



Jackes Martins da Silva

**Dimensão espectral em árvores aleatórias
com aplicações na física estatística e
gravitação quântica**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da PUC-Rio

Orientador : Prof. Hiroshi Nunokawa

Co-Orientador: Prof. Stefan Zohren

Rio de Janeiro
Abril de 2015



Jackes Martins da Silva

**Dimensão espectral em árvores aleatórias
com aplicações na física estatística e
gravitação quântica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Hiroshi Nunokawa

Orientador

Departamento de Física — PUC-Rio

Prof. Stefan Zohren

Co-Orientador

University of Oxford

Prof. Ana Patricia Carvalho Gonçalves

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luis Esteban Oxman

Instituto de Física — UFF

Prof. Welles Antonio Martinez Morgado

Departamento de Física — PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de Abril de 2015

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Jackes Martins da Silva

Bacharel em Física pela Universidade Estadual de Maringá, onde se dedicou a estudar processos estocásticos, em especial, difusão anômala. Durante o mestrado se dedicou a estudar as características típicas de grafos aleatórios e suas aplicações na física estatística e gravitação quântica.

Ficha Catalográfica

Martins da Silva, Jackes

Dimensão espectral em árvores aleatórias com aplicações na física estatística e gravitação quântica / Jackes Martins da Silva; orientador: Hiroshi Nunokawa; co-orientador: Stefan Zohren. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Física, 2015.

v., 57 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Física) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Tese. 2. Grafos. 3. Árvores aleatórias. 4. Caminho aleatório. 5. Dimensão espectral. I. Nunokawa, Hiroshi. II. Zohren, Stefan. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. IV. Título.

Para meus pais, Adão Martins (in memoriam) e Lenir Oliveira.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Stefan Zohren, pelo aprendizado e extraordinária experiência em pesquisa, além da amizade, auxílio e paciência nesse período.

A minha família, em especial, a minha mãe, Lenir Oliveira, pelo apoio e compreensão durante esses dois anos. Aos meus irmãos, Ederson Martins e Eliane Bettega, pelo auxílio e amizade. A minha tia Vanda pelo carinho e auxílio. Ao meu Vô, Antônio Leal, pelo apoio indispensável.

A todos os professores do Departamento de Física pelos ensinamentos, em especial, aos professores Marco Cremona e Hiroshi Nunokawa que sempre me atenderam gentilmente.

A todos os funcionários da PUC-Rio por toda ajuda e diligência, em especial, a Giza, Márcia e Julinho.

A todos meus amigos e colegas, em especial, ao Jefferson, Mateus e Aline, pelo companheirismo e ajuda a qualquer momento.

Às agências de fomento, FAPERJ e CNPq, pelo auxílio concedido, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

A todos aqueles que de uma forma ou de outra me ajudaram e por ventura eu não citei anteriormente.

Resumo

Martins da Silva, Jackes; Nunokawa, Hiroshi; Zohren, Stefan. **Dimensão espectral em árvores aleatórias com aplicações na física estatística e gravitação quântica**. Rio de Janeiro, 2015. 57p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As estruturas geométricas aleatórias são de grande interesse devido ao longo alcance de suas aplicações na ciência. As árvores aleatórias constituem um dos modelos mais interessantes a ser estudado, pois, entre outros, é aplicado diretamente à gravitação quântica. Pretendemos investigar as propriedades de tais árvores através de informações quantitativas, como a dimensão fractal e a dimensão espectral, calculadas através de um processo de difusão no ensemble estatístico das árvores. Focamos em modelos de árvores que crescem aleatoriamente através de um processo com propriedade de ramificação Markoviana.

Palavras-chave

Grafos ; Árvores aleatórias ; Caminho aleatório ; Dimensão espectral.

Abstract

Martins da Silva, Jackes; Nunokawa, Hiroshi (advisor); Zohren, Stefan. **Spectral dimension in random trees with applications in statistical physics and quantum gravity**. Rio de Janeiro, 2015. 57p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Random geometric structures are of general interest due to their wide range of applications in different areas of science. In particular, we focus on random trees which amongst others can be applied directly to the quantum gravity. We intend to investigate properties of these trees through quantitative information, such as the fractal dimension and the spectral dimension obtained from diffusion on those ensembles of trees. We focus on models of trees that grow randomly through a process with branching Markov property.

Keywords

Graphs ; Random trees ; Random walks, ; Spectral dimension.

Lista de figuras

- 2.1 Um grafo $G(V, E)$, no qual $V = \{1, \dots, 7\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. 13
- 3.1 Grafo gerado através do processo de ramificação, no qual são revelados os números de filhos Z_t das gerações $t = 0, t = 1, t = 2$ e $t = 3$. 20
- 3.2 Comportamento da função geradora de probabilidade $G(z)$ quando $\mu < 1$. 22
- 3.3 Comportamento da função geradora de probabilidade $G(z)$ quando $\mu > 1$. 23
- 3.4 Probabilidade de extinção em função de μ . 24
- 3.5 Grafo com vértices $V = \{0, 1, 2, 00, 01, 20, 200\}$ 31
- 4.1 Árvore com uma espinha infinita que começa na raiz r e indexada com os vértices s_1, s_2, \dots . As linhas pontilhadas são as ilustrações da bola \mathcal{B}_R e da casca $\tilde{\mathcal{B}}_R$ sobre a árvore. A bola \mathcal{B}_R é a subárvore contendo todas as arestas dentro do raio R . Os ramos do vértice s_i são denominados de \mathcal{A}^i . A casca $\tilde{\mathcal{B}}_R$ é composta por todos os ramos \mathcal{A}^i e todos os vértices s_i da espinha até s_R , incluindo a raiz r . 37

Sumário

1	Introdução	10
2	Conceitos básicos da teoria dos grafos e da probabilidade	12
2.1	Conceitos básicos da teoria dos grafos	12
2.2	Definições básicas da teoria da probabilidade	13
3	Grafos aleatórios e processo de ramificação	19
3.1	Motivação	19
3.2	Processo de Galton-Watson	19
3.3	Processo de ramificação condicionado	33
4	Dimensão espectral de árvores com uma espinha infinita	34
4.1	Árvores com espinha infinita: dimensão de bola e dimensão de casca	35
4.2	Passeio aleatório em árvores e dimensão espectral	38
4.3	Relação entre dimensão de Hausdorff e dimensão espectral	40
4.4	Ramos independentes e identicamente distribuídos	44
4.5	Árvores de Galton-Watson Condicionadas	50
5	Conclusão	54
	Referências Bibliográficas	55

1

Introdução

O interesse no estudo de grafos é devido ao grande número de aplicações que podem ser feitas em várias áreas da ciência, tais como Matemática, Física, Biologia, entre outras. Suas técnicas têm sido utilizadas para desenvolver diversos avanços como (por exemplo): árvores filogenéticas [1], na dinâmica do dobramento aleatória da molécula de RNA [2], processo de catálise em meios porosos [3], transporte de fluidos [4] e, em especial, à gravitação quântica [5–7].

O objeto de estudo da gravitação quântica é a reconciliação entre a relatividade geral e a mecânica quântica. A principal dificuldade nesse processo é que a gravidade é perturbativamente não renormalizável em quatro dimensões [8]. Portanto, o principal objetivo da gravitação quântica é entender a estrutura do espaço-tempo a distâncias muito pequenas. Pois, espera-se que a microestrutura do espaço-tempo forneça um regulador físico para as singularidades à pequenas distâncias (ultravioletas) encontradas na teoria quântica de campos perturbativa [9]. Portanto, o desafio é construir uma descrição quântica consistente deste regime gravitacional não perturbativo, de forma que permaneça fisicamente correta.

Apesar do grande número de ideias potencialmente promissoras, ainda estamos distantes de uma teoria quântica da gravidade consistente [10]. Por outro lado, abordagens muito diferentes, tais como “triangulação dinâmica causal” (TDC) e “grupo de renormalização exata” (GRE) tem obtidos resultados similares [11]. Por exemplo: a dimensão espectral d_s do espaço-tempo varia de um valor clássico $d_s = 4$ em grande escala, diminuindo gradualmente até $d_s = 2$ em curta escala. Ainda que nenhum modelo esteja correto, tais avanços são atrativos para a manutenção dos estudos nessa linha de pesquisa e sugerem que estruturas discretas profundas poderiam originar uma teoria correta.

O modelo de ensembles de multigrafos tem se revelado potencialmente promissor para a gravidade quântica Lorentziana [8]. As árvores críticas não genéricas, descritas por um processo de ramificação, têm se mostrado potencialmente relevantes para a análise dessa abordagem [12]. Partindo dessa motivação, o estudo dos modelos de árvores aleatórias toma uma papel

importante para a tentativa de compreender a estrutura fundamental do espaço-tempo.

Na teoria quântica é útil trabalhar com modelos discretizados, pois o espaço-tempo quântico corresponde a ensembles estatísticos de geometrias discretizadas. Na nossa abordagem, tais geometrias são grafos aleatórios. A motivação para a escolha de árvores aleatórias é devido à facilidade de se tratar essas estruturas analiticamente. Isso também nos permite estudar a dimensão espectral, quantidade importante da gravitação quântica. Contudo, devido ao fato de que as árvores são aleatórias, o processo de difusão usado para definir a dimensão espectral também é aleatório. Logo, temos dois tipos de aleatoriedade para lidar! Com essa complicação, é importante utilizar técnicas avançadas da probabilidade, além de técnicas da física estatística. Por isso, damos ênfase neste trabalho ao estudo dessas geometrias. Além disso, as técnicas desenvolvidas são universais e relevantes para outras áreas. Por exemplo, as técnicas são aplicáveis às redes nas quais a difusão pode ser a propagação de informação [13].

2

Conceitos básicos da teoria dos grafos e da probabilidade

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos que serão utilizados no decorrer desse trabalho. Começamos revisando brevemente alguns objetos da teoria dos grafos, definindo e explicando os seus significados. Logo após, exporemos algumas definições e ferramentas da teoria da probabilidade que serão aplicadas aos modelos que estudaremos nos próximos capítulos.

2.1

Conceitos básicos da teoria dos grafos

Na teoria dos grafos, um grafo é definido como um par $G = (V, E)$, no qual V é um conjunto não vazio de vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices. Isto é,

$$E \subset \binom{V}{2} = \{(x, y) \subseteq V : x \neq y\}. \quad (2-1)$$

Os grafos que estudaremos são rotulados, ou seja, os vértices estão associados a um rótulo, como, por exemplo, um número inteiro $V = [n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, no qual n é o número de vértices no grafo. O modo usual de se representar graficamente um grafo é desenhar para cada vértice um ponto, juntando dois desses pontos por uma linha, se esses vértices formam uma aresta. É irrelevante a forma como é desenhado esses pontos e linhas, desde que se preserve a informação de quais pares de vértices formam uma aresta, e quais não formam [14].

O número de arestas em um grafo G será denotado por $|G|$. O grau (ou valência) $\sigma(v)$ de um vértice $v \in V$ é o número de arestas $|E(v)|$ que são incidentes em v . Dois vértices de G são vizinhos, ou adjacentes, se xy é uma aresta de G .

Um caminho é um grafo $P = (V, E)$ da forma:

$$V = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

na qual x_i são todos distintos. Os vértices x_0 e x_k são chamados de vértices terminais, enquanto que os vértices x_1, \dots, x_{k-1} são chamados de vértices internos. O comprimento de um caminho é o número de arestas contidas nesse caminho. Dado um caminho $P = x_0 \dots x_{k-1}$, e se $k \geq 3$, então o grafo $C := P + x_{k-1}x_0$ é chamado de ciclo. Se dois quaisquer vértices de um grafo são ligados por um caminho, esse grafo é dito conexo. Um grafo que pode ser incorporado a um plano é dito planar. Isto é, se pudermos desenhar um grafo em um plano, de tal forma que nenhuma das arestas se interceptem em algum ponto, dizemos que esse grafo é isomorfo a um grafo plano [14, 15].

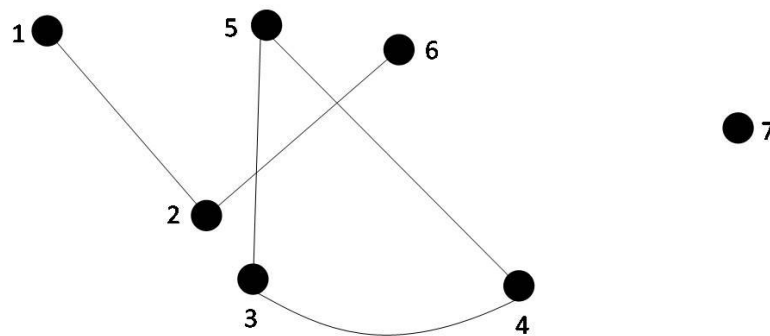


Figura 2.1: Um grafo $G(V, E)$, no qual $V = \{1, \dots, 7\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.

Um grafo acíclico (que não contenha ciclos) é chamado de floresta. Uma floresta conexa é chamada de árvore. Um vértice de grau 1 é dito vértice folha (ou simplesmente folha). Um ramo em um vértice v é o máximo de subárvores que tenha esse vértice como terminal. Logo, o número de ramos em um vértice v é também o grau de v . Algumas vezes é conveniente considerarmos um vértice de uma árvore como especial. Nesse caso, chamamos esse vértice de raiz. Uma árvore com uma raiz é dita enraizada [14].

