gera as direções principais de S .

As singularidades do campo L'_p estão no eixo p uma vez que $x' = y' = 0$ apenas quando $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ e já vimos que isso só acontece quando $x = y = 0$.

Sendo assim, no eixo p ,

$$\begin{aligned} p' = 0 &\Rightarrow p(c - a) - p(cp^2 - dp - c) = 0 \\ &\Rightarrow -p(cp^2 - dp + (a - 2c)) = 0. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que as singularidades da superfície S_p estão nos pontos $(0, 0, p_i)$, $i = 0, 1, 2$, onde p_i é uma das raízes da equação

$$P(p) = -p(cp^2 - dp + (a - 2c)), \quad (3-7)$$

sendo:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= \frac{d}{2c} - \sqrt{\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c} + 2} \\ p_2 &= \frac{d}{2c} + \sqrt{\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c} + 2} \end{aligned}$$

Sabendo que, para um p diferente de p_0 , p_1 e p_2 o vetor $L'((0, 0, p))$ é paralelo ao eixo p e que o campo de vetores é contínuo, concluímos que toda curva que tende a $x = y = 0$ deve tender a $(0, 0, p_0)$, $(0, 0, p_1)$ ou $(0, 0, p_2)$.

Pela construção da superfície S_p , temos que uma curva que tende a $(0, 0, p_i)$ deve ter a declividade tendendo a p_i .

Considere as semirretas $l_i^+ = \{(x, p_i x) | x \geq 0\}$ e $l_i^- = \{(x, p_i x) | x \leq 0\}$ e as retas $l_i = \{(x, p_i x)\}$.

Vejam agora a relação da geometria das superfícies que satisfazem as condições D_i 's com as semirretas citadas.

D_1 : $\left[\frac{a}{c} > \left(\frac{d}{2c}\right)^2 + 2 \right]$ As raízes p_1 e p_2 são valores imaginários. Sendo assim, l_0 é a única direção possível na qual devem se aproximar tangentes de

linhas de curvatura que tendem a $x = y = 0$.

D_2 : $\left[\left(\frac{d}{2c} \right)^2 + 2 > \frac{a}{c} > 1, a \neq 2c \right]$ Nos diz que há três direções distintas. Mais ainda, como $p_1 p_2 > -1$, existe um setor angular com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$ que contém as três semirretas l_i^+ .

D_3 : $\left[\frac{a}{c} < 1 \right]$ Como na condição D_2 , temos 3 direções distintas, porém $p_1 p_2 < -1$, neste caso não temos um setor angular, com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$, que contém três semirretas distintas.

De fato, essas representações geométricas, são equivalentes às condições D_1 , D_2 e D_3 . Com isso, podemos verificar que a condição D não depende da carta escolhida.

Basta observar que, se a carta $\alpha(x, y)$ de uma superfície satisfaz a condição D_1 , D_2 ou D_3 , então a superfície possui a respectiva geometria associada, como a mudança de carta a altera, temos que uma nova parametrização de Monge deve satisfazer a mesma condição.

Mais especificamente, veremos quais são as possíveis parametrizações de S por cartas de Monge.

Sejam $\alpha(x, y) = (x, y, h(x, y))$ e $\alpha'(x', y') = (x', y', h'(x', y'))$ cartas de Monge da superfície S sendo

$$h'(x', y') = \frac{a'}{6}x^3 + \frac{b'}{2}x^2y + \frac{c'}{2}xy^2 + \frac{d'}{6}y^3 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + 0[4]$$

com $b' = 0$.

α' é uma rotação da carta α . E neste caso,

$$b' = \frac{a}{6}(-3\cos^2\theta\sin\theta) + \frac{c}{2}(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta) + \frac{d}{6}(\sin^2\theta\cos\theta)$$

Como a condição T é satisfeita, $\cos(\theta) \neq 0$, caso contrário, $d' = \pm \frac{b}{2} \neq 0$. Com isso,

$$2b' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^3\theta \left[c \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)^2 - d \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + a - 2c \right]$$

Exigir uma rotação que matenha $b' = 0$ equivale a encontrar as raízes de

$$p[cp^2 - dp + a + 2c] = 0$$

onde $p = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Logo, as possíveis cartas de Monge da superfície S possuem a reta $l_0 = (x, 0)$ como uma possível direção em que tendem as tangentes das linhas de curvatura que tendem a $(0, 0)$.

Consequentemente, a superfície S_p , construída a partir dessa nova carta, terá como nova origem $(0, 0, p_1)$ ou $(0, 0, p_2)$.

Finalmente, com o que foi apresentado anteriormente, podemos visualizar o comportamento do campo de direções nesses casos.

D_1 : Em $(0, 0, 0)$, a superfície S_p é tangente ao plano (x, p) pois o gradiente de F nesse ponto é $(0, -x, 0)$. Para uma melhor visualização, projetamos o campo de vetores L' no plano (x, p) . A matriz Jacobiana dessa projeção é dada por:

$$\begin{bmatrix} -c + a & 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial p} & 2c - a \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $a - c(2c - a) = -c^2 \left(\frac{a}{c}\right) \left(\frac{a}{c} - 2\right)$. Como a condição

D_1 garante que $\frac{a}{c} > \left(\frac{d}{2c}\right)^2 + 2$, temos que esse determinante é negativo, portanto este é um ponto de sela. Na figura 3.2, para facilitar visualização, temos esboçada apenas uma parte da superfície S_p , a projeção das linhas de curvatura no plano (x, p) e a projeção das linhas de curvatura no plano (x, y) .

D_2 : Vamos olhar para os casos $1 < \frac{a}{c} < 2$ e $\frac{a}{c} > 2$ separadamente.

No ponto $(0, 0, 0)$ o Jacobiano da projeção do campo L' é novamente $-c^2 \left(\frac{a}{c}\right) \left(\frac{a}{c} - 2\right)$

Se $1 < \frac{a}{c} < 2$, esse Jacobiano é positivo e portanto $(0, 0)$ representa um nó nessa situação. Nesse caso, $p_1 < p_0 < p_2$ e uma mudança de carta que mantenha p_1 ou p_2 na origem, manteria verdadeira a condição D_2 , como foi mencionado anteriormente, mas estaremos no outro subcaso dessa condição, ou seja, $\frac{a}{c} > 2$. Assim sendo, p_1 e p_2 são pontos de sela, pois o determinante seria negativo.

Se $\frac{a}{c} > 2$, esse Jacobiano é negativo e portanto $(0, 0)$ representa uma sela e nessa situação $p_0 < p_1 < p_2$ ou $p_1 < p_2 < p_0$, sendo p_1 um nó e p_2 uma sela ou p_2 um nó e p_1 uma sela respectivamente. Pois, analogamente ao caso anterior, uma mudança de carta pode mudar o subcaso da condição D_2 .

Em resumo, na condição D_2 , temos um nó entre duas selas. Podemos visualizar o comportamento das linhas de curvatura nesse caso a partir do esboço na figura 3.3.

