

**PASSIVO ATUARIAL ESTOCÁSTICO DE FUNDOS DE PENSÃO:  
UMA FERRAMENTA NECESSÁRIA AO EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO ENTRE  
ATIVOS / INVESTIMENTOS E PASSIVOS \***

**Luiz Felipe Jacques da Motta, Ph.D.**

Professor Assistente do Departamento de  
Administração da Pontifícia Universidade  
Católica do Rio de Janeiro (IAG PUC-Rio)  
Rua Marques de São Vicente 225, Gávea  
Rio de Janeiro – RJ - Brasil  
Tel: 21 3114-1412 Fax: 21 3114-1426  
E-mail: [lfelipe@iag.puc-rio.br](mailto:lfelipe@iag.puc-rio.br)

**Cleide Barbosa da Rocha, M.Sc.**

Doutoranda pela Pontifícia Universidade  
Católica do Rio de Janeiro (IAG PUC-Rio)  
Técnico Senior, Previ - Caixa de Previdência dos  
Funcionários do Banco do Brasil  
Praia de Botafogo 501, 3º andar - Botafogo  
Rio de Janeiro - RJ - Brasil  
Tel: 21 3870-1791  
E-mail: [cleiderocha@openlink.com.br](mailto:cleiderocha@openlink.com.br)

**ABSTRACT**

One of the major problems facing Pension Funds in Brazil nowadays is the development of huge actuarial deficits in the so-called Defined Benefit Plans, where the sponsor company is responsible for any unbalance between assets and liabilities during the life of the plan. The difference, if positive, between liabilities and assets, will require additional contributions by the company or the payment of smaller retirement benefits.

Several attempts have been made to develop models which try to establish long term investment policies, at the same time trying to model asset price behavior in the future. These models have not completely answer the question of how to allocate resources of the plans among different classes of assets, because they have failed to address the fundamental point that liabilities are also stochastic in nature. Thus, in order to fully address the ALM problem (Asset/Liability Management) one must model stochastic liabilities. This paper develops a Monte Carlo simulation of the liabilities of a typical Brazilian Defined Benefit Pension Plan. Its results could then be used to set more reliable investment policies for the plan.

**RESUMO**

Este estudo tem por objetivo apresentar uma análise do modelo estocástico para o passivo atuarial de um Fundo de Pensão, tendo como variáveis os três parâmetros de risco utilizados no cálculo das reservas matemáticas: crescimento salarial, inflação e taxa de administração. Desenvolvido o modelo estocástico do passivo, este pode ser integrado com o modelo, também estocástico, dos investimentos, visando uma política que otimize o "funding" de longo prazo, evitando-se, assim, o aparecimento de déficits no Fundo de Pensão.

**Palavras-chave:** Fundos de Pensão; Políticas de Investimento; ALM (Asset-Liabilities Management"); Simulação de Monte-Carlo; Planos Atuariais

**Artigo submetido para o Congresso BALAS 2002, Março 2002, Tampa, Flórida, EUA**

# **PASSIVO ATUARIAL ESTOCÁSTICO DE FUNDOS DE PENSÃO: UMA FERRAMENTA NECESSÁRIA AO EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO ENTRE ATIVOS / INVESTIMENTOS E PASSIVOS**

## **Introdução**

Os Fundos de Pensão são entidades fechadas de previdência privada sem fins lucrativos e cabe a eles garantir a seus participantes e respectivos beneficiários uma renda complementar aos benefícios pagos pela Previdência Básica Oficial.

Os ativos dos Fundos, constituídos com dotações, contribuições e rendimentos, são denominados recursos garantidores do passivo atuarial. Assim, qualquer planejamento de aplicação de recursos, que não tenha como foco a garantia do passivo, estará submetendo a entidade a correr riscos desnecessários.

Portanto, uma alternativa para minimizar o risco de insolvência do plano de benefícios em um Fundo de Pensão é considerar o cálculo do passivo atuarial como um modelo estocástico, e não apenas como um valor determinístico, dado que os ativos garantidores de tal passivo também se comportam de maneira estocástica.

Desta forma, a entidade de previdência privada poderá montar sua política de investimentos tendo como parâmetro o seu passivo atuarial, isto é, “marcar o passivo”, acompanhando as variabilidades das reservas matemáticas. Essa estratégia permitirá ao Fundo de Pensão efetuar o trabalho de “casamento” do ativo e do passivo, ou o *Asset Liability Management* (ALM). Com o ALM, a entidade terá a capacidade de disponibilizar apenas o necessário para cumprir suas obrigações atuariais, além de poder definir o nível de risco e o retorno esperado para suas aplicações.