2.2 Definições básicas da teoria da probabilidade

Nos próximos capítulos vamos estudar algumas propriedades típicas de modelos de grafos aleatórios. Com esse propósito, iremos primeiramente introduzir algumas definições básicas da teoria da probabilidade que

utilizaremos com esse intuito. A maioria das definições podem ser encontradas em [16], caso contrário será citado explicitamente.

Começaremos com a definição mais básica: um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \Sigma_0, \mathbf{P})$, formado por um conjunto Ω , uma σ -álgebra Σ_0 em Ω , e uma medida positiva \mathbf{P} nessa σ -álgebra. Ω é chamado de espaço amostral, os elementos de Σ_0 são chamados de eventos e a medida \mathbf{P} é chamada de medida de probabilidade.

2.2.1

Definição de uma álgebra

Seja S um conjunto, uma coleção Σ_0 de subconjuntos de S é chamada de uma álgebra sobre S (ou álgebra dos subconjuntos de S) se [17]:

- (i) $S \in \Sigma_0$,
- (ii) $F \in \Sigma_0 \Rightarrow F^c := S/F \in \Sigma_0$,
- (iii) $F, G \in \Sigma_0 \Rightarrow F \cup G \in \Sigma_0$.

Então, uma álgebra sobre S é uma família de subconjuntos de S estáveis sob um conjunto de operações finitas.

2.2.2

Definição de uma σ -álgebra

Uma coleção Σ de subconjuntos de S é chamada de uma σ -álgebra em S (ou σ -álgebra dos subconjuntos de S), se Σ é uma álgebra em S tal que para qualquer $F_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\bigcup_n F_n \in \Sigma. \tag{2-2}$$

Portanto, uma σ -álgebra em S é uma família de subconjuntos de S “estável sobre qualquer coleção contável de operações de conjunto” [17].

2.2.3

Espaço mensurável

Um par (S, Σ) , no qual S é um conjunto e Σ é uma σ -álgebra em S , é chamado espaço mensurável. Um elemento de Σ é chamado de subconjunto Σ -mensurável de S .

2.2.4 Medida

Uma medida é uma função de conjuntos φ não negativa, contável e aditiva. Isto é, uma função $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ com:

- (i) $\varphi(A) \geq \varphi(\emptyset) = 0; \forall A \in \Sigma$,
- (ii) se A_i é uma sequência contável de conjuntos disjuntos, então

$$\varphi \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i \varphi(A_i) \tag{2-3}$$

Se $\varphi(\Omega) = 1$, chamamos φ de uma medida de probabilidade. No decorrer deste trabalho, como mencionado anteriormente, denotamos as medidas de probabilidade por \mathbf{P} .

2.2.5 Variável aleatória

Seja C um espaço topológico, a σ -álgebra de Borel, denotada por $B(C)$, sobre C é a σ -álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos de C .

Uma função X , que toma valores nos reais e é definida sobre Ω , é dita ser uma variável aleatória (v.a.) se para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$ temos $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \Sigma$.

2.2.6 Esperança

A função f é dita uma função simples se $f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i(\omega) \mathbb{1}_{A_i}$, na qual A_i são conjuntos disjuntos com $\varphi(A_i) < \infty$. Se $X(\omega)$ é uma variável aleatória em $(\Omega, \Sigma_0, \mathbf{P})$, então a esperança de $X(\omega)$ é definida por $\mathbf{E}(X) = \int X(\omega) d\mathbf{P}$. Para funções simples, a última integral é definida por $\int X(\omega) d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n a_i(\omega) \mathbf{P}(A_i)$, podendo ser igual a ∞ . Geralmente denominamos $\mathbf{E}(X(\omega))$ de média de $X(\omega)$ e a denotamos por μ . Outras definições de $\int X(\omega) d\mathbf{P}$ para uma classe de funções mensuráveis podem ser encontradas em [16].

Sejam X_1, \dots, X_n v.a. mutuamente independentes e com esperança finita. Então o produto dessas variáveis é uma v.a. com esperança finita e

$$\mathbf{E}(X_1 X_2 \dots X_n) = \mathbf{E}(X_1) \mathbf{E}(X_2) \dots \mathbf{E}(X_n). \tag{2-4}$$

Agora, sejam X_1, \dots, X_n v.a. identicamente distribuídas. Então temos a relação

$$\mathbf{P}(X_1) = \mathbf{P}(X_2) = \dots = \mathbf{P}(X_n). \quad (2-5)$$

2.2.7

Esperança condicional

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma_0, \mathbf{P})$, uma σ -álgebra $\Sigma \subset \Sigma_0$, e uma variável aleatória X com $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, definimos a esperança condicional de X dado Σ , que se denota por $\mathbf{E}(X|\Sigma)$, qualquer variável aleatória Y que satisfaça:

- (i) $Y \in \Sigma$, i.e., Y é Σ -mensurável;
- (ii) para todo $A \in \Sigma$, $\int_A X d\mathbf{P} = \int_A Y d\mathbf{P}$.

2.2.8

Martingal

Seja F_n um filtro, que é definido como uma sequência crescente de σ -álgebras. Uma sequência de variáveis aleatórias X_n é dita adaptada à F_n se $X_n \in F_n$ para todo n . Isto é, um processo $X_n(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é chamado F_n -adaptado se para todo $t \geq 0$ a função $\omega \rightarrow X_n(\omega)$ é F_n -mensurável. Se X_n é uma sequência com as seguintes propriedades:

- (i) $\mathbf{E}(|X_n|) < \infty$;
- (ii) X_n é adaptada à F_n ;
- (iii) $\mathbf{E}(X_{n+1}|F_n) = X_n$ para todo n .

Então X_n é dito ser um martingal com respeito à F_n . Se na definição (iii) for trocada a igualdade por \leq ou \geq , então X_n é dito ser um supermartingal ou submartingal, respectivamente.

2.2.9 Função geradora de probabilidade

Seja X uma variável aleatória discreta que admite valores em \mathbb{Z}^+ (no decorrer deste trabalho usaremos a convenção $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \dots\} := \mathbb{Z}^+$). Seja $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}_k$ a probabilidade da v.a. X valer k . Definimos $f(z)$ a função geradora de probabilidade de X como o mapa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(z) := \mathbf{E}(z^X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} z^k \mathbf{P}(X = k), \quad (2-6)$$

no qual $\mathbf{E}(z^X)$ é a esperança de z^X tomada com respeito à medida \mathbf{P} . Para $z \in [0, 1]$,

$$f'(z) := \mathbf{E}(X z^{X-1}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} k z^{k-1} \mathbf{P}_k. \quad (2-7)$$

Logo,

$$\mu := f'(1) = \mathbf{E}(X) \leq \infty. \quad (2-8)$$

Ainda podemos tomar a r -ésima derivada da função $f(z)$ para derivarmos os momentos de ordens superiores [17].

Além disso, como a soma das probabilidades \mathbf{P}_k é igual a 1, e se $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 < 1$, temos as seguintes propriedades [18]:

- (i) f é estritamente convexa e crescente em $[0, 1]$;
- (ii) $f(0) = \mathbf{P}_0$ e $f(1) = 1$;
- (iii) se $\mu \leq 1$, então $f(z) > z$ para $z \in [0, 1]$;
- (iv) se $\mu \geq 1$, então $f(z) = z$ tem uma única raiz em $[0, 1]$.

Vamos agora derivar algumas propriedades importantes das funções geradoras. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) que admitem valores em \mathbb{Z}^+ . Portanto, X_i têm a mesma função geradora de probabilidade $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \mathbf{P}(X_i = j)$ para todo i . Assim podemos obter

$$\mathbf{E} \left(z^{\sum_{i=1}^m X_i} \right) = \mathbf{E} \left(z^{X_1+X_2+\dots+X_m} \right) = \mathbf{E}(z^{X_1})\mathbf{E}(z^{X_2})\dots\mathbf{E}(z^{X_m}) = f(z)^m. \quad (2-9)$$

Seja a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$. E definindo a condição inicial $S_0 = 1$ e $G_n(z)$ a função geradora de S_n . Se $S_{n-1} = k$, então $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_k$. Daí temos que

$$G_n(z) = \mathbf{E} \left(z^{S_n} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \mathbf{E} \left(z^{S_n} | S_{n-1} = k \right) \mathbf{P}(S_{n-1} = k) \quad (2-10)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \mathbf{E} \left(z^{X_1+X_2+\dots+X_k} | S_{n-1} = k \right) \mathbf{P}(S_{n-1} = k). \quad (2-11)$$

Como $X_1 + X_2 + \dots + X_k$ são i.i.d. e usando Eq. (2-9), obtemos a importante relação

$$G_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} G(z)^k \mathbf{P}(S_{n-1} = k) = G_{n-1}(G(z)). \quad (2-12)$$

Na qual,

$$G_0(z) = z, \quad G_1(z) = G(z), \quad G_{n+1}(z) = G_n(G(z)) \quad (2-13)$$

são as funções iteradas de G . Então, $G_n = G \circ \dots \circ G$, n-vezes, é a n-ésima iteração de $G(z)$ [18].

gadget

3

Grafos aleatórios e processo de ramificação

Neste capítulo, definiremos o modelo do processo de ramificação (ou processo de Galton-Watson). Primeiramente, abordaremos de uma forma intuitiva algumas propriedades típicas de árvores geradas através desse modelo. Logo após, analisaremos de uma forma mais rigorosa o caso subcrítico, crítico, e supercrítico. Por fim, apresentaremos um importante modelo de Galton-Watson condicionado que será estudado no próximo capítulo.

3.1

Motivação

Na década de 50, Erdős e Rényi introduziram dois modelos de grafos aleatórios. No primeiro deles, tomam-se n vértices e m de $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas possíveis entre esses vértices aleatoriamente. As propriedades desse modelo nos dizem como um grafo “típico” de n vértices e m arestas se pareceria. Esta foi a motivação incipiente para os estudos desses modelos: entender as propriedades típicas de grafos aleatórios [19]. O método é melhor ilustrado com exemplos, como o processo de Galton-Watson que será estudado nesta seção.

3.2

Processo de Galton-Watson

A primeira aplicação do processo de ramificação foi para resolver a questão da sobrevivência dos nomes de família. Nesse contexto, definimos ξ como a prole (filhos homens) de um homem como uma v.a.. ξ toma valores em \mathbb{Z}^+ . Além disso, n é o número de vértices em nosso grafo e t é o parâmetro de tempo discreto [17, 19]. Portanto, sejam ξ_i^t as variáveis aleatórias i.i.d. que representam o número de filhos “ k ” de “ i ” na geração “ t ”, ou seja, para cada i , $t \geq 0$ e $k \in \mathbb{Z}^+$, temos $\mathbf{P}(\xi_i^t = k) = \mathbf{P}(\xi = k)$. Definimos a sequência Z_t , na qual $Z_0 = 1$ e

$$Z_{t+1} = \begin{cases} \xi_1^{t+1} + \dots + \xi_{Z_t}^{t+1} & \text{se } Z_t > 0 \\ 0 & \text{se } Z_t = 0. \end{cases} \quad (3-1)$$

A ideia por trás da definição é que para $t, i \in \mathbb{Z}^+$, a variável ξ_i^{t+1} representa o número de filhos (que estará na $(t+1)$ -ésima geração) do i -ésimo homem da t -ésima geração. Z_t é o número de pessoas da t -ésima geração, e cada membro da t -ésima geração gera independentemente um número de filhos identicamente distribuídos [17, 19].

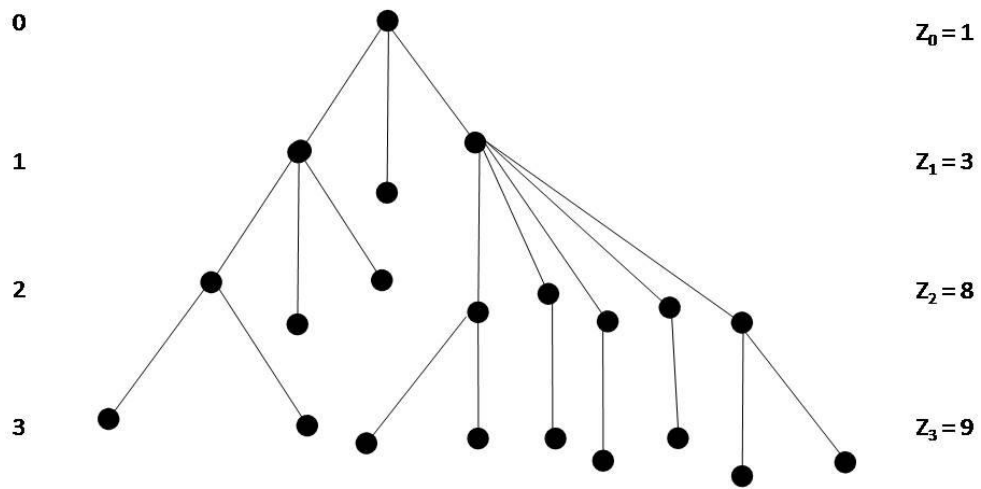


Figura 3.1: Grafo gerado através do processo de ramificação, no qual são revelados os números de filhos Z_t das gerações $t = 0, t = 1, t = 2$ e $t = 3$.