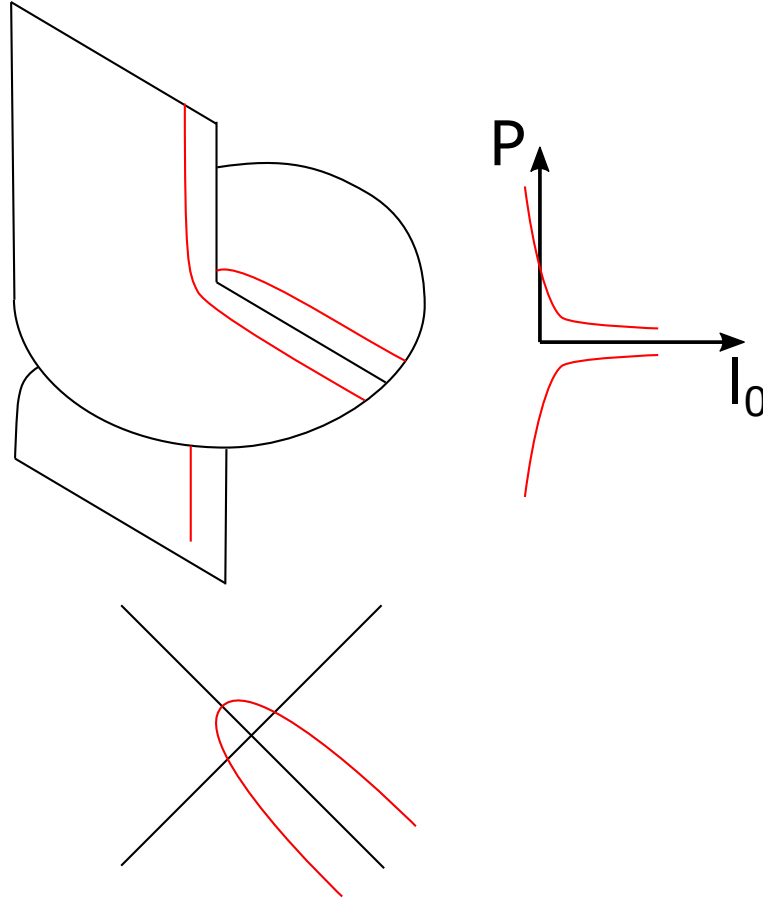


Figura 3.2: Projeção das linhas de curvatura na condição D1

D_3 : Mais uma vez no ponto $(0, 0, 0)$ o Jacobiano da projeção do campo L' é $-c^2 \left(\frac{a}{c}\right) \left(\frac{a}{c} - 2\right)$ que é negativo. Portanto nesse caso, o ponto $(0, 0)$ também é um ponto de sela. Sobre os pontos $(0, 0, p_1)$ e $(0, 0, p_2)$, temos que eles também são pontos de sela, pois com uma mudança na carta (x, y) podemos tomar esses pontos na origem sem que a condição D_3 se altere, como foi mencionado anteriormente. Portanto, o Jacobiano correspondente será $(-c')^2 \left(1 - \frac{a'}{c'}\right) \left(2 - \frac{a'}{c'}\right)$ em $p'_0 = 0$, e como a condição D_3 não se altera com essa mudança de coordenadas, o Jacobiano continua negativo. Mais uma vez, temos na figura 3.4, um esboço parcial da superfície S_p e das projeções pertinentes.

O comportamento das linhas de curvatura nas superfícies que satisfazem as condições D_1 , D_2 e D_3 de Darboux foram nomeados por Hannay como *Lemon*, *Monstar* e *Star* respectivamente. Nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7 vemos a projeção das linhas de curvatura no plano (x, y) .