O estudo abordará o aspecto dinâmico do passivo atuarial, onde serão simulados diversos cenários para se obter sua distribuição de probabilidade. Com isto, poderá ser desenvolvido a longo prazo uma política de integração entre ativo e passivo para os Fundos de Pensão.

## **Reserva Matemática**

É o valor determinado atuarialmente que equilibra as responsabilidades futuras entre o fundo de pensão e o participante, ou seja, é a diferença entre os encargos da entidade e do participante, avaliados num determinado instante, segundo premissas assumidas pelo atuário.

Para o estudo, foi criado um plano de benefícios que possui as seguintes características:

- Plano com 1.000 participantes em atividade, 500 participantes aposentados e 500 pensionistas;
- O Plano contempla os seguintes benefícios: complemento de aposentadoria programada, complemento de aposentadoria por invalidez e complemento de pensão por morte;
- Os participantes em atividade contribuem mensal e anualmente com 8% do salário de participação. Os participantes aposentados e os pensionistas não contribuem para o Plano;
- O patrocinador contribui na mesma proporção que os participantes em atividade, isto é, 8% do total dos salários de participação;
- A taxa de administração, que objetiva cobrir as despesas administrativas do Plano de Benefícios, será de 5% do total de receitas de todas as contribuições já acima citadas.

Neste trabalho, para efeito de cálculo das simulações da reserva matemática e do fluxo de caixa atuarial, utilizaremos o Método de Monte Carlo. A metodologia propicia a solução de problemas matemáticos não probabilísticos que podem ser expressos sob a forma de equação matemática para as quais não se poderia obter solução fácil pelos métodos comuns numéricos ou analíticos. A Simulação de Monte Carlo consiste em gerar diversos cenários, cujos parâmetros são escolhidos aleatoriamente dentro de um intervalo, de tal forma que se construa a distribuição de probabilidade da reserva matemática.

Para gerar os números aleatórios utilizados no cálculo das simulações de Monte Carlo, é necessário conhecer a distribuição dos seguintes parâmetros: fator de capacidade, taxa de crescimento salarial e taxa de administração. Estes parâmetros são definidos como premissas atuariais.

As premissas atuariais refletem o cenário de longo prazo envolvido no cálculo das reservas matemáticas<sup>i</sup>. É importante observar que o passivo atuarial é calculado a partir destas premissas assumidas, que podem não se concretizar ao longo do tempo<sup>ii</sup>. Por exemplo, a taxa de retorno utilizada no cálculo pode não ser atingida, impactando sensivelmente o valor da reserva

matemática; alguns participantes morrerão antes que alcancem a idade de aposentadoria, e seus beneficiários receberão benefícios antes de constituírem a reserva; alguns participantes se desligarão do plano antes da aposentadoria; e alguns participantes se aposentarão com salários maiores do que os estimados no cálculo da reserva matemática.

Portanto, a escolha de cenários para o cálculo deve ser feita em conjunto pelo atuário e pelo patrocinador, pois as premissas atuariais vão refletir diretamente no valor do passivo e, conseqüentemente no futuro aporte de contribuições que poderá ser feito ou não pelo patrocinador.

As premissas se dividem em: demográficas, econômicas e administrativas. As premissas demográficas estão relacionadas aos decrementos de morte ou invalidez a que o participante está exposto. As premissas econômicas estão relacionadas à inflação e taxa de juros, e impactam nos ativos de investimento do Fundo de Pensão. As premissas administrativas estão relacionadas à taxa de crescimento salarial e taxa de administração.

### **Premissas Demográficas<sup>iii</sup>**

As premissas demográficas, ou hipóteses de decremento, são aquelas utilizadas para projetar as futuras populações ativa e assistida do Plano de Benefícios. Tais hipóteses incluem a mortalidade dos válidos, mortalidade dos inválidos, entrada em invalidez, rotatividade e regras para elegibilidade da aposentadoria programada.

Os decrementos são escolhidos por meio de tábuas biométricas, cada qual indicando a probabilidade de morte, invalidez, morte de inválido, cada uma por idade e sexo<sup>iv</sup>. Existem diversas tábuas biométricas para cada contingência, e o atuário deve escolher aquela que melhor espelhe a expectativa de vida da massa dos participantes do fundo de pensão.

Diferente das demais tábuas biométricas, as quais são decorrentes de estudos estatísticos, as tábuas de rotatividade refletem o quadro dos participantes do Fundo de Pensão e são elaboradas em função da política e recursos humanos do patrocinador.