Para efeito de informação, também podemos definir o modelo através de uma abordagem mais próxima da Física Estatística. Nesse caso, as árvores simplesmente geradas tem como parâmetros uma sequência de pesos não negativos $(w_m)_{m \geq 1}$, denominados pesos de ramificação. Os pesos w_m podem ser relacionados com as probabilidades $\mathbf{P}(\xi_i^t = k)$ e são definidos por uma medida sobre o conjunto de árvores Γ com m arestas por

$$\mathbf{P}_m(T) = Z_m^{-1} \prod_{v \in V(T) \setminus \{r\}} w_{\sigma(v)}. \quad T \in \Gamma_m, \quad (3-2)$$

na qual $\sigma(v)$ é o grau do vértice v e Z_m é a constante de normalização

$$Z_m = \sum_{T \in \Gamma_m} \prod_{v \in V(T) \setminus \{r\}} w_{\sigma(v)}, \tag{3-3}$$

geralmente referida como a função de partição de volume finito. Também é útil definir as funções geradoras de probabilidade

$$\mathcal{Z}(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \zeta^m, \tag{3-4}$$

que é denominada como a grande função de partição canônica com fugacidade ζ . E

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w_{m+1} z^m. \tag{3-5}$$

Como pode ser visto em [20], as duas últimas funções geradoras podem ser relacionadas por

$$\mathcal{Z}(\zeta) = \zeta g(\mathcal{Z}(\zeta)). \tag{3-6}$$

Contudo, vamos prosseguir nossos estudos na próxima seção através da definição dada por (3-1).

3.2.1 Abordagem intuitiva do processo de ramificação

Agora vamos dar uma perspectiva intuitiva do processo de ramificação e na próxima seção abordaremos o processo com cálculos mais rigorosos.

O problema que Galton primeiramente propôs foi encontrar a probabilidade de extinção do processo de ramificação. Ou seja, dado um valor esperado de filhos μ para o processo, vamos buscar a probabilidade do número de filhos ser nulo em uma geração $t > 0$ ($\mathbf{P}(Z_t = 0)$). Considerando a definição do processo de ramificação (3-1), por (2-6) e (2-12) do capítulo 2, encontramos $G_t(z) = \sum z^n \mathbf{P}(Z_t = n)$ como a função geradora de probabilidade de na geração t se ter n filhos. Logo,

$$\mathbf{P}(Z_t = 0) = G_t(0). \tag{3-7}$$

Agora, chamando $\pi_t := \mathbf{P}(Z_t = 0)$, sabemos que $\pi_t \leq 1$. E como $Z_t = 0$

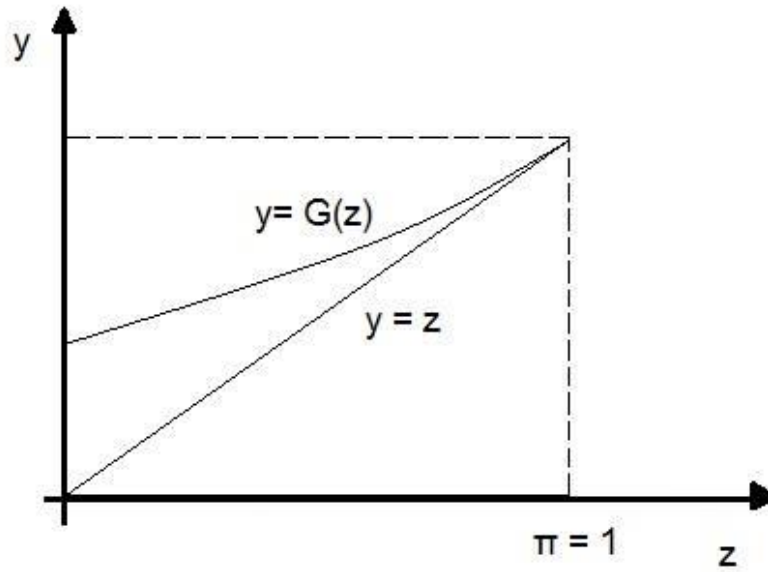


Figura 3.2: Comportamento da função geradora de probabilidade $G(z)$ quando $\mu < 1$.

implica que $Z_{t+1} = 0$, temos que $\pi_t \leq \pi_{t+1}$. Portanto, a sequência $\{\pi_t\}_t$ é monótona e limitada. Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \pi. \tag{3-8}$$

Utilizando (2-12) podemos concluir que

$$G_t(0) = G(\pi_{t-1}) = \pi_t \tag{3-9}$$

E tomando $t \rightarrow \infty$, encontramos a importante relação devido à continuidade de $G_t(z)$:

$$G(\pi) = \pi. \tag{3-10}$$

Os gráficos das figuras 3.2, 3.3 e 3.4 foram construídos observando no capítulo anterior as propriedades (i)-(iv) das funções geradoras e considerando o resultado (3-10). Na figura 3.2, podemos observar o comportamento da

função geradora de probabilidades $G(z)$ para o processo de ramificação, no caso $\mu < 1$ (caso subcrítico). Uma vez que a curvatura da função $G(z)$ no ponto 1 é $G'(1) = \mu$, $\mathbf{P}(\xi > 0) < 1$ e $G(1) = 1$, concluímos que $G(z)$ intercepta somente uma vez a curva $y = x$. Então, podemos afirmar que a probabilidade de extinção para $\mu \leq 1$ é $\pi = 1$.

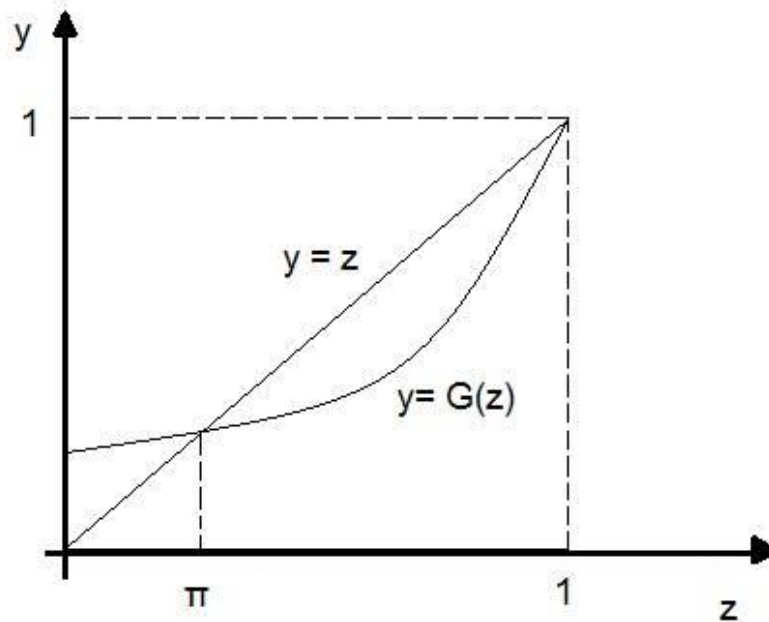


Figura 3.3: Comportamento da função geradora de probabilidade $G(z)$ quando $\mu > 1$.

Para $\mu = 1$ (caso crítico), o gráfico é similar à figura 3.2 e temos a mesma conclusão: a probabilidade de extinção é $\pi = 1$. Contudo, vamos ainda derivar um resultado interessante para esse caso: a probabilidade do número de filhos ser maior que 0 quando $t \rightarrow \infty$, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_t > 0)$. É fácil concluir que

$$\mathbf{P}(Z_t > 0) = 1 - G_t(0). \tag{3-11}$$

Utilizando a seguinte relação para a função geradora [18],

$$\frac{1}{1 - G_t(z)} - \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{2} G''(1) t + o(t) \tag{3-12}$$

em $z = 0$ e substituindo $G_t(0) = \frac{2}{G''(0)t}$ em (3-11), obtemos

$$\mathbf{P}(Z_t > 0) \sim \frac{2}{G''(0)t} \text{ quando } t \rightarrow \infty. \tag{3-13}$$

Retornando ao estudo do comportamento comparativo de $G(z)$, apresentamos na figura 3.3 o comportamento da função geradora para o caso $\mu > 1$. Observando novamente no capítulo anterior as propriedades (i)-(iv) das funções geradoras, concluímos que a curva $G(z)$ intercepta duas vezes a reta $y = x$. Logo, ignorando a solução trivial, podemos concluir que $\pi < 1$ é a probabilidade do processo de ramificação ser extinto.

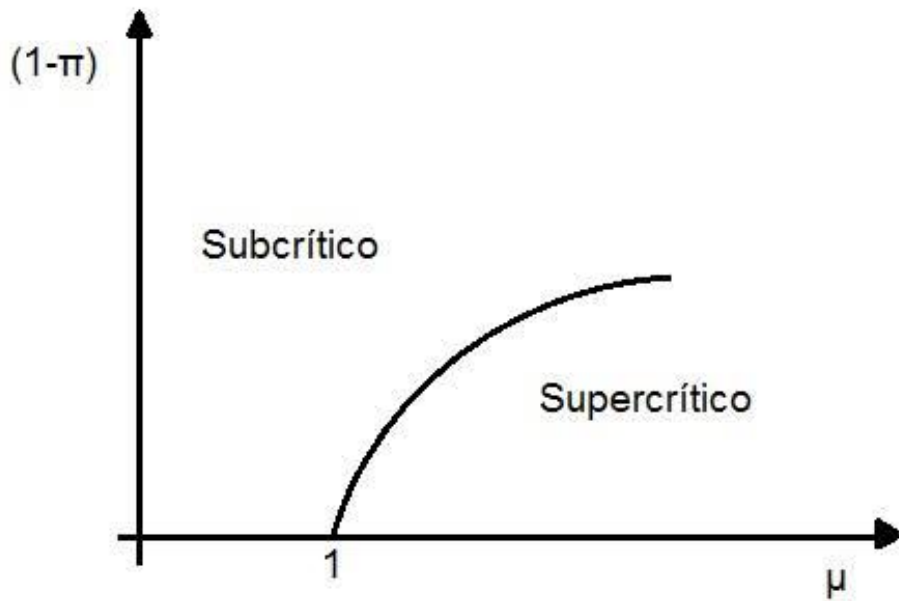


Figura 3.4: Probabilidade de extinção em função de μ .

Também podemos ver na figura 3.4 que o processo de ramificação apresenta uma transição de fase em $\mu = 1$. Para $\mu \leq 1$ o processo se extingue com probabilidade 1. Enquanto para $\mu > 1$ ele sobrevive com probabilidade $(1 - \pi)$.

3.2.2 Propriedades Típicas de um Processo de Ramificação

Vamos agora realizar uma abordagem mais rigorosa para obtermos algumas propriedades interessantes do processo de ramificação, As ideias das provas são inspiradas nas notas de aula do Professor Dr. Roberto Imbuzeiro, que podem ser encontradas em [21].

Lema 3.2.1 *Seja $\Sigma_t = \sigma(\xi_i^s : i \geq 1, 1 \leq s \leq t)$ e $\mu = \mathbf{E}(\xi_i^t) \in (0, \infty)$. Então Z_t/μ^t é um martingal em relação a Σ_t .*

Prova. Temos que Z_t é mensurável em relação a Σ_t , ou seja, $Z_t \in \Sigma_t$. Então,

$$\mathbf{E}(Z_{t+1}|\Sigma_t) = \sum_{s=|t|} \mathbf{1}_{\{s \text{ nasce}\}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geq k + 1), \quad (3-14)$$

na qual $\sum_{s=|t|}$ representa a soma sobre todos os filhos “ i ” nascidos na geração t . Ainda podemos escrever

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > k + 1) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\xi \geq k+1\}}\right) = \mathbf{E}(\xi) = \mu \quad (3-15)$$

Por (3-1), também podemos concluir que

$$\sum_{s=|t|} \mathbf{1}_{\{s \text{ nasce}\}} = Z_t. \quad (3-16)$$

Logo,

$$\mathbf{E}(Z_{t+1}|\Sigma_t) = \mu Z_t \quad (3-17)$$

O resultado obtido é devido à independência das variáveis ξ^{t+1} em relação aos valores da sequência Z_1, Z_2, \dots, Z_t . Resultado que nos possibilita facilmente reconhecer que o processo $Z = (Z_t : t \geq 0)$ é uma cadeia de Markov [17].

Finalmente, dividindo ambos os lados da equação por μ^{t+1} , e definindo $M_t := Z_t/\mu^t$, obtemos o resultado desejado:

$$\mathbf{E}(M_{t+1}|\Sigma_t) = M_t. \quad (3-18)$$

■

O resultado (3-17) é intuitivamente trivial, pois cada um dos Z_t pais da t -ésima geração tem em média um número μ de filhos. Agora vamos obter algumas propriedades dos possíveis valores de μ .