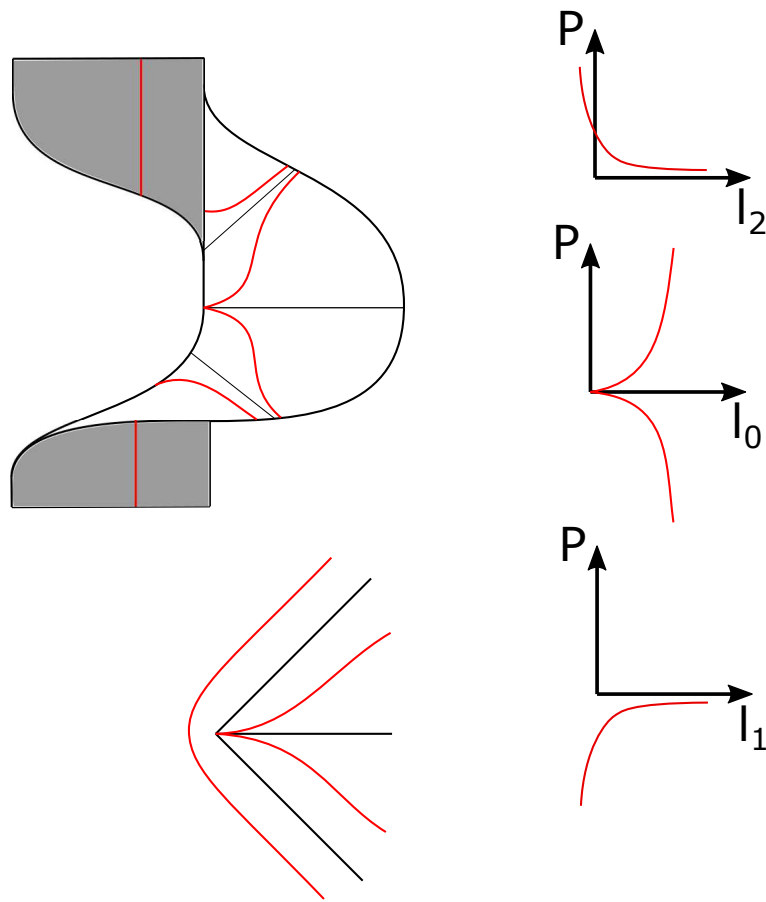


Figura 3.3: Projeção das linhas de curvatura na condição D2

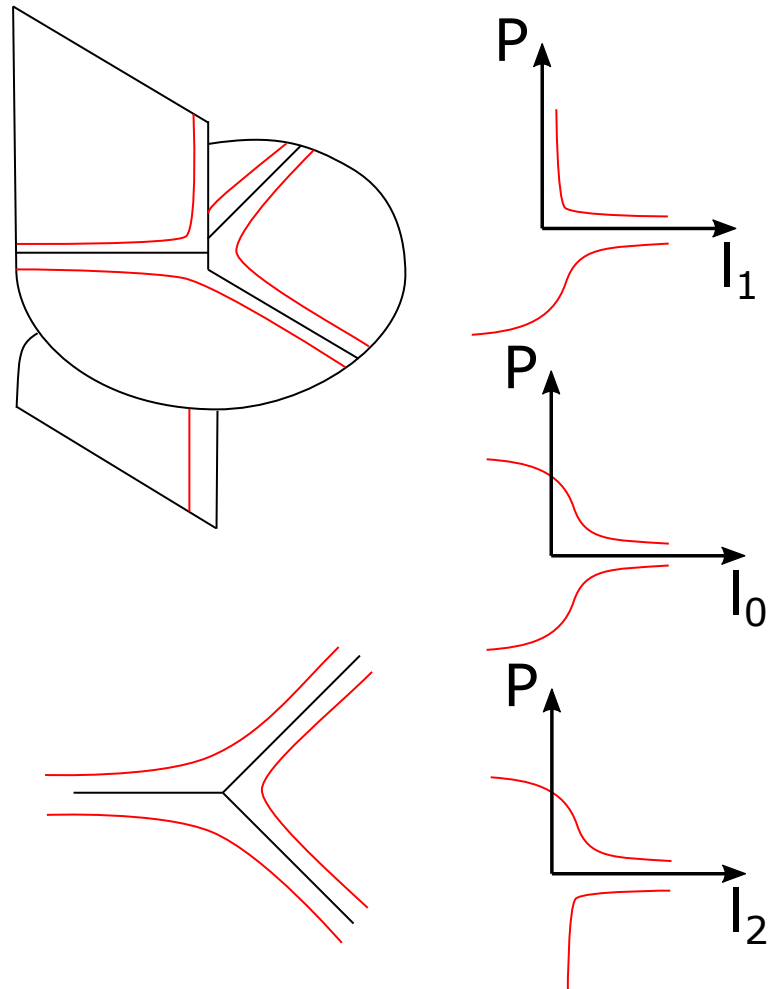


Figura 3.4: Projeção das linhas de curvatura na condição D3

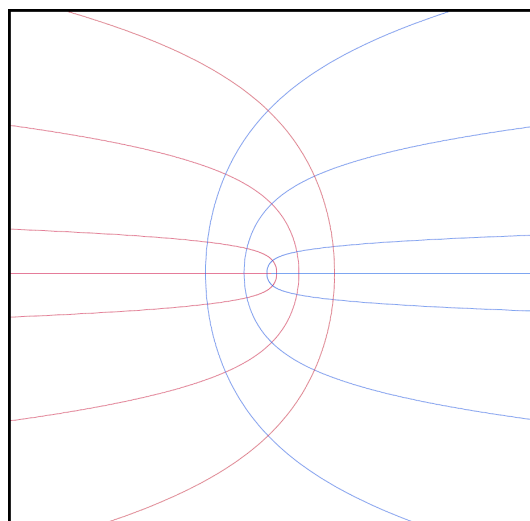


Figura 3.5: *Lemon*- possui apenas uma direção do ponto umbílico por linhas de curvatura. O índice das direções principais no ponto umbílico é $\frac{1}{2}$

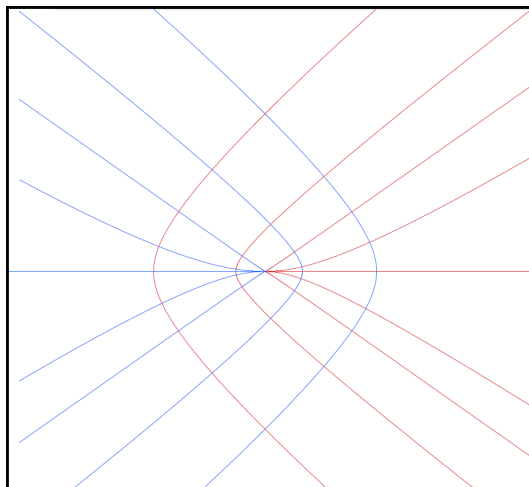


Figura 3.6: *Monstar*- Possui três direções contidas num setor angular, com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$, de aproximação do ponto umbílico por linhas de curvatura. O índice é $\frac{1}{2}$.

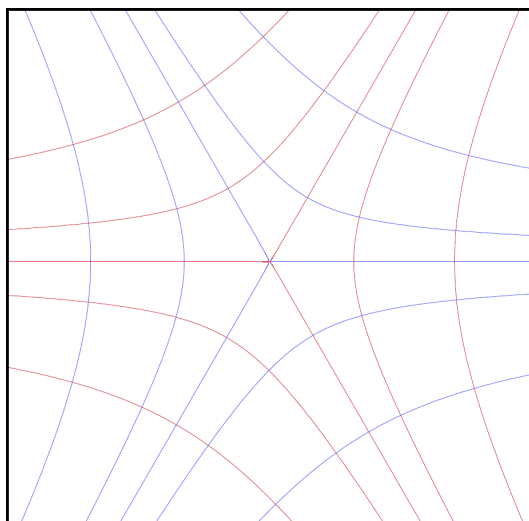


Figura 3.7: *Star*-As três direções cujas linhas de curvatura se aproximam não estão contidas num setor angular com ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$. O índice é $\frac{-1}{2}$.

4

Pontos umbílicos de Darboux - Parte II

Considere uma superfície em $\mathbb{R}^3$ em sua forma de Monge, gráfico de

$$h(x, y) = Q(x, y) + C(x, y) + O(4),$$

onde

$$C(x, y) = \frac{1}{6} (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) \text{ e} \quad (4-1)$$

$$Q(x, y) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2). \quad (4-2)$$

A equação diferencial das direções principais perto de $(0, 0)$ é

$$(bx + cy + O(2)) dx^2 + ((c - a)x + (d - b)y + O(2)) dxdy - (bx + cy + O(2)) dy^2 = 0,$$

onde $O(2)$ indica termos de grau maior ou igual a 2 em (x, y) . Ignorando os termos $O(2)$ e fazendo $dx = x$, $dy = y$, obtemos a forma cúbica

$$P(x, y) = bx^3 + (2c - a)x^2y + (d - 2b)xy^2 - cy^3. \quad (4-3)$$

Repare que esta equação é equivalente à equação 3-7 que determina as separatrizes, se fizermos $p = \frac{y}{x}$ e considerarmos $b = 0$ como foi feito em 3-1.

Estamos interessados em saber quando a forma cúbica P possui raiz dupla e quando possui um par de raízes cujas direções que tem essas raízes como declividade são ortogonais. Tais alternativas não ocorrem quando é válida a condição D dos pontos umbílicos de Darboux, mas são justamente esses casos as transições entre as condições Di de Darboux.

4.1

Formas quadráticas

Uma forma bilinear simétrica $V_2(u, v)$ está associada a uma forma quadrática $\varphi(u) = V_2(u, u)$. Em $\mathbb{R}^2$, considerando $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ e a matriz de V_2 sendo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

obtemos

$$V_2(u, v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Logo $\varphi(u) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Dizemos que $\varphi(u)$ é uma forma elíptica se o determinante da matriz de V_2 é positivo, isto é, se φ possui duas raízes complexas conjugadas.

Dizemos que $\varphi(u)$ é uma forma parabólica se o determinante da matriz de V_2 é zero, isto é, se φ possui duas raízes reais iguais.

Dizemos que $\varphi(u)$ é uma forma hiperbólica se o determinante da matriz de V_2 é negativo, isto é, se φ possui duas raízes reais distintas.

Nos casos hiperbólicos e parabólicos φ pode ser fatorada como o produto de duas formas lineares. Os núcleos dessas formas são chamados de linhas de raiz.

Uma forma quadrática é dita como sendo reto angular se é hiperbólica e suas linhas de raiz são ortogonais.

Proposição 4.1 *A forma quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ é reto angular se e só se $a + c = 0$*

Prova. Suponha que a forma quadrática é reto angular. Então ela é hiperbólica e pode ser fatorada como o produto de duas formas lineares. Considere a fatoração $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ nesse caso $a = \alpha\gamma$ e $c = \beta\delta$. As linhas de raiz dessa forma são ortogonais se, só se $\alpha\gamma = -\beta\delta$, e isso ocorre se e só se $a + c = 0$.

Por outro lado, suponha que $a + c = 0$, a forma quadrática será $ax^2 + 2bxy - ay^2$. O determinante da forma bilinear a ela associada é negativo, portanto a forma quadrática é hiperbólica. Tal forma pode ser fatorada como $\left(x + \frac{y(b - \sqrt{b^2 + a^2})}{a}\right)(ax + y(b + \sqrt{b^2 + a^2}))$ e pode-se verificar que as linhas de raiz são ortogonais. ■

4.2

Formas cúbicas

Uma forma trilinear simétrica $V_3(u, v, w)$ induz uma forma cúbica $\sigma(u) = V_3(u, u, u)$. Em $\mathbb{R}^2$, considerando $u = (x, y)$, temos $\sigma(u) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. Definimos a matriz Hessiana da forma cúbica como sendo

$$\begin{bmatrix} ax + by & bx + cy \\ bx + cy & cx + dy \end{bmatrix}$$

e chamamos o determinante dessa matriz de Hessiana da forma cúbica. A menos de um fator, essa é a matriz Hessiana usual.

A Hessiana de uma forma cúbica define uma forma quadrática. As linhas de raiz da Hessiana são chamadas de linhas da Hessiana.