### **Premissas econômicas**

As premissas econômicas são utilizadas para projetar e determinar os ativos e passivos do plano durante o seu fluxo de caixa. São elas: taxa real de juros e fator de capacidade.

A taxa real de juros indica a taxa pelo qual o valor das obrigações será reinvestido por 20, 30 ou 40 anos e reflete a rentabilidade real da carteira de ativos de um Fundo de Pensão.

O atuário define como taxa real de juros um valor constante para todo o período de capitalização da reserva, pois sua variabilidade implica na alteração de todas as anuidades utilizadas no cálculo das reservas matemáticas, dificultando a geração de milhares de simulações.

No cálculo de simulação das reservas matemáticas, foi feita a análise de sensibilidade da taxa real de juros sobre as reservas matemáticas, considerando os valores de 6% e 5% ao ano.

O fator de capacidade reflete o impacto da inflação sobre os salários dos participantes ativos e benefícios de aposentadoria e pensão dos participantes assistidos, respectivamente. O fator de capacidade representa a perda salarial do participante ao longo dos anos. Quanto maior o nível de inflação, menor o fator de capacidade.

### **Premissas Administrativas**

As premissas administrativas estão relacionadas à política de recursos humanos do patrocinador, bem como ao planejamento orçamentário do Fundo de Pensão. São elas: taxa de crescimento salarial e taxa de administração.

A taxa de crescimento salarial reflete o Plano de Cargos e Salários que o patrocinador possui para seus empregados e procura espelhar a evolução do salário do participante em atividade em função de sua carreira profissional, considerando fatores como mérito e produtividade<sup>v</sup>.

O componente mérito evolui à medida que o participante em atividade tem progresso em sua carreira profissional e teoricamente se baseia no nível de responsabilidade que o empregado atinge durante sua vida ativa<sup>vi</sup>. O componente produtividade representa os ganhos que uma empresa ou grupo obtêm em um determinado período.

A taxa de administração reflete o nível de despesas administrativas que o fundo de pensão vem realizando nos últimos anos. Ela tem impacto sobre a reserva matemática, pois incide sobre as

contribuições do participante e do patrocinador. Portanto, quanto maior a taxa de administração do fundo de pensão, menor o montante de contribuições e maior o valor da reserva matemática.

### **Resultados da Reserva Matemática Determinística**

As reservas matemáticas contabilizadas no balanço dos Fundos de Pensão espelham valores determinísticos calculados em função das premissas assumidas pelo atuário e patrocinador.

No estudo, as reservas matemáticas dos participantes em atividade e dos assistidos foram calculadas em função das premissas definidas abaixo, isto é:

- Tábua de mortalidade: GAM-71;
- Tábua de entrada em invalidez: Alvaro Vindas;
- Tábua de mortalidade de inválidos: IAPC;
- Tábua de rotatividade: 4%
- Taxa de juros: 6% ao ano;
- Taxa de crescimento salarial: 1,20% ao ano;
- Fator de capacidade salarial: 0,9801;
- Fator de capacidade de benefícios: 0,9801;
- Taxa de administração: 5%.

Os valores das reservas matemáticas calculadas deterministicamente, isto é, com base nas premissas assumidas, são os seguintes:

Reserva Participantes Ativos:	R\$ 135.972.728,68
Reserva Participantes Assistidos:	R\$ 391.474.497,00
Reserva Matemática Total:	R\$ 527.447.225,68

### **Resultados da Reserva Matemática Estocástica**

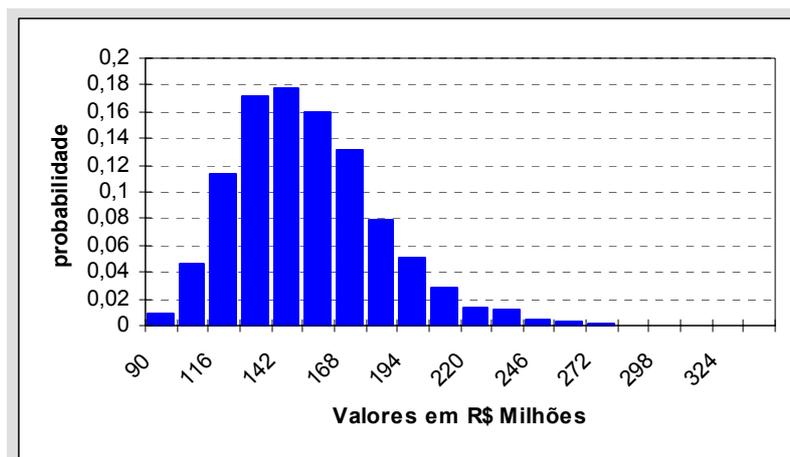
Para a reserva matemática calculada estocasticamente, construiu-se a distribuição de probabilidade dos parâmetros taxa de crescimento salarial, fator de capacidade de salários, fator de capacidade de benefícios e taxa de administração. Os dados que geraram a distribuição destes parâmetros foram fornecidos pela Secretaria de Previdência Complementar (SPC), órgão regulador e fiscalizador das entidades de previdência privada.