Caso subcrítico ($\mu < 1$)

Teorema 3.2.2 *Se $\mu < 1$, então $Z_t = 0$ para todo t suficientemente grande.*

Prova. Vamos primeiramente encontrar o valor esperado de M_t e daí obtermos o valor esperado de Z_t . Então, temos que $\mathbf{E}(Z_t/\mu^t) = \mathbf{E}(Z_0) = 1$, utilizando na última passagem o Teorema da Amostragem Opcional [16]. Portanto, $\mathbf{E}(Z_t) = \mu^t$. Temos que $Z_t \geq 1$ no subconjunto $\{Z_t > 0\}$, lembrando que pela definição (3-1) Z_t só toma valores inteiros. Então, encontramos a seguinte inequação

$$\mathbf{P}(Z_t > 0) = \mathbf{P}(Z_t \geq 1) \leq \mathbf{E}(Z_t | Z_t > 0) = \mathbf{E}(Z_t) = \mu^t, \quad (3-19)$$

obtida através da aplicação da desigualdade de Markov [16]. Finalmente, $\mu^t \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, se $\mu < 1$. ■

Caso crítico ($\mu = 1$)

Teorema 3.2.3 *Se $\mu = 1$ e $\mathbf{P}(\xi_i^t = 1) < 1$, então $Z_t = 0$ para todo t suficientemente grande.*

Prova. Pela definição do modelo (3-1), Z_t só admite valores inteiros e não negativos. Dado que $\mu = 1$, podemos utilizar o Teorema da Convergência de Martingais para concluir que Z_t converge quase certamente (q.c.) a Z_∞ quando $t \rightarrow \infty$ [16]. Por conseguinte, $Z_\infty \in \mathbb{Z}^+$ quase certamente, pois $Z_t \in \mathbb{Z}^+$. Então, deduzimos até aqui que $\mathbf{P}(\exists n \in \mathbb{Z}^+, \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall t \geq t_0; Z_t = n) = 1$.

Definimos $\Sigma_{t-1} = \sigma(\xi_i^s : i \geq 1, 1 \leq s \leq t-1)$, que é a σ -álgebra que nos diz quantos nascimentos houve até a $(t-1)$ -ésima geração. Então, temos que

$$\mathbf{P}(Z_t = n | \Sigma_{t-1}) \leq \mathbf{P}(Z_t \neq 0 | \Sigma_{t-1}) = 1 - \mathbf{P}(Z_t = 0 | \Sigma_{t-1}). \quad (3-20)$$

Para calcularmos $\mathbf{P}(Z_t = 0 | \Sigma_{t-1})$, vamos expressar o evento

$$\{Z_t = 0\} = \bigcap_{|s|=t-1} \left(\{s \text{ não nasce}\} \cup \{s \text{ nasce e } \xi_i^s = 0\} \right), \quad (3-21)$$

no qual $\bigcap_{|s|=t-1}$ denota a união de todos os filhos “ i ” nascidos na $t-1$ -ésima geração. Através de funções indicadoras, chamamos $E_s := \mathbf{1}_{\{s \text{ nasce}\}}$ o evento em que “ s ” nasce, portanto

$$\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}} = \prod_{|s|=t-1} (\mathbf{1} - E_s + E_s \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}). \quad (3-22)$$

Então,

$$\mathbf{P}(Z_t = 0 | \Sigma_{t-1}) = \mathbf{E} \left(\prod_{|s|=t-1} (\mathbf{1} - E_s + E_s \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}) \middle| \Sigma_{t-1} \right). \quad (3-23)$$

Agora fazemos $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ a enumeração de $\{s \in \mathbb{N} : |s| = t - 1\}$, e escrevemos

$$\prod_{|s|=t-1} (\mathbf{1} - E_s + E_s \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}) = \lim_{I \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^I (\mathbf{1} - E_{s_i} + E_{s_i} \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}). \quad (3-24)$$

Sabemos que $\prod_{i=1}^I (\mathbf{1} - E_{s_i} + E_{s_i} \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}) \leq 1$, então podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada [16] para obtermos

$$\mathbf{P}(Z_t = 0 | \Sigma_{t-1}) = \lim_{I \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^I (\mathbf{1} - E_{s_i} + E_{s_i} \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}) \middle| \Sigma_{t-1} \right). \quad (3-25)$$

Para expandir o termo do produtório em (3-25), podemos utilizar a fórmula da Análise Combinatória [20],

$$\prod_{i=1}^I (a_i + b_i) = \sum_{j \subseteq [I]} \left(\prod_{i \in j} b_i \right) \prod_{k \in [I] \setminus j} a_k, \quad (3-26)$$

no qual j é o conjunto dos índices em que decidimos tomar o termo b_i do produto, e o complementar dele, $k \in [I] \setminus j$, é o conjunto dos índices em que decidimos tomar o termo a_i do produto. E como E_{s_i} é Σ_{t-1} -mensurável, temos que para o valor esperado

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^I (\mathbf{1} - E_{s_i} + E_{s_i} \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}}) \middle| \Sigma_{t-1} \right) = \\ & = \mathbf{E} \left(\sum_{j \subseteq [I]} \left(\prod_{i \in j} E_{s_i} \right) \left(\prod_{k \in [I] \setminus j} (\mathbf{1} - E_{s_j}) \right) \prod_{i \in j} \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}} \middle| \Sigma_{t-1} \right) \\ & = \sum_{j \subseteq [I]} \left(\prod_{i \in j} E_{s_i} \right) \left(\prod_{k \in [I] \setminus j} (\mathbf{1} - E_{s_j}) \right) \mathbf{E} \left(\prod_{i \in j} \mathbf{1}_{\{\xi_i^s=0\}} \middle| \Sigma_{t-1} \right). \end{aligned} \quad (3-27)$$

Por definição, as v.a. ξ_i^s são i.i.d. e, por conseguinte, são também independentes da σ -álgebra Σ_{t-1} . Portanto,

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i \in j} \mathbb{1}_{\{\xi_i^s = 0\}} \middle| \Sigma_{t-1} \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i \in j} \mathbb{1}_{\{\xi_i^s = 0\}} \right) = \prod_{i \in j} \mathbf{P}(\xi_i^s = 0) = \mathbf{P}(\xi_i^t = 0)^{|j|} \quad (3-28)$$

Na qual $|j|$ é a cardinalidade do conjunto j . Substituindo o resultado de (3-28) em (3-27), e utilizando novamente a expansão (3-26), concluímos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j \subseteq [I]} \left(\prod_{i \in j} E_{s_i} \right) \left(\prod_{k \in [I] \setminus j} (1 - E_{s_k}) \right) \prod_{i \in j} \mathbf{P}(\xi_i^t = 0) = \\ &= \prod_{i=1}^I (1 - E_{s_i} + E_{s_i} \cdot \mathbf{P}(\xi_i^t = 0)) \\ &= \prod_{i=1}^I \mathbf{P}(\xi_i^t = 0)^{E_{s_i}} \\ &= (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{\sum_{i=1}^I E_{s_i}}. \end{aligned} \quad (3-29)$$

Por fim, substituindo o resultado (3-29) em (3-25), e lembrando que $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ é a enumeração de todos que nascem na $(t-1)$ -ésima geração, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_t = 0 | \Sigma_{t-1}) &= \lim_{I \rightarrow \infty} (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{\sum_{i=1}^I E_{s_i}} \\ &= (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{\sum_{i=1}^\infty E_{s_i}} \\ &= (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{\sum_{|s|} \mathbb{1}_{\{s \text{ nasce}\}}} \\ &= (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{Z_{t-1}}. \end{aligned} \quad (3-30)$$

E substituído o resultado (3-30) na inequação (3-20), temos o seguinte resultado que nos será útil mais à frente:

$$\mathbf{P}(Z_t = n | \Sigma_{t-1}) \leq 1 - (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{Z_{t-1}}. \quad (3-31)$$

Agora vamos definir o evento

$$E_m := \bigcap_{l=0}^m \{Z_{t_0+l} = n\}. \quad (3-32)$$

Fixados t_0 e n , $\mathbf{P}(E_m)$ nos dá a probabilidade de na geração t_0 o número de pessoas ser igual a n , e disso acontecer mais m vezes em sequência.

Podemos também escrever o evento E_m em função de E_{m-1} ,

$$E_m := E_{m-1} \bigcap \{Z_{t_0+l} = n\}, \quad (3-33)$$

e, portanto, obtém-se a igualdade abaixo condicionando E_{m-1} à Σ_{t_0+l-1} . Logo, podemos expressar a probabilidade $\mathbf{P}(E_m)$ como

$$\mathbf{P}(E_m) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_{m-1}} \mathbf{1}_{\{Z_{t_0+l}=n\}}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_{m-1}} \cdot \mathbf{P}(Z_{t_0+l} = n | \Sigma_{t_0+l-1})). \quad (3-34)$$

Finalmente, utilizando a inequação (3-31), temos o seguinte resultado

$$\mathbf{P}(E_m) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_{m-1}} (1 - (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^{Z_{t_0+l-1}})). \quad (3-35)$$

Podemos observar que em E_{m-1} temos $Z_{t_0+l-1} = n$. Portanto, a última expressão toma a forma

$$\mathbf{P}(E_m) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{E_{m-1}} (1 - (\mathbf{P}(\xi_i^t = 0))^n)). \quad (3-36)$$

Como E_m é uma sucessão decrescente de eventos, e considerando a inequação (3-36), concluímos que a probabilidade $\mathbf{P}(E_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Isto é, $\mathbf{P}(\bigcap_{l \in \mathbb{N}} \{Z_{t_0+l} = n\}) = 0$ para qualquer $n \neq 0$. E já sabemos que $Z_t \xrightarrow{q.c.} Z_\infty$. Logo, $Z_\infty = 0$ quase certamente. ■

Caso supercrítico ($\mu > 1$)

Teorema 3.2.4 *Se $\mu > 1$, então $\mathbf{P}(Z_t > 0; \forall t) > 0$.*

Prova. Vamos começar a demonstração provando o seguinte teorema que nos será útil mais adiante:

Teorema 3.2.5 *Sejam ξ_i^t variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbf{E}(|\xi_i^t|) < +\infty$, $\mathbf{E}(\xi_i^t) > 1$, e definimos $S_i = S_{i-1} + \xi_i^t$, $S_0 = 1$. Então, $\mathbf{P}(S_i > 0; \forall i \in \mathbb{N}) > 0$.*

Prova. Primeiramente, vamos definir o evento

$$E_l := \{S_i > -l; \forall i \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (3-37)$$

e calcular o seguinte limite $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E_l)$.

É fácil observar que $E_l \subseteq E_{l+1}$. Então, como consequência indireta da definição de medida (2-3), escrevemos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E_l) = \mathbf{P} \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l \right) = \mathbf{P}(\exists l \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}; S_i > -l) \quad (3-38)$$

$$\geq \mathbf{P}(\text{O conjunto } \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ter número finitos de termos:} = C_n \leq 0) = 1. \quad (3-39)$$

O resultado da inequação (3-39) foi obtido ao observarmos que, utilizando a Lei dos Grandes Números [16], $\frac{S_i}{i} \xrightarrow{q.c.} \mathbf{E}[\xi_i^t] > 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Logo, podemos afirmar que q.c. $\exists i_o \in \mathbb{N}$, tal que para todo $i \geq i_o$ temos $\frac{S_i}{i} \geq \frac{\mathbf{E}(\xi_1^t)}{2} > 0$. Em particular, $\exists i_o \in \mathbb{N}$, tal que para todo $i \geq i_o$ temos $S_i > 0$. Logo, $\mathbf{P}(C_n) = 1$.

Como $\mathbf{E}(\xi_i^t) > 0$, e conseqüentemente $\mathbf{P}(\xi_i^t > 0) > 0$. Então podemos concluir que $\exists \tau > 0$ tal que $\mathbf{P}(\xi_i^t > \tau) > 0$. Também podemos observar que o evento

$$\begin{aligned} \{S_i > 0; \forall i \in \mathbb{N}\} &\supseteq \{\xi_1^t > \tau, \xi_2^t > \tau, \dots, \xi_m^t > \tau, S_i > 0; \forall i, m \in \mathbb{N}\} \\ &\supseteq \left(\bigcap_{k=1}^m \{\xi_k^t > \tau\} \right) \cap \left\{ \left(1 + \sum_{j=m+1}^n \xi_j^t \right) \geq -\tau m; \forall n \geq m + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Considerando as conseqüências do resultado (3-39), podemos afirmar que $\exists l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{P}(S_i > -l_0; \forall i \in \mathbb{N}) \geq 1/2$. Por fim, escolhendo um $\tau m > l_0$, observando que as v.a. ξ_i^t são i.i.d. e utilizando (3-40), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i > 0; \forall i \in \mathbb{N}) &\geq \mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^m \{\xi_k^t > \tau\} \right) \cdot \mathbf{P} \left(\left(1 + \sum_{j=m+1}^n \xi_j^t \right) \geq -\tau m; \forall n \geq m + 1 \right) \\ &\geq (\mathbf{P}(\xi_1^t > \tau))^m \cdot \mathbf{P}(S_i > -l_0; \forall i \in \mathbb{N}) > 0. \end{aligned} \quad (3-41)$$

■

Antes de continuarmos com a demonstração, vamos introduzir brevemente uma ferramenta utilizada na Teoria dos Grafos: busca em profundidade.