Dizemos que uma forma cúbica é elíptica se possui três linhas de raiz distintas, parabólica se possui três linhas de raiz reais sendo duas coincidentes, perfeita se possui três linhas de raiz reais coincidentes e hiperbólica se possui uma linha de raiz real e duas complexas conjugadas.

Teorema 4.2 *As Hessianas das formas cúbicas elípticas, parabólicas, perfeitas e hiperbólicas são formas quadráticas elípticas, parabólicas, não definidas (Hessiana identicamente nula) e hiperbólicas respectivamente.*

Prova.

Vamos examinar cada caso separadamente. Inicialmente note que analisar Hessianas múltiplas de $x^2 + y^2$, x^2 , 0 e xy é o suficiente, pois a escolha da base não altera o conceito da Hessiana.

A Hessiana da forma cúbica $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, é dada por $(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2$.

Se a Hessiana for um múltiplo de xy ela será hiperbólica e devemos ter

$$\begin{cases} bd - c^2 = 0 \\ ac - b^2 = 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

Sabemos que $a \neq 0$ pois $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 0$ e teríamos então a Hessiana nula. Analogamente $d \neq 0$. Suponha que $c \neq 0$, temos então $a = \frac{b^2}{c}$. Como $bd = c^2$, multiplicando à esquerda por a e à direita por $\frac{b^2}{c}$, obtemos

$$\begin{aligned} abd &= b^2c \\ \Rightarrow abd - b^2c &= 0 \\ \Rightarrow b(ad - bc) &= 0 \end{aligned}$$

Como $ad - bc \neq 0$, temos $b = 0$, mas isso implica em $c = 0$. Absurdo. Portanto, não podemos supor que $c \neq 0$. De forma análoga, encontramos $b = 0$. Concluimos que, uma forma cúbica que tem Hessiana múltipla de xy deve ser da forma $ax^3 + dy^3$. E essa cúbica pode ser fatorada como $(a^{\frac{1}{3}}x + d^{\frac{1}{3}}y)(a^{\frac{2}{3}}x^2 - a^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}xy - d^{\frac{2}{3}}y^2)$. Ou seja, a forma cúbica que possui Hessiana hiperbólica é hiperbólica.

Se a Hessiana for um múltiplo de x^2 devemos ter:

$$\begin{cases} bd - c^2 = 0 \\ ad - bc = 0 \\ ac - b^2 \neq 0 \end{cases}$$

Assim, $b = 0 \Rightarrow c = 0$, mas b e c não podem se anular ao mesmo tempo. Com $b \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} d &= \frac{c^2}{b} \\ \Rightarrow \frac{ac^2}{b} - bc &= 0 \\ \Rightarrow c \left(\frac{ac}{b} - b \right) &= 0 \end{aligned}$$

Não podemos ter $\frac{ac}{b} - b = 0$, pois isso implicaria em $ac - b^2 = 0$. Portanto devemos ter $c = 0$ e isto implica em $d = 0$. Assim, a equação cúbica será da forma $ax^3 + 3bx^2y = x^2(ax + 3by)$. Ou seja, a forma cúbica que possui Hessiana parabólica, é parabólica.

Se a Hessiana for identicamente nula temos:

$$\begin{cases} bd - c^2 = 0 \\ ad - bc = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases}$$

Supondo $a = 0$, temos $b = 0$, $c = 0$ e a forma cúbica será dada por dy^3 . Mas se $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} c &= \frac{b^2}{a} \\ \Rightarrow bd - \frac{b^4}{a^2} &= 0 \\ \Rightarrow b &= a^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

De forma análoga, $d = 0$ implica em $c = 0$ e $b = 0$. Teríamos a forma cúbica ax^3 . Se $d \neq 0$, temos $b = \frac{c^2}{d}$, e conforme feito anteriormente, encontramos $c = a^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}$.

Portanto, se $a \neq 0$ e $d \neq 0$, a forma cúbica será dada por $ax^3 + a^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}}x^2y + a^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}xy^2 + dy^3$ que pode ser fatorada em $\left(a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{1}{3}}y\right)^3$. Concluimos que a forma cúbica que possui uma matriz Hessiana identicamente nula, é perfeita.

Por fim, considerando a Hessiana múltipla de $x^2 + y^2$, temos:

$$\begin{cases} ac - b^2 \neq 0 \\ ad - bc = 0 \\ bd - c^2 \neq 0 \\ bd - c^2 = ac - b^2 \end{cases}$$

$a = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow -b^2 = bd \Rightarrow b = -d$, neste caso a cúbica será da forma $3bx^2y - by^3$ que pode ser fatorada em $y(3^{\frac{1}{2}}x + y)(3^{\frac{1}{2}}bx - by)$.

Se $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} b &= \frac{bc}{a} \\ \Rightarrow a^2c - b^2a &= b^2c - c^2a \\ \Rightarrow a(ac - b^2) &= -c(ac - b^2) \\ \Rightarrow a &= -c \\ \Rightarrow b &= -d \end{aligned}$$

Temos a cúbica $ax^3 + 3bx^2y - 3axy^2 - by^3$.

Concidere a rotação da base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ y = -X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

onde θ satisfaz

$$\begin{cases} a = \cos(3\theta) \\ b = \sin(3\theta) \end{cases}$$

A cúbica nessa nova base será dada por

$$\begin{aligned} &X^3(a(\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) + b(-3\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta)) \\ &+ Y^3(a(\sin^3\theta - 3\sin\theta\cos^2\theta) + b(3\sin^2\theta\cos\theta - \cos^3\theta)) \\ &+ X^2Y(a(9\cos^2\theta\sin\theta - 3\sin^3\theta) + b(-3\sin^3\theta + 9\cos^2\theta\sin\theta)) \\ &+ XY^2(a(-3\cos^3\theta + 9\cos\theta\sin^2\theta) + b(-3\sin^3\theta + 9\cos^2\theta\sin\theta)) \end{aligned}$$

Como $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$ e $\sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$, obtemos

$$X^3(a^2 + b^2) + XY^2(-3a^2 - 3b^2)$$

Podemos fatorar da seguinte forma:

$$(a^2 + b^2) X (X + 3^{\frac{1}{2}} Y) (X - 3^{\frac{1}{2}} Y)$$

Portanto, a forma cúbica que possui hessiana elíptica é elíptica. ■

Definição 4.3 Uma forma cúbica é dita *reto angular* se as linhas de raiz da Hessiana são ortogonais, sendo a Hessiana hiperbólica.

4.3

Notação complexa

A forma quadrática pode ser escrita em termos de coordenadas complexas por $\gamma z^2 + 2rz\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2$ onde $z = x + iy$, $\gamma = \frac{a - c - 2bi}{4}$ e $r = \frac{a + c}{4}$

Proposição 4.4 A forma quadrática $\gamma z^2 + 2rz\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2$ é parabólica se e somente se, $\gamma\bar{\gamma} = r^2$ e tem duas linhas de raiz ortogonais se e só se $r = 0$.

Prova. Por definição a forma quadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ associada a $\gamma z^2 + 2rz\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2$ é parabólica se e só se, $ac - b^2 = 0$ sendo $\gamma = \frac{a - c - 2bi}{4}$ e $r = \frac{a + c}{4}$ temos que $\gamma\bar{\gamma} - r^2 = ac - b^2$. A segunda parte da proposição segue da proposição 4.1. ■

Como no caso da forma quadrática, a forma cúbica $a^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ pode ser escrita em termos de variáveis complexas como $\alpha z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}\bar{z}^3$ para convenientes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Duas formas cúbicas são ditas equivalentes se são múltiplas entre si. O conjunto dessas classes de equivalência forma um espaço 3-dimensional.