Em função dos valores de máximo e mínimo destes parâmetros, e conhecendo suas distribuições de probabilidade, simulou-se 4.000 cenários por Monte Carlo de tal forma que a reserva matemática convergisse para um determinado valor. Os valores encontrados para a reserva matemática estocástica encontram-se na tabela 1:

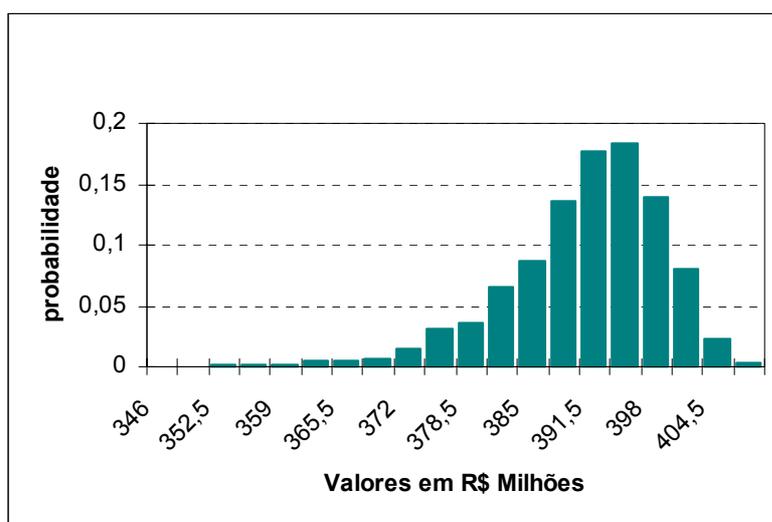
**Tabela 1: Valores da reserva matemática estocástica e parâmetros simulados**

Valores	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
Reserva Ativos (R\$)	90.062.020	358.780.800	157.318.500	30.200.420
Reserva Assistidos (R\$)	346.528.000	411.895.800	392.214.700	8.179.780
Reserva Total (R\$)	462.595.200	753.858.700	549.533.200	31.242.280
Fator capacidade salários	0,88273	1,02601	0,98372	0,0202
Fator capacidade Benefícios	0,86757	1,03123	0,98195	0,0205
Taxa crescimento salarial	-2,36%	8,29%	2,02%	1,36%
Taxa administração	0,23%	24,32%	8,01%	4,17%

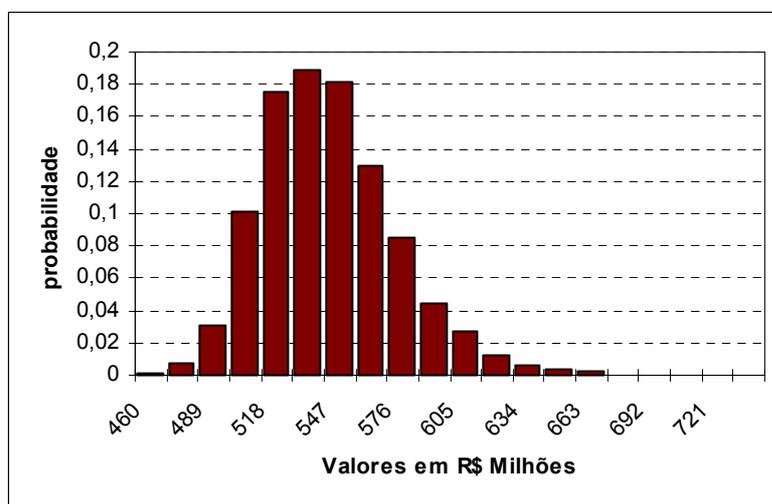
Os gráficos 1,2 e 3 apresentam as distribuições das reservas matemáticas dos participantes em atividade, dos participantes assistidos e a reserva total. Observa-se que as distribuições da reserva dos participantes ativos e da reserva total são assimétricas à direita, enquanto que a distribuição da reserva dos participantes assistidos é assimétrica à esquerda.