Busca em profundidade é um algoritmo utilizado para buscar estrutura de dados em grafos. O processo se inicia na raiz de um grafo e se aprofunda cada vez mais, até que ele se depare com um vértice que não possui filhos. Então a busca retrocede e começa no próximo vértice em que os filhos não

foram visitados. Numa implementação não-recursiva, que será o nosso caso, todos os vértices visitados são adicionados a um conjunto somente uma vez. Tal conjunto nos dará o número de vértices no grafo.

O algoritmo que utilizaremos tem a seguinte configuração: $\mathcal{V}_t \subseteq V$ é o conjunto de vértices já visitados pela busca até o tempo t , de modo que V é o conjunto de vértices da árvore. A_t é uma lista ordenada de vértices que ainda tem filhos não visitados. Portanto, dados $\mathcal{V}_t = \{v_1, \dots, v_r\}$ e $A_t = (a_1, \dots, a_{l-1}, b_t)$, no qual b_t é o vértice que é visitado no tempo t , fazemos o seguinte procedimento:

- (I) se $A_t = \emptyset$, o processo se encerra;
- (II) caso contrário, remova $\{b_t\}$ do conjunto A_t e o adicione ao conjunto \mathcal{V}_t , ou seja, $\mathcal{V}_{t+1} = \mathcal{V}_t \cup \{b_t\}$. Também adicione o conjunto dos filhos de $\{b_t\}$, $\{\text{filhos de } b_t\} := \{f_1, \dots, f_k\}$, ao conjunto A_t . Logo, $A_{t+1} = (a_1, \dots, a_{l-1}, f_1, \dots, f_k)$.

Vamos agora analisar um exemplo para ilustrar a técnica:

Exemplo: Dada a árvore (não aleatória) da figura 3.5, definindo \sqcup como uma sequência vazia, o algoritmo realizará o processo de busca resultando nos seguintes conjuntos a cada passo do tempo t :

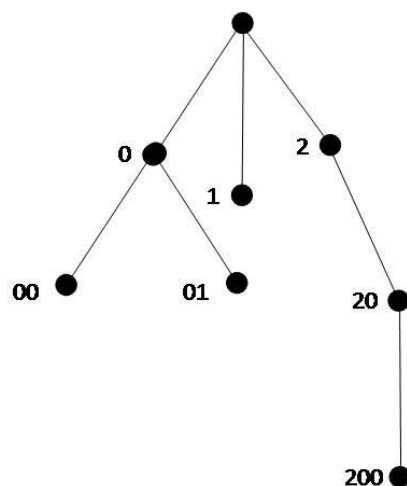


Figura 3.5: Grafo com vértices $V = \{0, 1, 2, 00, 01, 20, 200\}$

$b_0 = \sqcup$	$A_0 = (\sqcup)$
$b_1 = 0$	$A_1 = (2, 1, 0)$
$b_2 = 00$	$A_2 = (2, 1, 01, 00)$
$b_3 = 01$	$A_3 = (2, 1, 01)$
$b_4 = 1$	$A_4 = (2, 1)$
$b_5 = 2$	$A_5 = (2)$
$b_6 = 20$	$A_6 = (20)$
$b_7 = 200$	$A_7 = (\emptyset)$

Podemos observar que a cardinalidade do conjunto $\{f_1, \dots, f_k\}$ é o número de filhos de $\{b_t\}$, ou seja, é a v.a. que define quantos filhos tem o vértice b_t . Definindo a v.a. $F_{b_t} := |\{f_1, \dots, f_k\}|$, e considerando o caso (II) do algoritmo, podemos afirmar que, para $t \geq 1$, $|A_t| = 1 + \sum_{i=0}^{t-1} (F_{b_i} - 1)$.

Para a sequência de nossa prova, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.6 *Seja $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de v.a. independentes, tal que $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, e \mathcal{V}_t são conjuntos de v.a., $t \in \mathbb{Z}^+$, tal que $E_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{N})$. Suponha que, $\forall t \in \mathbb{N}$ e $\forall G_1, \dots, G_t \subseteq \mathbb{N}$, o evento $\bigcap_{i=0}^t \{\mathcal{V}_i = G_i\} \in \sigma(\xi_n : n \in \bigcup_{i=0}^t G_i)$. Então,*

$$\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N} / \bigcup_{i=0}^t G_i} \Big|_{\bigcap_{i=0}^t \{E_i = G_i\}} = dist\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N} / \bigcup_{i=0}^t G_i}. \tag{3-42}$$

No teorema, o símbolo “ $|$ ” exprime a condicionalidade das v.a. e “ $dist\{X_n\}$ ” representa a distribuição da sequência de v.a. X_n .

Por indução, podemos afirmar que A_t é função de $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_t$ e de F_{b_i} , tal que $i \leq t - 1$. Ou seja, $A_t = A_t(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_t, F_{b_i})$, $\forall i \leq t - 1$. Da definição do algoritmo sabemos que b_t é função de A_t , então temos que $\mathcal{V}_t = \{b_0, \dots, b_t\}$. Também podemos observar que o conjunto $(\mathcal{V}_t)_{t=0}^\infty$ satisfaz a condição do Teorema 3.2.6, e ainda podemos afirmar que para a sequência de v.a. temos que $\{F_a\}_{a \in \mathbb{Z}^+} = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Portanto, podemos concluir que F_{b_t} é independente da sequência $(\mathcal{V}_t)_{i=0}^t$ e, como a independência prevalece depois de tomarmos uma função da sequência [16], também concluímos que F_{b_t} é independente de $(|A_t|)_{i=0}^t$.

Em suma, temos que $(|A_t|)_{t=0}^\infty = dist\left(1 + \sum_{i=0}^{(t-1) \wedge \alpha} (F_i - 1)\right)_{t=0}^\infty$, na qual $(t - 1) \wedge \alpha = \min(t - 1, \alpha)$, a sequência $\{F_i\}_{i=0}^\infty$ de variáveis aleatórias é i.i.d. com distribuição F e $\alpha = \inf\{s | 1 + \sum_{i=0}^s (F_i - 1) = 0\}$. Portanto, sabendo que $(F_i - 1)$ são i.i.d., $\mathbf{E}(F_i - 1) \leq \mathbf{E}(|F_i|) + 1 < \infty$ e $\mathbf{E}(F_i - 1) = \mu - 1 > 0$, podemos

utilizar o Teorema 3.2.5 para concluir que $\mathbf{P}(\forall i \in \mathbb{N}; 1 + \sum_i (F_i - 1) > 0) > 0$. Logo, existe uma probabilidade positiva do processo nunca se encerrar, ou seja, $\mathbf{P}(Z_t > 0; \forall t) > 0$. ■

3.3 Processo de ramificação condicionado

Além das propriedades demonstradas, existem ainda muitas outras características do modelo de Galton-Watson que podem ser abordadas. Vamos nos atentar nesta seção à condição de não extinção que produz algumas propriedades interessantes desse modelo.

Vamos denotar por n a soma de todos os filhos de um processo de ramificação, ou seja, $n = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t$. Também vamos denotar por $T = \min\{t \geq 1 : Z_t = 0\}$ a condição da extinção acontecer somente depois de uma geração t [22]. Quando fazemos $n \rightarrow \infty$ ou $T \rightarrow \infty$, é possível demonstrar que, para uma árvore de Galton-Watson crítica ($\mu = 1$), produzimos os mesmos resultados em relação às propriedades obtidas por esse modelo. O limite $n \rightarrow \infty$ para $n = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t$ é importante porque corresponde ao limite termodinâmico da Física Estatística.

Uma propriedade interessante produzida pelo modelo é que a árvore gerada tem um caminho infinito único denominado espinha. No modelo proposto em [23] é possível derivar uma árvore infinita τ de uma árvore T de Galton-Watson crítica condicionada através do item (i) e (ii) da seguinte proposição:

Proposição 3.3.1 *Seja $\mathbf{P}(Z_t = 0) < 1$ e $\mu \leq 1$. Então,*

- (i) $\text{dist}(T | Z_t > 0) \rightarrow \text{dist}(\tau)$ quando $t \rightarrow \infty$
- (ii) τ quase certamente contém um caminho infinito único (r, s_1, s_2, \dots) , tal que s_{h+1} é um filho de s_h para todo $h = 0, 1, 2, \dots$
- (iii) *Seja s_h a espinha infinita de τ derivada por condicionar T à não extinção. Para $i = 0, 1, \dots$, seja \mathcal{A}^i a árvore derivada da subárvore de τ com raiz s_i na floresta aleatória obtida de τ excluindo cada aresta ao longo da espinha, e seja s_{i+1} o j -ésimo filho de s_i . Então, as árvores \mathcal{A}^i , $i = 0, 1, \dots$, são independentes e quase certamente finitas com a mesma distribuição.*

As árvores finitas \mathcal{A}^i ligadas à espinha tem distribuição igual entre si e diferente da distribuição da árvore gerada. No próximo capítulo, vamos utilizar essas propriedades para obter informações quantitativas de um ensemble de árvores caracterizadas por esse modelo.

4

Dimensão espectral de árvores com uma espinha infinita

Um conceito interessante que caracteriza as árvores aleatórias é a dimensão espectral d_s [24, 25]. De um modo intuitivo, a dimensão espectral corresponde à dimensão que o passeio “percebe” em um processo difusivo. Este observável foi inspirado no comportamento do núcleo da equação do calor,

$$\frac{\partial K_t(x, y)}{\partial t} = \Delta_x K_t(x, y), \quad (4-1)$$

com a condição inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_t(x, y) = \delta(x - y). \quad (4-2)$$

O núcleo

$$K_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp^{-|x-y|/4t} \quad (4-3)$$

é a densidade de probabilidade para a difusão do ponto x até y em um tempo difusivo t [8]. Ainda podemos representar $K_t(x, y)$ em função dos autovalores λ_n e autovetores $\phi_n(y)$ do operador Δ_x através da expressão

$$K_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y). \quad (4-4)$$

E definimos a função da densidade de probabilidade de retorno no tempo de difusão t , chamada de diagonal, por:

$$P(t) = \frac{\int dx K_t(x, x)}{V}, \quad (4-5)$$

normalizada pelo volume $V = \int dx$. Por fim, colocando $P(t)$ em função dos autovalores, (4-5) toma a forma

$$P(t) = \frac{\sum_n e^{-\lambda_n t}}{V}. \tag{4-6}$$

É possível concluir da equação (4-6) que somente autovalores da ordem $\lambda_n < 1/t$ contribuem significativamente para a função densidade de probabilidade de retorno. De (4-3) se obtém diretamente que

$$K_t(x, x) \sim P(t) \sim \frac{1}{t^{d/2}}, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \tag{4-7}$$

Na qual “ \sim ” é utilizado de modo que represente que os dois lados são assintoticamente iguais. Essa definição ficará mais clara com a definição mais rigorosa de dimensão na próxima seção.

Portanto, a dimensão espectral d_s nos permite extrair informações sobre o comportamento da função densidade de probabilidade de retorno em relação ao tempo difusivo, quando $t \rightarrow \infty$. Então, definimos para o espaço \mathbb{R}^d

$$P(t) \sim \frac{1}{t^{d_s/2}}, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \tag{4-8}$$

Trivialmente, $d_s = d$ para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d , como mostrado acima.

Outro importante conceito de dimensionalidade de uma árvore aleatória é a dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal d_h [26]. Seja uma bola \mathcal{B}_R de raio R , $|\mathcal{B}_R|$ é o número de arestas da árvore dentro da bola centrada na raiz r . Então, o crescimento de $|\mathcal{B}_R|$ é determinado por

$$|\mathcal{B}_R| \sim R^{d_h}, \text{ quando } R \rightarrow \infty. \tag{4-9}$$

A dimensão espectral e a dimensão de Hausdorff serão definidas de maneira mais rigorosa na próxima seção.

4.1

Árvores com espinha infinita: dimensão de bola e dimensão de casca

As demonstrações e definições das próximas seções foram fortemente baseadas no trabalho de Zohren e Stefánsson, e podem ser encontradas em [26].

Um ensemble de árvores aleatórias é um conjunto de árvores aleatórias com uma medida de probabilidade associada a elas. Nesse capítulo, nós estudaremos uma classe de árvores infinitas e enraizadas, as quais tem a seguinte propriedade: existe um caminho, que é único e irretornável, que

parte da raiz até o infinito, ou seja, a “espinha”. Portanto, esse ensemble é caracterizado pela distribuição dos ramos finitos que são ligados à espinha das árvores [26]. A motivação para estudar essas árvores são os processos de Galton-Watson condicionados

Primeiramente, vamos denotar por Γ o conjunto de todas as árvores planares, enraizadas e localmente finitas. Convencionamos que a raiz tenha valência igual a um, porém os resultados da análise que faremos é independente dessa escolha. Denotamos também Γ' como o conjunto de árvores finitas e Γ^∞ como o conjunto de árvores infinitas. Em especial, denotamos o conjunto $\Gamma_S^\infty \subset \Gamma^\infty$ como o conjunto das árvores que tem um caminho único e irretornável da raiz até o infinito, ou seja, árvores com o que denominamos de espinha. Daí temos que $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma^\infty$.