Podemos ir mais adiante e considerar equivalentes formas que são obtidas uma pela rotação da outra. Assim, se na forma $\alpha z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}\bar{z}^3$ fizermos $\alpha^{\frac{1}{3}}z = \zeta$ esta forma se reduz a uma forma cujos coeficientes do primeiro e do último termo são iguais a um. Tal mudança não altera nenhuma característica essencial da forma cúbica.

Feito isso, a forma cúbica $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ pode ser representada pelo número complexo β . Essa representação deixa de fora apenas formas quadráticas da forma $3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2$.

Proposição 4.5 A forma cúbica $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ é parabólica se, somente se $3\beta = 2\gamma + \bar{\gamma}^2$, para algum γ pertencente ao círculo unitário $\gamma = e^{i\theta}$ com $3\theta \neq 2k\pi$.

Prova. Por definição, a forma cúbica é parabólica se na sua fatoração tivermos um quadrado perfeito. O quadrado perfeito é uma forma quadrática parabólica se $\gamma z^2 + 2rz\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2$ é uma representação dessa forma quadrática e $\gamma\bar{\gamma} = r^2$. Podemos multiplicá-la por r^{-1} e obtemos uma representação na forma

$\gamma z^2 + 2z\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2$ que pela proposição 4.4 deve ter $|\gamma| = 1$. Visto que os coeficientes de z^3 e $\bar{z}^3$ devem ser iguais a um, o outro fator deve ser, a menos de um múltiplo, da forma $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z}$. Igualando os coeficientes de $z\bar{z}^2$ obtemos $3\beta = 2\gamma + \bar{\gamma}^2$.

Como a forma cúbica não deve ser um cubo perfeito devemos ter

$$\gamma z^2 + 2z\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2 \neq (\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z})^2,$$

mas isso só ocorre quando $\gamma = \bar{\gamma}^2$, que ocorre se só se $\gamma^3 = 1$, ou seja, quando 3θ é um múltiplo de 2π . ■

Chamamos a curva determinada por $\beta = \frac{2\gamma + \bar{\gamma}^2}{3}$ com $|\gamma| = 1$ de deltóide. Ver figura 4.1

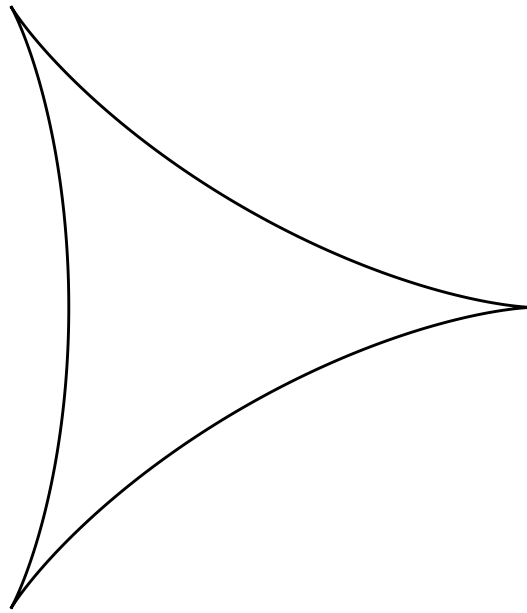


Figura 4.1: Deltóide

Proposição 4.6 *A forma cúbica $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ é reto angular se, somente se $|\beta| = 1$ ($\beta^3 \neq 1$).*

Prova. Por definição, temos que $C = z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ é reto angular se, só se as linhas de raiz da Hessiana são ortogonais. Considerando $z = x + iy$ e $\beta = a + ib$, temos que C , em termos dos parâmetros reais x e y , é da forma

$$(6a + 2)x^3 + 6bx^2y + (6a - 6)xy^2 + 6by^3,$$

sua Hessiana é

$$4\left((3a^2 - 2a - 1 - b^2)x^2 + (8ab + 4b)xy + (-a^2 + 2a + 3b^2 - 4)y^2\right)$$

Mundando novamente para coordenadas complexas, obtemos a forma complexa da Hessiana de C que é

$$-4 \left((\beta - \bar{\beta}^2) z^2 + (1 - \bar{\beta}\beta) z\bar{z} + (\bar{\beta} - \beta^2) \bar{z}^2 \right),$$

pela proposição 4.4 as linhas de raiz dessa forma são ortogonais se e só se $1 - \bar{\beta}\beta = 0$, isto é, se e só se $|\beta| = 1$. ■

Observação 4.3.1 *É interessante notar que, se calcularmos a Hessiana da forma cúbica C , com relação aos parâmetros z e $\bar{z}$, obtemos*

$$(\beta - \bar{\beta}^2) z^2 + (1 - \bar{\beta}\beta) z\bar{z} + (\bar{\beta} - \beta^2) \bar{z}^2,$$

que é igual a um múltiplo da Hessiana de C .

Definição 4.7 *Dados dois polinômios homogêneos $p(x, y)$ e $q(x, y)$, o Jacobiano de p e q é o determinante da matriz Jacobiana de $\alpha(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$.*

Corolário 4.8 *O Jacobiano de $z\bar{z}$ e $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ é, a menos de um múltiplo, igual a*

$$(iz)^3 - \bar{\beta}(iz)^2 (\bar{iz}) - \beta(iz) (\bar{iz})^2 + (\bar{iz})^3,$$

que é parabólico se, somente se $\beta = 2\gamma + \bar{\gamma}^2$, para algum γ pertencente ao círculo unitário.

Proposição 4.9 *A forma cúbica $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ tem duas linhas de raiz ortogonais se, só se $|\beta| = \frac{1}{3}$.*

Prova. Considerando $z = x + iy$ e $\beta = a + ib$, obtemos a forma cúbica em termos dos parâmetros reais x e y .

$$V = (6a + 2)x^3 + 6bx^2y + (6a - 6)xy^2 + 6by^3$$

Considere a expressão

$$\tilde{V} = (6a + 2) \left(\frac{x}{y} \right)^3 + 6b \left(\frac{x}{y} \right)^2 + (6a - 6) \left(\frac{x}{y} \right) + 6b$$

Sabemos que a cúbica V possui duas linhas de raiz ortogonais se e somente se o produto de duas das raízes de $\tilde{V}$ é -1 . Sabemos também que

o produto das três raízes de $\tilde{V}$ é $\frac{-(6a+2)}{6b}$. Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes de $\tilde{V}$. Suponha que $r_1 r_2 = -1$, então $r_3 = \frac{x}{y} = \frac{6a+2}{6b}$.

Portanto para algum $k \in \mathbb{R}$, $x = k(6a+2)$ e $y = k6b$ é uma raiz de V . Substituindo esses valores em V e igualando a zero, obtemos

$$\begin{aligned} 72a^2 + 72b^2 - 8 &= 0 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \beta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

A seguinte proposição é uma consequência da proposição 4.6, do corolário 4.8 e da proposição 4.9.

Proposição 4.10 *O Jacobiano entre $z\bar{z}$ e $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ tem duas linhas de raiz ortogonais se, somente se, a forma $z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3$ é reto angular, ou seja, $|\beta| = 1$.*

Voltando as notações de superfícies, note que o Jacobiano entre $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e $\frac{1}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)$ é dado por $\frac{1}{2}(-bx^3 + (a - 2c)x^2y + (2b - d)xy^2 + cy^3)$, que é, a menos de um fator constante, igual a $P(x, y)$ dada pela equação 4-3.