**Gráfico 1 - Reserva dos Participantes Ativos**



**Gráfico 2 – Reserva dos Participantes Assistidos**

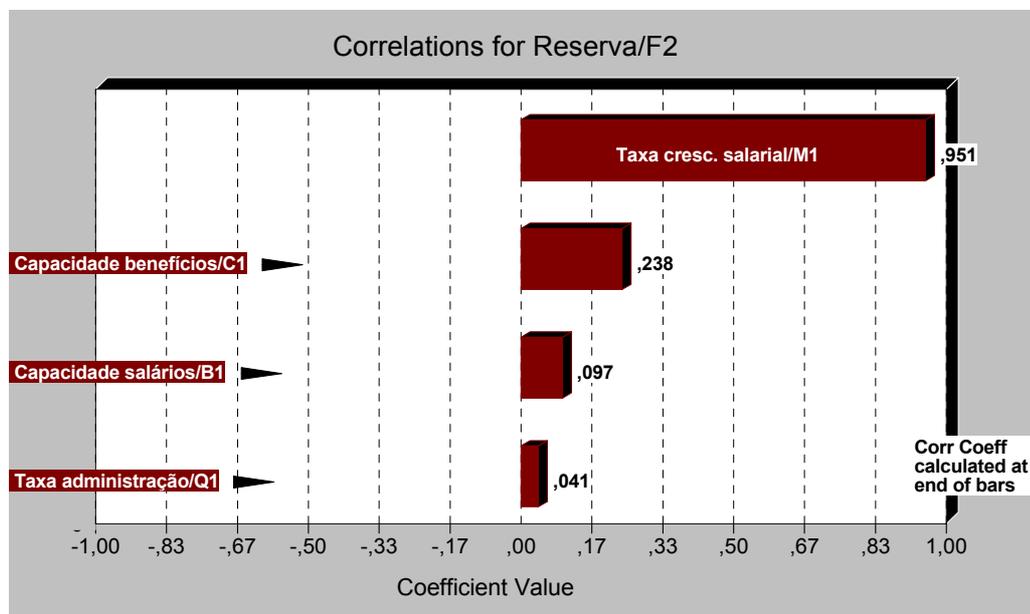


**Gráfico 3 - Reserva Matemática Total**

Conhecendo as distribuições das reservas matemáticas, podemos observar em que percentil está situada a reserva matemática calculada deterministicamente, bem como as premissas assumidas no cálculo.

Observamos ainda que, para um intervalo de confiança de 95%, a reserva matemática estocástica média está contida no intervalo (R\$ 488.298.331,00; R\$ 610.768.069,00).

Analisando os parâmetros simulados e comparando-os com os resultados da reserva matemática estocástica, vemos que a taxa de crescimento salarial possui o maior impacto dentre os parâmetros simulados, conforme gráfico 4:



**Gráfico 4 - Correlação entre os parâmetros simulados e a Reserva Matemática**

O gráfico 4 mostra que a correlação entre a taxa de crescimento salarial e a reserva matemática é 0,951. Portanto, é fundamental que a política de recursos humanos do patrocinador seja transparente para o Fundo de Pensão, pois qualquer política de incentivo salarial ou de desligamento que a empresa ofereça aos empregados impacta diretamente nas reservas matemáticas, refletindo nos salários futuros dos participantes em atividade.

Analisando a sensibilidade da taxa real de juros sobre as reservas matemáticas calculadas deterministicamente e estocasticamente, observa-se pela tabelas 2 e 3 que o impacto é maior para a reserva dos participantes em atividade, pois quanto mais novo o participante, maior será o tempo capitalizado e conseqüentemente maior será a variação da anuidade utilizada no cálculo das reservas matemáticas.

**Tabela 2: Impacto da taxa de juros sobre a reserva matemática determinística**

<b>Reservas Matemáticas</b>	<b>Taxa de juros 6%</b>	<b>Taxa de juros 5%</b>	<b>Variação</b>
Participantes Ativos (R\$)	135.972.728,68	163.066.804,84	19,93%
Participantes Assistidos (R\$)	391.474.497,00	434.438.800,05	10,97%
<b>Total (R\$)</b>	<b>527.447.225,68</b>	<b>597.505.604,89</b>	<b>13,28%</b>

**Premissas assumidas no estudo**

**Tabela 3: Impacto da taxa de juros sobre a reserva matemática estocástica**

	<b>Taxa de juros 6%</b>	<b>Taxa de juros 5%</b>	<b>Variação</b>
<b>Reserva dos Participantes Ativos (R\$)</b>			
Mínimo	87.530.120	102.663.200	17,29%
Máximo	339.048.300	345.772.500	1,98%
<b>Média</b>	<b>156.490.000</b>	<b>188.464.100</b>	<b>20,43%</b>
Desvio Padrão	30.789.790	37.354.920	21,32%
<b>Reserva dos Participantes Assistidos (R\$)</b>			
Mínimo	350.206.600	385.242.200	10,00%
Máximo	411.534.200	456.320.900	10,88%
<b>Média</b>	<b>392.517.100</b>	<b>435.374.000</b>	<b>10,92%</b>
Desvio Padrão	7.802.953	9.045.546	15,92%