Os elementos do conjunto Γ' são chamados de T_1, T_2, \dots , etc. Já para os elementos do conjunto Γ^∞ , chamamos seus elementos de τ_1, τ_2, \dots , e assim por diante. Ainda denotamos a raiz da árvore, chamando esse vértice de r . Logo, como convencionado anteriormente, $\sigma(r) = 1$. Os vértices que compõem a espinha são denotados por s_1, s_2, s_3, \dots , a partir da raiz r .

Um conceito importante utilizado neste capítulo é a “bola” $\mathcal{B}_R \subset \tau$ de raio R ao redor da raiz, para um dado $\tau \in \Gamma$ (figura 4.1). Temos então que \mathcal{B}_R é um subgrafo de τ medido através dos vértices que têm uma distância da raiz menor ou igual a R . Outro conceito que vamos utilizar é a denominada “casca” $\bar{\mathcal{B}}_R \subset \Gamma$ (figura 4.1). A casca $\bar{\mathcal{B}}_R$ denota o subgrafo que é composto pela união da espinha a partir do vértice r até s_R , e todas as árvores finitas ligadas à espinha. Considerando a definição de casca e bola, e também observando a figura 4.1, podemos facilmente concluir que $\mathcal{B}_R \subseteq \bar{\mathcal{B}}_R \subset \Gamma$.

Na seção anterior, nós introduzimos o conceito de dimensão de Hausdorff. Vamos dar agora uma definição mais rigorosa: dado um ensemble de árvores aleatórias (Γ, \mathbf{P}) , na qual o conjunto de árvores Γ têm uma medidade de probabilidade \mathbf{P} , a dimensão de Hausdorff descreve o crescimento da bola de raio R associada a esse ensemble. Pode-se definir a dimensão de Hausdorff formalmente como

$$d_h = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{B}_R|}{\log R}. \tag{4-10}$$

Na sequência desse capítulo, nós consideramos o seguinte critério para a existência de d_h : existe um $R_0 > 0$ tal que para $R > R_0$

$$R^{d_h} l_1(R) < |\mathcal{B}_R| < R^{d_h} l_2(R), \tag{4-11}$$

na qual $l_1(R)$ e $l_2(R)$ são funções que variam lentamente quando $R \rightarrow \infty$.

Em [27] podemos encontrar diversas características de funções que variam lentamente, tal qual, para $\lambda > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda R)}{L(R)} = 1 \tag{4-12}$$

e que, portanto, (4-11) implica (4-10).

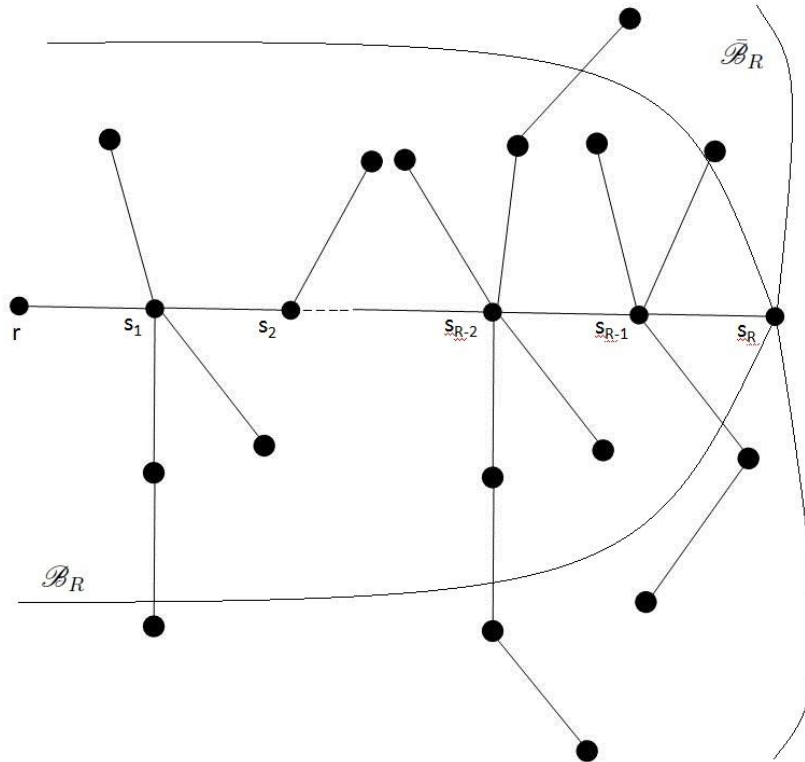


Figura 4.1: Árvore com uma espinha infinita que começa na raiz r e indexada com os vértices s_1, s_2, \dots . As linhas pontilhadas são as ilustrações da bola \mathcal{B}_R e da casca $\bar{\mathcal{B}}_R$ sobre a árvore. A bola \mathcal{B}_R é a subárvore contendo todas as arestas dentro do raio R . Os ramos do vértice s_i são denominados de \mathcal{A}^i . A casca $\bar{\mathcal{B}}_R$ é composta por todos os ramos \mathcal{A}^i e todos os vértices s_i da espinha até s_R , incluindo a raiz r .

Se para um ensemble de árvores aleatórias, a Eq. (4-10) se mantém para \mathbf{P} -quase todo $\tau \in \Gamma$, então nós chamamos d_h de “quenched Hausdorff dimension”. Também se pode definir o “annealed Hausdorff dimension” através do tamanho esperado da bola de raio R

$$d_H = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|\mathcal{B}_R|)}{\log R}. \tag{4-13}$$

Analogamente, nós definimos o “quenched hull dimension”, se para quase- \mathbf{P} todo $\tau \in \Gamma$

$$\bar{d}_h = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log |\bar{\mathcal{B}}_R|}{\log R}. \tag{4-14}$$

Na qual a existência também é fornecida através da inequação (4-11), análoga à dimensão de Hausdorff. Já sabemos que $\mathcal{B}_R \subseteq \bar{\mathcal{B}}_R$, logo é fácil concluir que $d_h \leq \bar{d}_h$.

4.2 Passeio aleatório em árvores e dimensão espectral

Para nosso estudo dos modelos de crescimento de árvores aleatórias a seguir, nós consideraremos passeios aleatórios simples e em tempos discretos. Em cada passo de tempo discreto, pula-se para o vértice mais próximo com probabilidade uniforme. Então, para um dado $\tau \in \Gamma$, nós denotamos por Ω_τ o conjunto dos passeios finitos em τ . O comprimento de um caminho $\omega \in \Omega_\tau$ é denotado por $|\omega|$. Para $t \leq |\omega|$, $\omega(t)$ nos informa em qual vértice do grafo o passeio está localizado após um tempo t . Agora nós formularemos a função geradora para a probabilidade de retorno de passeios aleatórios em uma dada árvore τ .

Uma ferramenta importante, que nos dá informações quantitativas sobre a propriedades de uma árvore, é a função geradora de probabilidades do primeiro retorno à raiz r . Essa função é dada por [8]:

$$P_t(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega_\tau: |\omega|=t} \mathbf{P}_\tau(\{\omega(t) = r | \omega(0) = r, \omega(t') \neq r, 0 < t' < t\}) (1-x)^t \tag{4-15}$$

Na qual fizemos a conveniente substituição de variável $P_t(z) \rightarrow P_t(x)$, de modo que $z^2 = 1 - x$, pois os caminhos $|\omega|$ de comprimento ímpar tem probabilidade 0.

Já a probabilidade de todos os retornos a um ponto inicial é dada pela seguinte função geradora

$$Q_\tau(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega_\tau: |\omega|=t} \mathbf{P}_\tau(\{\omega(t) = r | \omega(0) = r\}) (1-x)^{\frac{t}{2}}. \tag{4-16}$$

Podemos decompor um passeio que volta ao ponto inicial em função do primeiro retorno, do segundo retorno, e assim por diante. Logo, podemos

relacionar as duas funções geradoras (primeiro retorno e todos os retornos) através da seguinte equação:

$$Q_\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (P_t(x))^n = \frac{1}{1 - P_t(x)}. \tag{4-17}$$

A função geradora de probabilidade $Q_\tau(x)$ possui em si todas as informações do comportamento assintótico da probabilidade de retorno. E através dela podemos extrair a dimensão espectral da árvore. Isto vem do fato que $Q_\tau(x)$ diverge quando $x \rightarrow 0$. Através do teorema Tauberiano [28] e considerando (4-8) , temos

$$P_t(x) \sim t^{-d_s/2} \Leftrightarrow Q_\tau(x) \sim x^{-1+d_s/2}. \tag{4-18}$$

Em especial, para um dado $\tau \in \Gamma$, nós definimos a dimensão espectral como segue:

$$d_s = 2 \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log Q_\tau(x)}{\log x} \right), \tag{4-19}$$

fornevido que $Q_\tau(x)$ diverge quando $x \rightarrow 0$. Assim como para a dimensão de Hausdorff, nós também consideramos o seguinte critério para a existência de d_s : existe um $x_0 \in (0, 1)$, tal que para $x < x_0$

$$x^{-1+d_s/2}l_1(x) < Q_\tau(x) < x^{-1+d_s/2}l_2(x), \tag{4-20}$$

na qual $l_1(x)$ e $l_2(x)$ são funções que variam lentamente em torno de $x = 0$.

Se a inequação (4-20) é satisfeita para \mathbf{P} -quase todas as árvores $\tau \in \Gamma$ de um ensemble (Γ, \mathbf{P}) , então nós dizemos que ele tem uma “quenched spectral dimension”. Além disso, nós definimos a “annealed spectral dimension” d_S através de

$$d_S = 2 \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Q_\tau(x))}{\log x} \right), \tag{4-21}$$

análoga à dimensão de Hausdorff.

Antes de obtermos algumas propriedades do modelo de árvores definidas anteriormente, vamos dar um exemplo simples da aplicação das técnicas

citadas.

Exemplo: Tomemos uma árvore não aleatória consistindo de uma única espinha infinita, a qual nós denominaremos de \mathcal{S} . Deste modo, esperamos que (trivialmente) $|\mathcal{B}_R| = |\bar{\mathcal{B}}_R| = R$, e $d_h = \bar{d}_h = 1$. Para obtermos a função geradora de probabilidade do primeiro retorno, é suficiente notar que o passeio aleatório parte da raiz com probabilidade 1. Daí, no vértice s_1 , o passeio retorna a raiz com probabilidade $1/2$, ou faz uma excursão pelo lado direito da árvore até o primeiro retorno a s_1 (também com probabilidade $1/2$). Então, novamente, com probabilidade $1/2$ retorna a raiz, ou faz outro passeio pelo lado direito da árvore com probabilidade $1/2$, e assim por diante. Então, obtemos a seguinte função geradora de probabilidade

$$P_{\mathcal{S}}(x) = \frac{1}{2}(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}P_{\mathcal{S}}(x)\right)^n = \frac{1-x}{2-P_{\mathcal{S}}(x)}. \quad (4-22)$$

Colocando $P_{\mathcal{S}}(x)$ em evidência em (4-22), temos

$$P_{\mathcal{S}}(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad (4-23)$$

e utilizando (4-18),

$$Q_{\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (4-24)$$

Por fim, substituindo o resultado (4-24) em (4-19), encontramos que

$$d_s = 2 \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\log(x)} \right) = 1, \quad (4-25)$$

como era esperado.

4.3

Relação entre dimensão de Hausdorff e dimensão espectral

A partir dessa seção vamos aplicar as técnicas apresentadas e obter a dimensão espectral de árvores genéricas. Primeiramente, vamos provar o teorema 4.3.1 que relaciona dimensão de Hausdorff e a “quenched hull dimension” com a dimensão espectral. Essa demonstração se dará em duas partes:

- (I) Nessa primeira etapa, provaremos dois lemas obtidos em [12] que combinados e aplicados a $Q_\tau(x)$ nos fornecerão o limite superior para a dimensão espectral;
- (II) Na segunda etapa, exploraremos um teorema demonstrado em [12] que aplicado a $Q_\tau(x)$ nos fornecerá o limite inferior da dimensão espectral.

Segue o teorema [26]:

Teorema 4.3.1 *Para qualquer árvore $\tau \in \Gamma_S^\infty$ com uma única espinha infinita, na qual d_s , d_h e \bar{d}_h existem, a seguinte relação é válida:*

$$\frac{2d_h}{1+d_h} \leq d_s \leq \frac{2\bar{d}_h}{1+\bar{d}_h}. \tag{4-26}$$

4.3.1 Limite superior para a dimensão espectral

Primeiramente, vamos derivar uma importante fórmula recursiva [12], análoga à equação (4-22): seja $\tau \in \Gamma$ e s_1 o vértice vizinho da raiz. Definimos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ como as subárvores de τ que interceptam a aresta (r, s_1) em s_1 , ou seja, são os ramos de s_1 . Podemos decompor os passeios aleatórios que partem da raiz e voltam através da sequência de excursões em diferentes ramos τ_i da árvore τ . Assim, nós encontramos função geradora

$$P_\tau(x) = \frac{1-x}{k+1-\sum_{i=1}^k P_{\tau_i}}, \tag{4-27}$$

a qual será utilizada para provar os seguintes lemas [12]:

Lema 4.3.2 *Para todas as árvores finitas $T \in \Gamma'$, temos que*

$$P_T(x) \geq 1 - |T|x. \tag{4-28}$$

Prova. Sejam T_1, T_2, \dots, T_{n-1} as árvores ligadas ao vértice v de T (v é o vértice mais próximo da raiz). Então, utilizando a equação (4-27), obtemos

$$P_T(x) = \frac{1-x}{n-\sum_{i=1}^{n-1} P_{T_i}(x)} \tag{4-29}$$

A função geradora do primeiro retorno à raiz de uma árvore consistindo de uma única aresta é $1 - x$. Daí, por indução em $|T|$, obtemos o resultado (4-28).