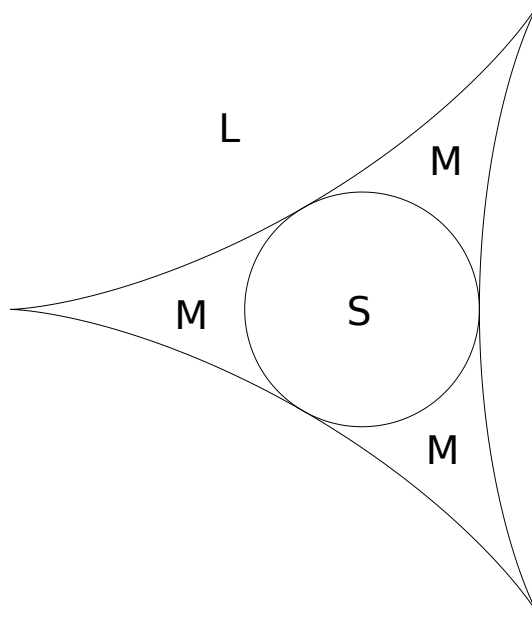
Então, como mencionamos anteriormente, estamos interessados em saber se P possui raiz dupla ou se P possui um par de raízes cujas direções que tem essas raízes como declividade são ortogonais. Isso é equivalente ao Jacobiano entre $Q(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ e $C(x, y) = \frac{1}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + cy^3)$ ser parabólico ou reto angular.

Com a notação complexa, considerando a forma cúbica $C(x, y) = C'(z) = z^3 + 3\beta z\bar{z}^2 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + \bar{z}^3$. Obtemos que, pelo corolário 4.8, P possui raiz dupla se β pertence à reflexão da cúspide que é três vezes maior que a deltóide. E obtemos, pela proposição 4.10 que P possui um par de raízes cujas direções que tem essas raízes como declividade são ortogonais, apenas quando $|\beta| = 1$.

No plano β temos a figura 4.2. Visualizando esses casos como as transições entre as condições D'is de Darboux, vemos que o círculo unitário é a passagem entre as condições D3 e D2, já a cúspide é a passagem entre as condições D1 e D2.

Na figura 4.2, L indica o local onde ocorrem pontos umbílicos do tipo *Lemon*, M do tipo *Monstar* e S do tipo *Star*.

Na cúbica $\alpha z^3 + 3\beta z\bar{z}^2 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + \alpha\bar{z}^3$ considere $\alpha = ke^{i\theta}$. Fazendo $w = b^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\theta}{3}}z$, encontramos a forma cúbica equivalente, cujos coeficientes do

Figura 4.2: Classificação dos pontos umbílicos no plano β

primeiro e último termos são iguais a um. Essa cúbica encontrada é da forma

$$w^3 + 3\frac{e^{\frac{i\theta}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}}\beta w\bar{w}^2 + 3\frac{e^{-\frac{i\theta}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}}\bar{\beta}\bar{w}w^2 + \bar{w}^3$$

Considerando agora $\alpha' = ke^{i(\theta+\epsilon)}$, a forma cúbica equivalente nesse caso é

$$w^3 + 3\frac{e^{\frac{i(\theta+\epsilon)}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}}\beta w\bar{w}^2 + 3\frac{e^{-\frac{i(\theta+\epsilon)}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}}\bar{\beta}\bar{w}w^2 + \bar{w}^3$$

Tivemos uma rotação de $\frac{\epsilon}{3}$ no coeficiente de $w\bar{w}^2$.

Isto significa que efetuar uma rotação completa em α , resulta em efetuar um terço de rotação no coeficiente do termo $w\bar{w}$. É esse o coeficiente que determina o deltóide das cúbicas parabólicas.

A classe de equivalência que considera equivalentes cúbicas múltiplas uma da outra, forma um espaço projetivo 3-dimensional. Nesse espaço Christopher Zeeman, nomeou o conjunto das cúbicas parabólicas de bracelete umbílico.

Existe uma escultura feita por John Robinson, "*eternity*", que quase descreve esse comportamento. Ver figura 4.3. No entanto, as secções dessa figura são triângulos equiláteros e não deltóides.

Encontramos mais informações sobre a escultura e sobre o artista em <http://www.bradshawfoundation.com/jr/eternity.php>, mesmo site de onde foi retirada a imagem.



Figura 4.3: *Eternity*

5

Pontos umbílicos em superfícies com curvatura média constante

Seja S uma superfície com curvatura média constante, e considere $X(u, v)$ o sistema de coordenadas isotérmicas da superfície, ou seja, um sistema de coordenadas cujos coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$. As coordenadas isotérmicas sempre existem e são suaves (1). Neste caso a equação das linhas de curvatura é dada por

$$f dv^2 + (e - g) du dv - f du^2 = 0, \quad (5-1)$$

onde e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental calculados no ponto (u, v) .

Levando em conta as coordenadas isotérmicas, a curvatura média da superfície S é dada por

$$H = \frac{e + g}{2E}. \quad (5-2)$$

Iremos utilizar variáveis complexas pois alguns lemas e proposições nos serão úteis nas demonstrações a seguir. Seja $z = u + iv$, considere a função complexa $\phi(z)$, associada à carta X , definida por

$$\phi(z) = \phi(u + iv) = \left(\frac{e - g}{2} - if \right), \quad (5-3)$$

com os coeficientes da segunda forma fundamental calculados no ponto (u, v) . Segue que

$$\frac{|\phi|}{E} = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (5-4)$$

Observação 5.0.1 *Os pontos umbílicos de uma superfície, não esféricas ou planares, com curvatura média constante são isolados.*

De fato, note que a equação 5-4 implica que (u, v) é um parâmetro de um ponto umbílico da superfície se, e somente se $\phi(u + iv) = 0$

De variáveis complexas, sabemos que os zeros de funções holomorfas são isolados. Para completar, precisamos mostrar que ϕ é uma função holomorfa. As equações de Codazzi de X são

$$\left(\frac{e - g}{2} \right)_u + f_v = EH_u \quad e \quad \left(\frac{e - g}{2} \right)_v - f_u = -EH_v,$$

e como H é constante as equações de Codazzi são exatamente as equações de Cauchy-Riemann de ϕ , logo ϕ é uma função holomorfa.

Observação 5.0.2 Se $X(u, v)$ é uma carta isotérmica de uma superfície e $\tilde{z}(u + iv) = \tilde{u}(u, v) + i\tilde{v}(u, v)$ é um difeomorfismo holomorfo, então a carta $Y(\tilde{u}, \tilde{v})$ que satisfaz $Y \circ \tilde{z} = X$ também é uma carta isotérmica.

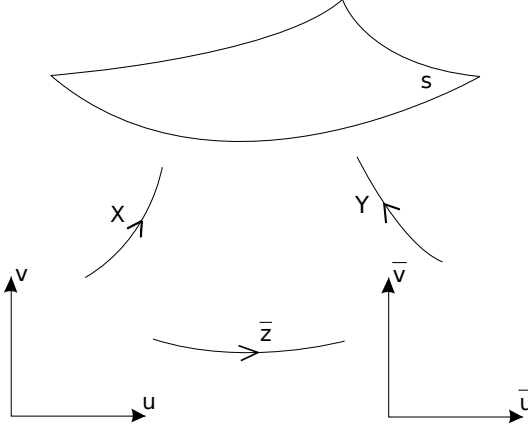


Figura 5.1: Mudança de coordenadas

Seja $z(\tilde{u} + i\tilde{v}) = \tilde{z}^{-1}(u + iv) = u(\tilde{u}, \tilde{v}) + iv(\tilde{u}, \tilde{v})$, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental de $Y = X \circ z(\tilde{u} + i\tilde{v})$, encontramos:

$$E = \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \tilde{u}}, \frac{\partial Y}{\partial \tilde{u}} \right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \tilde{u}}, \frac{\partial Y}{\partial \tilde{v}} \right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right) \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right) \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \tilde{v}}, \frac{\partial Y}{\partial \tilde{v}} \right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Como z é uma função holomorfa, vale a relação de Cauchy-Riemann, temos então

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} = -\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \end{cases}$$

Com isso, concluímos que $E = G$ e $F = 0$.