<b>Reserva Matemática Total</b>			
Mínimo	471.877.200	525.063.700	11,27%
Máximo	742.271.400	774.369.300	4,32%
<b>Média</b>	<b>549.007.100</b>	<b>623.838.100</b>	<b>13,63%</b>
Desvio Padrão	32.069.060	38.341.510	19,56%

**Valores gerados por 2.500 simulações**

### **Fluxo de Caixa Atuarial**

A construção do fluxo atuarial no fundo de pensão tem por objetivo os seguintes pontos<sup>vii</sup>:

- determinar a estabilidade do pagamento de benefícios e a arrecadação de contribuições em um fundo de pensão;

- direcionar o tipo de financiamento mais adequado para o plano a fim de minimizar flutuações não esperadas de contribuições e benefícios;
- dar subsídios para a melhor estratégia de casamento entre ativos e passivos no fundo de pensão.

O fluxo de caixa atuarial foi projetado para quinze anos, evoluindo a massa de participantes do Plano de Benefícios por meio de tábuas biométricas e aposentando os participantes em atividade que preenchiam as condições necessárias para se aposentarem. Foi considerado ainda que, para cada ano, novos participantes em atividade ingressariam no plano.

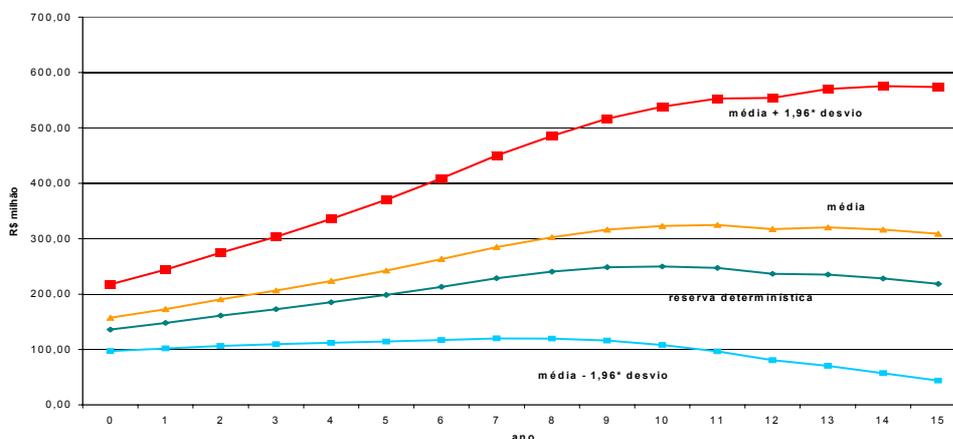
Os salários dos participantes em atividade foram evoluídos por meio da taxa de crescimento salarial e não foi considerado correção para os benefícios dos participantes aposentados e pensionistas.

Para cada reserva matemática, foi gerada a simulação de Monte Carlo e construída a sua distribuição de probabilidade<sup>viii</sup>.