■

Lema 4.3.3 *Para toda árvore $\tau \in \Gamma_S^\infty$ e $R \geq 1$, temos que*

$$P_\tau(x) \geq 1 - \frac{1}{R} - x|\bar{\mathcal{B}}_R|. \quad (4-30)$$

Prova.

Primeiramente, vamos provar o seguinte argumento indutivo: dada a inequação

$$P_\tau^R(x) \geq 1 - \frac{1}{R} - xR - \sum_{T \subset \tau}^R (1 - P_T(x)), \quad (4-31)$$

na qual $P_\tau^R(x)$ é função geradora de probabilidade de retorno que contribui para $P_\tau(x)$ com os passeios que não visitam o vértice s_{R+1} da espinha, isto, é passeios restritos aos primeiros R vértices e os ramos ligados a eles. $\sum_{T \subset \tau}^R$ denota a soma sobre todos os ramos finitos T de τ ligados aos vértices da espinha a uma distância $\leq R$ da raiz.

A inequação (4-31) vale para $R = 1$, uma vez que o lado direito não é positivo. Para $R \geq 2$, utilizando a Eq. (4-27), temos que

$$P_\tau(x) = \frac{1 - x}{n - P_{\tau_1}^R(x) - \sum_{k=1}^{n-2} P_{T_k}(x)}. \quad (4-32)$$

Na qual $n = \sigma(s_1)$ é a ordem do vértice s_1 e T_1, T_2, \dots, T_k denotam os ramos finitos ligados ao vértice s_1 . τ_1 é o ramo infinito ligado a s_1 , ou seja, a subárvore cuja raiz é s_2 e todos seus descendentes.

Por hipótese de indução, a inequação (4-31) vale para $R - 1$, ou seja,

$$P_{\tau_1}^{R-1}(x) \geq 1 - \frac{1}{R-1} - x(R-1) - \sum_{T \subset \tau_1}^{R-1} (1 - P_T(x)), \quad (4-33)$$

e podemos reescrever a Eq. 4-32 para obtermos a seguinte relação

$$P_\tau^R(x) = \frac{1-x}{1 + (1 - P_{\tau_1}^{R-1}(x)) + \sum_{k=1}^{n-2} (1 - P_{T_k}(x))}. \quad (4-34)$$

Considerando (4-33), temos

$$P_\tau^R(x) \geq \frac{1-x}{1 + \frac{1}{R-1} + x(R-1) + \sum_{T \subset \tau}^{R-1} (1 - P_T(x))} \quad (4-35)$$

$$\geq \frac{R-1}{R} \frac{1-x}{1 + x(R-1) + \sum_{T \subset \tau}^R (1 - P_T(x))} \quad (4-36)$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{R}\right) (1-x) \left(1 - x(R-1) - \sum_{T \subset \tau}^R (1 - P_T(x))\right) \quad (4-37)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{R} - Rx - \sum_{T \subset \tau}^R (1 - P_T(x)) \quad (4-38)$$

Observando que $P_\tau(x) \geq P_\tau^R(x)$, $\sum_{T \subset \tau}^R (1 - P_T(x)) = \sum_{i=1}^R (\sigma(s_i) - 2) (1 - P_{\mathcal{A}^i}(x))$ e $|\bar{\mathcal{B}}_R| = \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}^i| + R$, na qual \mathcal{A}^i denota a união dos vértices s_i e as árvores finitas ligadas a eles. Por último, utilizando o lema 4-28 completamos a prova.

Quando assumimos a existência das dimensões, estamos assumindo os critérios (4-11) e (4-20). Daí, utilizando o lema (4.3.3) e a relação (4-18), temos que

$$Q_\tau(x) \geq \frac{R}{1 + xR^{\bar{d}_h+1}l_1(x)}. \quad (4-39)$$

Escolhendo $R = \lfloor x^{-1/(1+\bar{d}_h)} \rfloor$, obtemos

$$Q_\tau(x) \geq \frac{x^{-1/(1+\bar{d}_h)}}{1 + l_1(x)}. \quad (4-40)$$

Fornecido que d_s existe e, portanto, considerando a definição de d_s em (4-19) e do fato que $\bar{d}_h \geq 1$, encontramos

$$d_s \leq \frac{2\bar{d}_h}{1 + \bar{d}_h}. \quad (4-41)$$

4.3.2

Limite inferior para a dimensão espectral

O seguinte lema demonstrado em [12] será explorado a fim de obtermos o limite inferior para dimensão espectral:

Lema 4.3.4 *Para toda árvore $\tau \in \Gamma$ temos que*

$$Q_\tau(x) \leq R + \frac{2}{x|\mathcal{B}_R(R)|}. \quad (4-42)$$

Antes de utilizarmos o lema 4.3.4, vamos apenas dar um simples esboço da prova: basicamente se usa da decomposição do passeio aleatório em dois, Ω_1 e Ω_2 . Ω_1 é o conjunto de passeios que não alcançam mais do que a distância R da raiz. Já Ω_2 é o conjunto de passeios que alcançam mais do que a distância R da raiz. Então, é possível mostrar que $Q_\tau = Q_\tau^{\Omega_1} + Q_\tau^{\Omega_2}$, na qual $Q_\tau^{\Omega_1} \leq R$ e $Q_\tau^{\Omega_2} \leq \frac{2}{x|\mathcal{B}_R(R)|}$. A demonstração do lema 4.3.4 pode ser encontrada de forma mais rigorosa em [12].

A fim de provar o limite inferior, observamos que, devido à existência da dimensão de Hausdorff, temos, da definição (4-11) de $\mathcal{B}_R(R)$, a relação $|\mathcal{B}_R(R)| \geq R^{d_h} l_1(R)$. Daí, utilizando o lema 4.3.4, encontramos:

$$Q_\tau(x) \leq R + x^{-1} R^{-d_h} l_1^{-1}(R). \quad (4-43)$$

Escolhendo $R = \lceil x^{-1/(1+d_h)} \rceil$, obtemos:

$$Q_\tau(x) \leq x^{-1/(1+d_h)} (1 + l_1^{-1}(R)). \quad (4-44)$$

Dado que d_s existe, então os critérios em (4-20) são admitidos. Também considerando a definição de d_s em (4-19) e do fato que $d_h \geq 1$, encontramos

$$d_s \geq \frac{2d_h}{1 + d_h}. \quad (4-45)$$

■

4.4

Ramos independentes e identicamente distribuídos

Agora vamos estudar o modelo definido no final do capítulo 1, ou seja, árvores aleatórias com uma única espinha infinita, na qual os ramos dos

diferentes vértices ao longo da espinha são independentes e identicamente distribuídos. Lembrando que \mathcal{A}^i é a união dos vértices s_i e as árvores finitas ligadas a eles. Vamos agora definir Z_t^i o número de vértices em \mathcal{A}^i a uma distância t de s_i . Por exemplo, $Z_0^i = 1$. Além do mais, denotamos por \mathcal{A}_t^i a intersecção de \mathcal{A}^i com a bola de raio t centrada ao redor de s_i . Agora vamos demonstrar o seguinte teorema [22]:

Teorema 4.4.1 *Seja (Γ, \mathbf{P}) um ensemble de árvores aleatórias sobre o conjunto de árvores com uma única espinha infinita Γ_S^∞ , e ramos $(\mathcal{A}^i)_{i \geq 1}$ i.i.d na espinha.*

(i) *Se para $\alpha \in (0, 1)$ e $z \in (0, 1)$,*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(z^{|\mathcal{A}^i|}) = 1 - (1 - z)^\alpha l_1(1 - z), \quad (4-46)$$

na qual $l_1(1 - z)$ é uma função que varia lentamente quando $z \rightarrow 1$. Então, se d_h e d_s existem, tem-se quase certamente que

$$d_h \leq \frac{1}{\alpha} \quad e \quad d_s \leq \frac{2}{1 + \alpha}. \quad (4-47)$$

(ii) *Se além disso,*

$$\mathbf{P}(\{Z_t^i > 0\}) \leq \frac{c}{t}, \quad (4-48)$$

na qual $c > 0$ é uma constante, então quase certamente d_h e d_s existem e

$$d_h = \frac{1}{\alpha} \quad e \quad d_s = \frac{2}{1 + \alpha}. \quad (4-49)$$

4.4.1

Prova da primeira parte do Teorema 4.4.1

$|\bar{\mathcal{B}}_R| = \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}^i| + R$ é uma soma de variáveis aleatórias i.i.d. $|\mathcal{A}^i|$. Então, podemos facilmente obter o limite da soma $|\bar{\mathcal{B}}_R|$ e, assim, encontrar um limite sobre \bar{d}_h quase certamente. Para isso, observamos que pelo teorema Tauberiano [28], (4-46) é equivalente a:

$$\mathbf{P}(\{|\mathcal{A}^i| > R\}) \sim R^{-\alpha} L(R). \quad (4-50)$$

Definimos que “ \sim ” significa que o comportamento assintótico da razão dos dois lados, quando $R \rightarrow \infty$, tende a 1. Portanto, por (4-50), podemos afirmar que existe uma função que varia lentamente $L_1(R)$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{|\mathcal{A}^i| > R^{\frac{1}{\alpha}} L_1(R)\}) < \infty. \quad (4-51)$$

É possível aplicar à última equação o seguinte teorema de Feller [16]:

Teorema 4.4.2 *Seja X_1, X_2, \dots i.i.d. com $\mathbf{E}|X_1| = \infty$, e $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Seja a_n uma sequência de números positivos com a_n/n crescente. Então, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n|/a_n = 0$ ou ∞ na medida que $\sum_n \mathbf{P}(|X_1| \geq a_n) < \infty$ ou $= \infty$, respectivamente.*

E assim nos possibilita encontrar

$$\mathbf{P}(\{\tau : \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}^i| > R^{\frac{1}{\alpha}} L_1(R) \text{ infinitas vezes}\}) = 0. \quad (4-52)$$

A Eq.(4-52) representa que, para um número infinito de tentativas, o evento $\tau : \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}^i| > R^{\frac{1}{\alpha}} L_1(R)$ ocorre para um número finito de tentativas. Então, o evento em que τ não ocorre acontece infinita vezes (assumindo que somente o evento em que τ ocorre ou não ocorre pode acontecer).

Então, provamos que para \mathbf{P} -quase todas as árvores, existe uma constante $C > 1$ e um R_0 , tal que para $R > R_0$ temos

$$|\bar{\mathcal{B}}_R| < CL_1(R)R^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4-53)$$

Finalmente, considerando o critério (4-11), segue que $\bar{d}_h \leq \frac{1}{\alpha}$ quase certamente, e utilizando o teorema 4.3.1, temos ainda que $d_s \leq \frac{2}{1+\alpha}$.

4.4.2

Prova da segunda parte do Teorema 4.4.1

A ideia dessa parte da demonstração é provar que existe uma constante C tal que

$$\mathbf{P}(\{\tau : |\mathcal{B}_R| < \lambda R^{\frac{1}{\alpha}}\}) \leq Ce^{-\lambda^{-\alpha}l(\lambda^{-1}R^{-1/\alpha})}, \quad (4-54)$$

para λ pequeno o suficiente tal que $-\lambda^{-\alpha}l(\lambda^{-1}R^{-1/\alpha}) > c$, na qual $l(\lambda^{-1}R^{-1/\alpha})$ é devido a (4-46).

Assumindo a afirmação (4-54), vamos utilizar o seguinte teorema que se pode encontrar a prova em [27]:

Teorema 4.4.3 *Seja L uma função que varia lentamente. Então existe uma função L^* , tal que os itens a seguir são equivalentes:*

- (i) L^* varia lentamente;
- (ii) $L(x)L^*(xL(x)) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$;
- (iii) $L^*(x)L(xL^*(x)) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$;
- (iv) L^* é assintoticamente única;

O último teorema nos permite afirmar que para qualquer $\bar{c} \in \mathbb{R}$ existe uma função $L_2(R)$ que satisfaz

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{L_2(R)^{-\alpha}l(L_2(R)^{-1}R^{-1/\alpha})}{\log(R^{\bar{c}})} = 1 \tag{4-55}$$

Essa afirmação fica clara fazendo L^* a função que varia lentamente conjugada a $L(R) = 1/l(R^{-1/\alpha})$. Isto é, através da propriedade (iii) do teorema 4.4.3,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} L^*(R)L(RL^*(R)) = 1, \tag{4-56}$$

e escolhendo

$$L_2(R) = \left(L^* \left(\frac{R}{\log(R^{\bar{c}})} \right) / \log(R^{\bar{c}}) \right)^{1/\alpha}. \tag{4-57}$$

A condição imposta a λ é satisfeita fazendo $\lambda = L_2(R)$ e $\bar{c} > 1$. Assim, nós encontramos

$$\sum_{R=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{\tau : |\mathcal{B}_R| < R^{\frac{1}{\alpha}}L_2(R)\}) < \infty. \tag{4-58}$$

E utilizando o lema de Borel-Cantelli [28], temos que

$$\mathbf{P}(\{\tau : |\mathcal{B}_R| < R^{\frac{1}{\alpha}} L_2(R) \text{ infinitas vezes}\}) = 0, \quad (4-59)$$

que possui significado análogo a Eq.(4-52).