Por outro lado, suponha que X e Y são cartas isotérmicas. Sabemos que uma carta isotérmica sempre possui inversa diferenciável, com isso $g = X^{-1} \circ Y$

tem $Y^{-1} \circ X$ como inversa. Como as cartas de X e Y são isotérmicas, elas preservam ângulos.

Assim a composta $g = X^{-1} \circ Y$ também preserva. Na base $\{g_u, g_v\}$ sua matriz dg_p será dada por

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Portanto g é um difeomorfismo holomorfo tal que $Y = X \circ g(u + iv)$ pois satisfaz Cauchy-Riemann.

Observação 5.0.3 A relação entre as funções complexas ϕ e $\tilde{\phi}$ associadas a X e Y respectivamente é

$$\phi(z) = \tilde{\phi}(\tilde{z}(z)) \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}(z) \right)^2. \quad (5-5)$$

Inicialmente, perceba que a derivada com relação a $w = x + iy$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sendo assim, temos que,

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle$$

A partir das igualdades da observação 2.0.1 obtemos ϕ em termos da carta X e da função normal à superfície.

$$\phi = \frac{-\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle}{2} + i \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle$$

Dessa forma, temos a seguinte igualdade:

$$\phi = -2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \quad (5-6)$$

Analogamente, com a carta isotérmica Y temos:

$$\tilde{\phi} = -2 \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \tilde{z}}, \frac{\partial N_y}{\partial \tilde{z}} \right\rangle \quad (5-7)$$

Onde N_y representa função normal da carta Y .

Uma vez que $Y \circ \tilde{z} = X$, vale $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}$ e $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial N_y}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}$. Desse modo, a partir das equações 5-6 e 5-7 obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi &= -2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \\
 &= -2 \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial N_y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right\rangle \\
 &= -2 \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right)^2 \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial N_y}{\partial \bar{z}} \right\rangle \\
 &= \tilde{\phi} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right)^2
 \end{aligned}$$

Lema 5.0.1 *Seja $R(z, w)$ uma função holomorfa numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ com $R(0, 0) = \frac{\partial R}{\partial z}(0, 0) = \frac{\partial R}{\partial w} = 0$. Se $b < 0$, a equação diferencial*

$$z \frac{\partial w}{\partial z} = az + bw + R(z, w), \quad w(0) = 0$$

tem solução única $w(z)$ numa vizinhança de 0.

Vemos a seguir um exemplo. Para mais detalhes, veja (5).

Exemplo 5.0.1 *Considere a equação diferencial $z \frac{\partial w}{\partial z} = az + bw$, com $b < 0$. Nesse exemplo, $R(z, w) = 0$. Fazendo*

$$w(z) = a_1 z + a_2 \frac{z^2}{2} + a_3 \frac{z^3}{6} + a_4 \frac{z^4}{24} + a_5 \frac{z^5}{120} + O(6)$$

e igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau da equação diferencial obtemos,

$$a_1 = a + ba_1 \Rightarrow a_1 = \frac{a}{1-b}$$

$$a_2 = ba_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_i = ba_i \Rightarrow a_i = 0$$

Concluimos que, para $i \geq 2$ obtemos $a_i = 0$. Portanto encontramos a solução $w(z) = \frac{a}{1-b}z$ e ela é única.

Proposição 5.1 *Seja p um ponto umbílico de uma superfície S , com curvatura média constante. Existem coordenadas isotérmicas $Y : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S, p)$ cuja função complexa a ela associada é dada por $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$.*

Prova. Seja X uma carta isotérmica de S e ϕ sua função complexa associada. Como ϕ é uma função holomorfa, conseguimos escrevê-la da seguinte forma, $\phi(z) = cz^n(1 + r(z))$, onde $c \neq 0$, n é o grau do zero da função ϕ e $r(z)$ é uma

função holomorfa com $r(0) = 0$. Com uma transformação linear conseguimos $c = 1$.

Precisamos de um difeomorfismo holomorfo $z(u + iv)$ tal que a função complexa associada à carta Y seja $\tilde{\phi}(x + iy) = (x + iy)^n$.

Seja $\tilde{z}(z) = z(1 + \tilde{Z}(z))$, para concluir a demonstração precisamos mostrar que a equação diferencial $\phi(z) = \tilde{\phi}(\tilde{z}(z)) \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}(z) \right)^2$ tem solução. Em termos de $\tilde{Z}$ esta equação torna-se

$$\left(1 + \tilde{Z}(z) + z \frac{\partial \tilde{Z}(z)}{\partial z} \right)^2 z^n (1 + \tilde{Z}(z))^n = z^n (1 + r(z)). \quad (5-8)$$

No que se segue, consideramos apenas um ramo da raiz quadrada. Assim, a função fica bem definida. Usaremos a notação usual. Neste caso, equação diferencial 5-8 torna-se

$$z \frac{\partial \tilde{Z}(z)}{\partial z} = \frac{(1 + r(z))^{\frac{1}{2}} - \left((1 + \tilde{Z}(z))^{n+2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left((1 + \tilde{Z}(z))^n \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Seja } f = \frac{(1 + r(z))^{\frac{1}{2}} - \left((1 + \tilde{Z}(z))^{n+2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left((1 + \tilde{Z}(z))^n \right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ repare que}$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r'(z)}{\left((1 + r(z)) \cdot (1 + \tilde{Z})^n \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial \tilde{Z}}(0, 0) = -\frac{n}{2} \cdot \frac{(1 + r(z))^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \tilde{Z} \right)^{\frac{n+2}{2}}} - 1 < 0 \quad \text{e}$$

$$R(z, \tilde{Z}) = f - \left(z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) + \tilde{Z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{Z}}(0, 0) \right) \Rightarrow R(0, 0) = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \tilde{Z}} = 0.$$

Pelo lema 5.0.1, concluímos que existe uma solução para essa equação diferencial. Logo existe carta isotérmica tal que a função complexa a ela associada é $\phi(z) = z^n$. ■

Corolário 5.2 *Seja p um ponto umbílico de uma superfície S com curvatura média constante. Existem $2(n + 2)$ semirretas l_k em $T_p S$ que são pré-imagens de linhas de curvaturas. O ângulo entre duas semirretas consecutivas é de $\frac{2\pi}{2(n + 2)}$. As semirretas $l_k^+ = l_{2k}$ são pré-imagens de linhas de curvaturas*

maximais e duas semirretas consecutivas limitam um setor hiperbólico. As demais semirretas, $l_k^- = l_{2k-1}$ são pré-imagens de linhas de curvaturas mínimas e duas semirretas consecutivas também limitam um setor hiperbólico. O índice do ponto umbílico p é $\frac{-n}{2}$.

Prova. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\phi(w)(dw)^2] &= \operatorname{Im}\left[\left(\left(\frac{e-g}{2}\right)(u,v) - if(u,v)\right)(du + idv)^2\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[\left(\left(\frac{e-g}{2}\right)(u,v) - if(u,v)\right)(du^2 + 2idudv - dv^2)\right] \\ &= f dv^2 + (e-g)dudv - f du^2. \end{aligned}$$

Portanto a equação das linhas de curvatura equivale a $\operatorname{Im}[\phi(w)(dw)^2] = 0$. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que $\arg[\phi(w)(dw)^2] = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Pela proposição 5.1 existe uma carta $X(u,v)$, tal que a sua função complexa associada é dada por $\phi(w) = w^n$. Considere $\theta = \arg[w]$, devemos ter então $\arg[\phi(w)(dw)^2] = \arg[w^n(dw)^2] = n\theta + 2\arg[dz] = k\pi$.