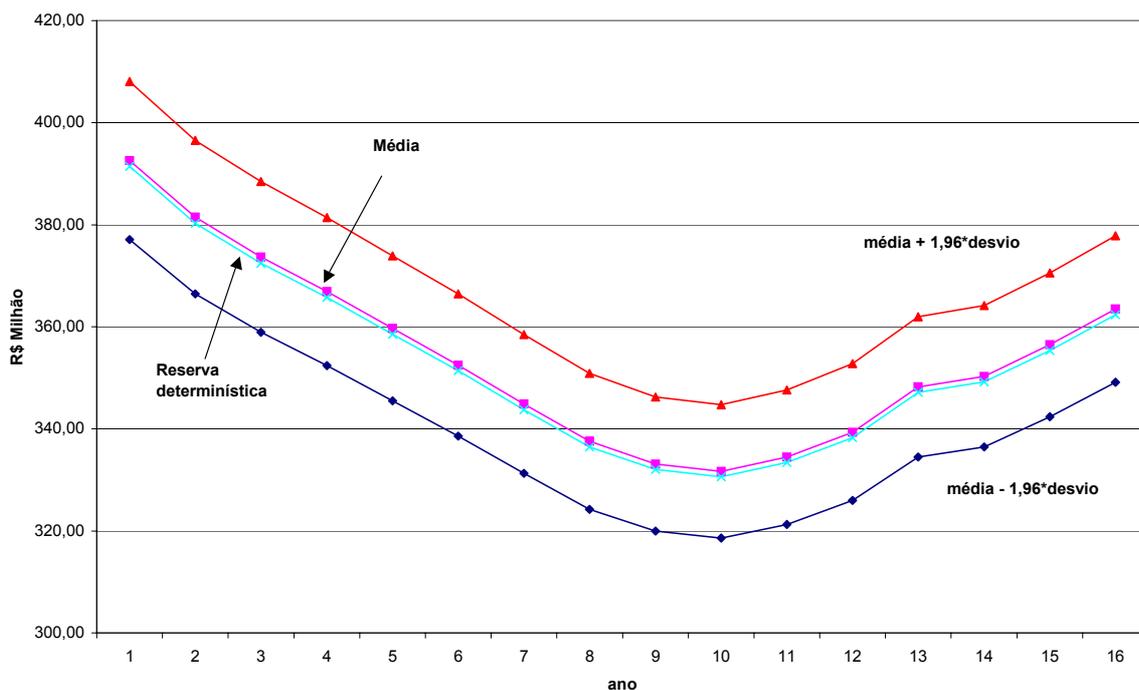
Para as reservas matemáticas dos participantes em atividade foram geradas 2.090 simulações, que foram suficientes para a convergência dos valores simulados. O mesmo conjunto de parâmetros simulados foi utilizado no cálculo das reservas do ano 1 até o ano 15.

Observa-se que o desvio padrão das reservas dos participantes ativos aumenta a cada ano, visto que a taxa de crescimento salarial possui forte impacto sobre as reservas. O gráfico 5 apresenta a curva da reserva média no mesmo período, levando em conta o seu desvio padrão a um nível de confiança de 95%

**Gráfico 5 – Evolução da reserva dos participantes em atividade nos próximos 15 anos com intervalo de confiança de 95%**

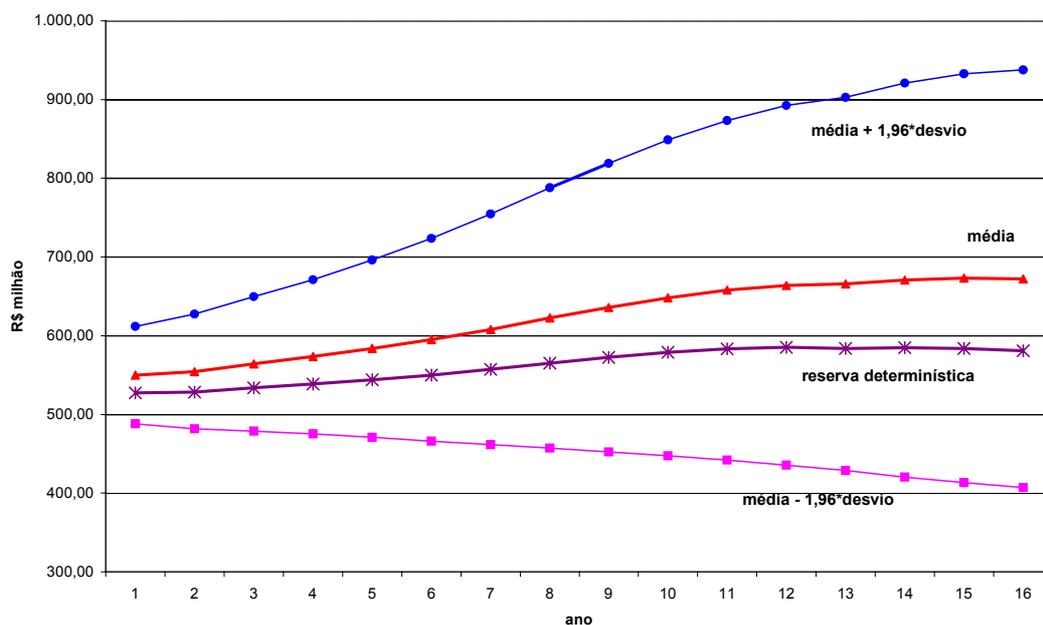


A projeção do fluxo de caixa atuarial da reserva matemática dos participantes assistidos foi realizada a partir da geração de 4.000 simulações pela Metodologia de Monte Carlo. A evolução da reserva dos participantes assistidos é mais simples e mais rápida que a da reserva dos participantes em atividade, pois apenas um parâmetro incide sobre o cálculo, o fator de capacidade de benefícios. Nota-se pelo gráfico 6 que o impacto deste parâmetro é igual em todo o período.



**Gráfico 6 – Evolução da reserva dos participantes assistidos nos próximos 15 anos com intervalo de confiança de 95%**

O gráfico 7 mostra a evolução da reserva matemática total calculada estocasticamente nos próximos 15 anos. Os valores são fundamentais para estimarmos o nível de incerteza da reserva matemática no médio prazo e minimizarmos o risco de déficit atuarial durante este período. Observa-se que o desvio da reserva evolui a cada ano.



**Gráfico 7 – Evolução da reserva matemática total nos próximos 15 anos com intervalo de confiança de 95%**

### Conclusões

Observando os parâmetros simulados, bem como analisando a sensibilidade da taxa real de juros sobre a reserva matemática, conclui-se que a taxa de crescimento salarial e a taxa real de juros são os fatores que causaram maior impacto sobre a reserva matemática do plano de benefícios criado no estudo.

A taxa real de juros está relacionada à rentabilidade dos ativos de investimento do fundo de pensão, enquanto que a taxa de crescimento salarial é indicada pelo patrocinador em virtude da política de recursos humanos da empresa. Cabe ao atuário analisar a escolha destes parâmetros, visto que é o profissional responsável pelas oscilações do passivo atuarial.

Cabe ressaltar que o impacto de cada parâmetro sobre a reserva dependerá das características do plano. Por exemplo, num plano de benefícios com população madura, a reserva matemática será mais sensível à variação do fator de capacidade, parâmetro simulado na reserva dos participantes assistidos.

Vê-se portanto que é possível saber o nível de probabilidade da reserva matemática contabilizada a partir de sua distribuição de probabilidade. Observa-se também que seu valor não necessariamente é a média da distribuição da reserva matemática estocástica, visto que as premissas administrativas, como taxa de crescimento salarial e taxa de administração, devem obedecer ao perfil do seu respectivo plano de benefícios.

Por fim, a distribuição da reserva matemática pode subsidiar os ativos de tal forma que os recursos garantidores da Entidade não sejam menores que o passivo atuarial.

O cálculo da reserva matemática estocástica permite ainda construir o fluxo de caixa atuarial do Fundo de Pensão baseado na distribuição de probabilidade das reservas matemáticas projetadas para os próximos anos. Conseqüentemente, pode-se fazer um amplo mapeamento do passivo atuarial, calcular os riscos envolvidos e projetar os desembolsos para fazer frente aos compromissos atuariais.

Observa-se ainda que os ativos de um Fundo de Pensão se comportam estocasticamente, pois sua taxa de retorno é estimada a partir da simulação de diversos cenários de longo prazo. Conseqüentemente, o conhecimento do processo estocástico das reservas matemáticas e dos fluxos atuariais é fundamental para a escolha da política de investimentos dos Fundos de Pensão de tal forma que minimize a probabilidade de déficits atuariais no futuro.

Logo, a solução dinâmica para o cálculo das reservas matemáticas será de grande valia para a elaboração do *Asset Liability Management* nos Fundos de Pensão, bem como poderá subsidiar o patrocinador no fluxo de contribuições futuras para a Entidade.

### **Bibliografia**

- ALLISON Glenn D., WINKLEVOSS, H. **The Interrelationship among Inflation Rates, Salary Rates and Pension Costs**. Transactions of Society of Actuaries, vol. 27, 1975 pg 197-230.
- FREES, Edward W. **Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations**. Transactions of Society of Actuaries, 1990, vol 42, pg 91-123.
- KINGSLAND, Louis **Projecting the Financial Condition of a Pension Plan Using Simulation Analysis**. Journal of Finance, 1982, vol. 37 n° 2, pg 577-584.

- McGILL, Dan M. **Fundamentals of Private Pensions**. 3. Ed., Illinois: Richard D. Irwin, 1975.
- SZE, Michael **The Process of Pension Forecasting**. Journal of Actuarial Practice, vol. 1. nº 1, 1993, pg 31-50.
- WINKLEVOSS, Howard E. **Pension Mathematics with Numerical Illustrations**. Illinois: Richard D. Irwin, Inc. 1977.

## Notas

---

<sup>i</sup> MacBeth et al. (1994), página 34.

<sup>ii</sup> Kingsland (1982), página 577.

<sup>iii</sup> McGill (1975), página 312.

<sup>iv</sup> Winklevoss (1977), página 10.

<sup>v</sup> Winklevoss (1977), página 23.

<sup>vi</sup> Alisson (1975), página 198.

<sup>vii</sup> Sze (1993), página 33.

<sup>viii</sup> Frees (1990), página 93.