Sendo assim,

$$\arg[dw] = \frac{k\pi - n\theta}{2} \quad (5-9)$$

que, como era esperado, define duas direções em cada parâmetro w do plano, pois w possui um valor fixo de θ . Mais especificamente, todo parâmetro da mesma semirreta partindo do zero possui as mesmas direções principais.

Por isso, as semirretas que satisfazem $\theta = \arg(dw)$ são linhas de curvatura.

$$\theta = \arg(dw) \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+2}$$

Portanto, as $2(n+2)$ semirretas l_k distintas que possuem ângulos $\theta_k = \frac{k\pi}{n+2}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2(n+2) = 0\}$ são linhas de curvatura.

As duas direções que $\arg[dw] = \frac{k\pi - n\theta}{2}$ definem são $\frac{-n\theta}{2}$ e $\frac{\pi}{2} - \frac{n\theta}{2}$. Escolhendo uma orientação local adequada, podemos assumir que as direções principais maximais satisfazem $\arg(dw) = \frac{-n\theta}{2}$ e as direções principais mínimas $\arg(dw) = \frac{\pi}{2} - \frac{n\theta}{2}$, onde θ é o argumento de w .

Analisando separadamente as linhas de curvaturas maximais, vemos que os argumentos de dw encontrados em 5-9 que definem argumentos de direções principais maximais são dados por $\arg(dw) = \frac{2k'\pi - n\theta}{2}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, $\arg(dw) = \theta$ nos mostra que as semirretas l_k^+ que são linhas de curvaturas maximais são as que possuem ângulo $\theta_{k'} = \frac{2k'\pi}{n+2}$, $k' = 0, 1, \dots, n+2 = 0$ ou θ_k , $k = 0, 2, \dots, 2(n+2)$ ou seja, $l_k^+ = l_{2k}$.

Uma linha de curvatura que passa por um ponto com argumento θ , dentro do setor angular limitado por l_k^+ e l_{k+1}^+ , sempre passa pela semirreta de argumento θ transversalmente, caso contrário, tal linha de curvatura seria a própria semirreta de argumento θ , mas, para direções principais, isso só ocorre quando $\theta_{k'}$, $k' = 0, 1, \dots, n+2 = 0$.

Concluimos, com isso, que essa curva passa transversalmente por toda semirreta contida no setor angular definido por l_k^+ e l_{k+1}^+ . Isso, juntamente com o fato de que $\arg(dw)$ decresce com θ , indica que as semirretas l_k^+ e l_{k+1}^+ , limitam um setor hiperbólico. Essas semirretas são denominadas separatrizes.

Paras as linhas de curvaturas mínimas, a construção é análoga.

Por fim, a variação de $\arg(dw)$, após uma variação de 2π de $\arg(w)$ é dada por $\frac{k\pi - n2\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} = -n\pi$, logo o índice do ponto umbílico é $-\frac{n}{2}$.

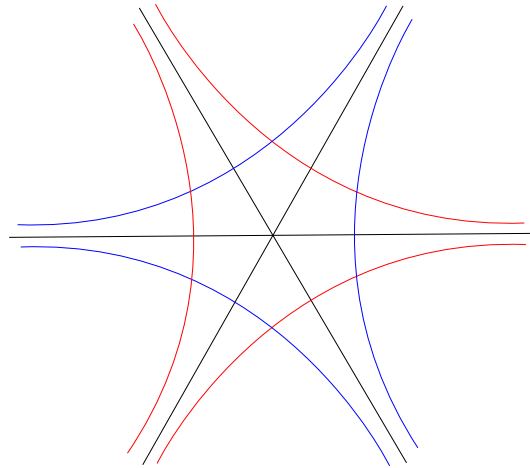


Figura 5.2: n=1

■

5.1

Pontos umbílicos de Darboux em superfícies com curvatura média constante

Considere p um ponto umbílico de uma superfície S com curvatura média constante. Seja $\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$ a parametrização de Monge dessa

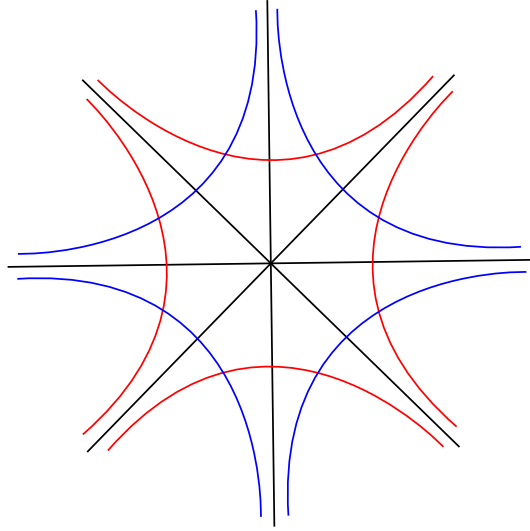


Figura 5.3: $n=2$

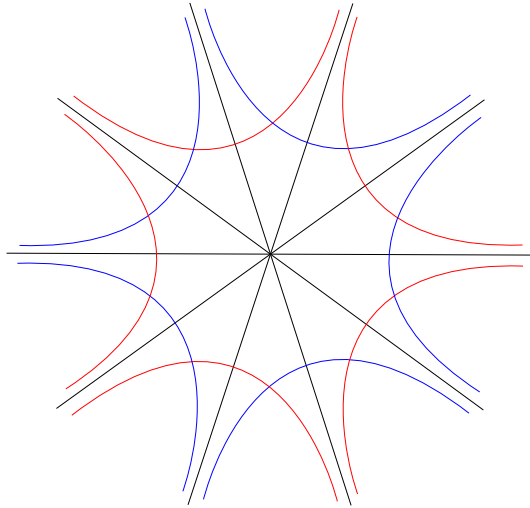


Figura 5.4: $n=3$

superfície. Nesse caso a curvatura média H é dada por

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\left(\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como H é constante, temos $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial v} = 0$. Avaliando $\frac{\partial H}{\partial u}$ em $(0, 0)$, obtemos $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0$. Logo, ou $a = b = 0$ e o ponto umbílico p não é um ponto de Darboux, ou $\frac{a}{b} = -1$ e p é um ponto de Darboux que satisfaz a condição $D3$.

Note que a condição $D3$ possui 6 semirretas partindo de $(0, 0)$ que

coincidem com linhas de curvatura. Portanto, levando em consideração que as semirretas, no caso de superfícies com curvatura média constante, são determinadas por $\theta_k = \frac{k\pi}{n+2}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2(n+2) = 0\}$, devemos ter $n = 1$. Logo o índice do ponto umbílico é $-\frac{1}{2}$. Ver figura 5.2.

Referências bibliográficas

- [1] CARMO, M. P. do. : **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [2] PORTEOUS, I. R. : **Geometric Differentiation- for the intelligence of curves and surfaces**, Cambridge University Press, 1994.
- [3] BRUCE, J. W. e FIDAL, D. L. : **On binary differential equations and umbilics**, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 111A, 147-168, 1989.
- [4] SOTOMAYOR, J. e GUTIERREZ, C. : **Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces**. Impreso en el Perú, Monografías del IMCA: N°3, 1998.
- [5] SOTOMAYOR, J. e GUTIERREZ, C. : **Principal lines on surfaces immersed with constant curvature**, Transactions of the American Mathematical Society, volume 293, Number 2, February 1986.