Podemos concluir, então, que para \mathbf{P} -quase todas as árvores, existe um R_0 , tal que para $R > R_0$ temos

$$|\mathcal{B}_R| > R^{\frac{1}{\alpha}} L_2(R). \quad (4-60)$$

Daí provamos que $d_h \geq 1/\alpha$, considerando o critério (4-11). Segue diretamente dos resultados da primeira parte desta seção, e do teorema 4.3.1, que quase certamente

$$d_h = \frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad d_s = \frac{2}{1 + \alpha}. \quad (4-61)$$

Quando os ramos finitos da espinha morrem rápido o suficiente, isto é, se a condição (4-48) é obedecida, então a bola \mathcal{B}_R e a casca $\bar{\mathcal{B}}_R$ têm tamanhos próximos. Assim, $\bar{\mathcal{B}}_R$ pode ser usado para estimar \mathcal{B}_R . A demonstração do lema a seguir nos fornecerá uma ferramenta necessária para medir proximidade em tamanho da bola \mathcal{B}_R à casca $\bar{\mathcal{B}}_R$, a fim de obtermos informações que nos permitam estimar \mathcal{B}_R através de $\bar{\mathcal{B}}_R$.

Lema 4.4.4 *Para $z \leq 1$, tem-se para a função geradora de probabilidade*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(z^{|\mathcal{A}^i|} \right) \leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(z^{|\mathcal{A}_t^i|} \right) \leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(z^{|\mathcal{A}^i|} \right) + \mathbf{P} \left(\{Z_t^i > 0\} \right) \quad (4-62)$$

Prova.

Primeiramente, notamos que $|\mathcal{A}^i| \geq |\mathcal{A}_t^i|$. Daí obtemos o limite inferior. Para facilitar a notação, vamos denotar o evento $E_t := \{Z_t^i > 0\}$, então

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(z^{|\mathcal{A}_n^i|} - z^{|\mathcal{A}^i|} \right) = \int_{E_t} \left(z^{|\mathcal{A}_t^i|} - z^{|\mathcal{A}^i|} \right) d\mathbf{P} + \int_{E_t^c} \left(z^{|\mathcal{A}_t^i|} - z^{|\mathcal{A}^i|} \right) d\mathbf{P} \quad (4-63)$$

$$= \int_{E_t} \left(z^{|\mathcal{A}_t^i|} - z^{|\mathcal{A}^i|} \right) d\mathbf{P} \leq \int_{E_t} z^{|\mathcal{A}_t^i|} d\mathbf{P} \quad (4-64)$$

$$\leq \int_{E_t} d\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{Z_t^i > 0\}). \quad (4-65)$$

Assim obtemos o limite superior.

Para provar (4-54), notamos antes que

$$\mathcal{A}_{[R/2]}^1 \cup \mathcal{A}_{[R/2]}^2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_{[R/2]}^{[R/2]} \subset \mathcal{B}_R. \quad (4-66)$$

Então, é suficiente provar

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \tau : \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}_R^i| < \lambda R^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right) \leq C e^{-\lambda^{-\alpha} l(\lambda^{-1} R^{-1/\alpha})}. \quad (4-67)$$

Usando a desigualdade de Markov, a independência de $|\mathcal{A}_R^i|$ e o lema 4.4.4 obtemos que, para qualquer $n \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$,

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \tau : \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}_R^i| < \lambda R^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right) \leq \mathbf{P} \left(\left\{ \tau : \exp \left(-n \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}_R^i| \right) > \exp \left(-n \lambda R^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \right) \quad (4-68)$$

$$\leq e^{n \lambda R^{\frac{1}{\alpha}}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\prod_{i=1}^R e^{-n |\mathcal{A}_R^i|} \right) = e^{n \lambda R^{\frac{1}{\alpha}}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(e^{-n |\mathcal{A}_R^1|} \right)^R \quad (4-69)$$

$$\leq e^{n \lambda R^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(e^{-n |\mathcal{A}_R^1|} \right) + \mathbf{P}(\{Z_R^1 > 0\}) \right)^R. \quad (4-70)$$

Da definição da função geradora de probabilidade em 4-46, obtemos

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(e^{-n |\mathcal{A}_R^1|} \right) \leq 1 - n^{\alpha} l(n) + o(n^{\alpha} l(n)), \quad (4-71)$$

na qual $l(n)$ varia lentamente quando $n \rightarrow 0^+$. Escolhendo $n = \lambda^{-1} R^{-1/\alpha}$ e λ pequeno o suficiente, tal que

$$\lambda^{-\alpha} l(\lambda^{-1} R^{-1/\alpha}) > c \quad (4-72)$$

com c de (4-48).

Por último, aplicando (4-48) e (4-71) a (4-70), encontramos, para uma constante conveniente C' ,

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \tau : \sum_{i=1}^R |\mathcal{A}_R^i| < \lambda R^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right) \leq C' \left(1 - \frac{\lambda^{-\alpha} l (\lambda^{-1} R^{-1/\alpha}) - c}{R} \right)^R \quad (4-73)$$

$$\leq C' e^{-\lambda^{-\alpha} l (\lambda^{-1} R^{-1/\alpha}) + c} \quad (4-74)$$

Fazendo $C = C' e^c$ em (4-74), obtemos a inequação (4-54). ■

4.5 Árvores de Galton-Watson Condicionadas

Relembrando do capítulo 1, o processo de Gatson-Watson é um processo de ramificação discreto no tempo que começa por uma única partícula. À cada passo de tempo, as partículas se ramificam independentemente das outras partículas, com a mesma probabilidade. Como já demonstrado, o valor de $G'(1) = \mu$ (o número médio de filhos) determina as propriedades de sobrevivência do processo.

Também vimos a definição do processo de ramificação com uma abordagem típica da Física Estatística. Nesse contexto, agora vamos denotar o raio de convergência da função geradora $\mathcal{Z}(\zeta)$, em (3-4) do capítulo 3, por ζ_0 . Já o raio de convergência de $g(z)$, em (3-5), no capítulo 3, denotamos por ρ . Além disso, definimos também $\mathcal{Z}_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \mathcal{Z}(\zeta)$. Quando $\rho > 0$, a medida \mathbf{P}_n pode ser equivalentemente definida por um processo de ramificação de Gatson-Watson [26]. As probabilidades do número de filhos podem ser encontrada em [29], mais especificamente, Eq.(3.8), e são dadas por:

$$p(k) = \zeta_0 w_{k+1} \mathcal{Z}_0^{k-1}. \quad (4-75)$$

O valor esperado de filhos pode ser escrito na forma

$$G'(1) = 1 - g(\mathcal{Z}_0) / \mathcal{Z}'(\zeta_0). \quad (4-76)$$

Logo, o processo é crítico ou subcrítico. Neste capítulo, nós só consideramos o caso crítico, isto é, quando $\mathcal{Z}'(\zeta_0) = \infty$. Em especial, o teorema na sequência é derivado da proposição 3.3.1 no final capítulo 3. Vamos considerar o caso em que este teorema é válido.

Teorema 4.5.1 *Para um processo crítico de Gatson-Watson de tamanho condicionado, as medidas de volume finito \mathbf{P}_n convergem fracamente quando $n \rightarrow \infty$ para a medida \mathbf{P} , a qual está concentrada em Γ_S^∞ . Os graus $\sigma(s_i)$ dos vértices ao longo da espinha são independentemente distribuídos por*

$$\phi(k) = \zeta_0(k-1)w_k \mathcal{Z}_0^{k-2} \tag{4-77}$$

e os ramos da espinha são árvores de Gatson-Watson independentes com a probabilidade de número de filhos dada por (4-75).

O modelo crítico é geralmente dividido em duas situações: $G''(1)$ finito ou infinito. No caso $G''(1) < \infty$, as árvores sempre pertencem a uma mesma classe de universalidade. Tais árvores tem sido denominadas como “árvores genéricas” na literatura da Física. No caso $G''(1) = \infty$, o alcance das classes de universalidades dependem de um comportamento singular de G . Este caso tem sido denominado como “crítico não-genérico” [26]. A partir de agora, vamos estudar o modelo aqui esboçado: árvores de Galton-Watson condicionadas.

4.5.1 Dimensões

Os resultados do teorema a seguir já foram obtidos anteriormente [26]: o resultado para d_s pode ser encontrado em [12]. Para a dimensão de Hausdorff d_h , o resultado já é muito conhecido na literatura. Pode-se encontrar uma demonstração em [30], por exemplo. Já para a parte (ii) do teorema 4.5.2, os resultados foram primeiramente propostos na literatura da Física, posteriormente provados por Croydon e Kumagai em [31]. A ideia por trás de nossa demonstração é derivar o teorema 4.5.2 do teorema 4.4.1, fazendo a prova um pouco mais intuitiva e acessível para físicos (apesar da perda de generalidade demonstrada em [31]).

Teorema 4.5.2 (i) A "quenched Hausdorff dimension" e a dimensão espectral de árvores genéricas é quase certamente

$$d_h = 2 \quad e \quad d_s = 4/3 \tag{4-78}$$

respectivamente.

(ii) Para árvores críticas não genéricas com $w_n \sim n^{-\beta}L(n)$, na qual $\beta \in (2, 3]$ e L varia lentamente no infinito, the "quenched Hausdorff dimension" e a dimensão espectral são quase certamente

$$d_h = \frac{\beta - 1}{\beta - 2} \quad e \quad d_s = \frac{2(\beta - 1)}{2\beta - 3}, \tag{4-79}$$

respectivamente.

Prova.

Um resultado conhecido, como pode ser visto em [18], é que para árvores genéricas a seguinte expressão é válida:

$$\mathbf{E} \left(z^{|\mathcal{A}^i|} \right) = 1 - c(1 - \zeta)^{1/2} + o \left((1 - \zeta)^{1/2} \right) \quad (4-80)$$

Denotando por $Z_t^{i,j}$ o tamanho da n -ésima geração do j -ésimo ramo do vértice s_i . Então, para $n \geq 1$, utilizamos a relação 3-12 do capítulo 1 para obtermos

$$\mathbf{P}(\{Z_t^{i,j} > 0\}) = 1 - f_{t-1}(0) = \frac{2}{t f''(1)}(1 + o(1)). \quad (4-81)$$

Devido às propriedades do modelo citadas em [22], os ramos ligados aos vértices são independentes. Portanto, usando o teorema 4.5.2

$$\mathbf{P}(\{Z_t^i > 0\}) = 1 - f'(1 - \mathbf{P}(\{Z_t^{i,j} > 0\})) \quad (4-82)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + o(1)) \quad (4-83)$$

O resultado 4-83 satisfaz a condição 4-48 no item (ii) do teorema 4.4.1. Logo, podemos utilizar 4-49 para obtermos os resultados do item (i).

Agora vamos considerar o caso em que $G'''(1) = \infty$. Como $w_n \sim n^{-\beta} L(n)$, podemos utilizar o teorema Tauberiano [28] para escrever

$$G(z) = z + (1 - z)^{\beta-1} l_1(1 - z), \quad (4-84)$$

na qual $l_1(x)$ varia lentamente nas proximidades de 0. Fazendo $\mathcal{W}(\zeta) = \mathcal{L}(\zeta_0 \zeta) / \mathcal{L}_0$, e utilizando as propriedades da função geradora e o teorema 4.5.2, deduzimos que

$$\mathbf{E} \left(z^{|\mathcal{A}^i|} \right) = f'(\mathcal{W}(z)) \quad (4-85)$$

Escrevendo

$$\mathcal{W}(z) = 1 - (1 - \zeta)^{\frac{1}{\beta-1}} \chi(1 - \zeta), \quad (4-86)$$

temos que, devido a 3-6 e 4-84, χ tem que satisfazer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)^{\beta-1} l_1 \left(x^{\frac{1}{\beta-1}} \chi(x) \right) = 1. \quad (4-87)$$

Através do teorema 4.4.3, podemos afirmar que χ varia lentamente nas proximidades de 0. Portanto, utilizando 4-84, 4-85, 4-86 e o teorema Tauberiano [28], escrevemos

$$\mathbf{E} \left(z^{|\mathcal{A}^i|} \right) = 1 - (1 - z)^{\frac{\beta-2}{\beta-1}} l_2(1 - z) \quad (4-88)$$

na qual $l_2(x)$ varia lentamente nas proximidades de 0. Logo, através do item (i) do teorema 4.4.1 encontramos os limites superiores de d_h e d_s .

Para obtermos os limites inferiores, vamos utilizar o seguinte resultado que foi demonstrado por Slack em [32]:

$$\mathbf{P}(\{Z_t^{i,j} > 0\})^{\beta-2} l_1(\mathbf{P}(\{Z_n^{i,j} > 0\})) = \frac{1}{(\beta-2)t} (1 + o(1)), \quad (4-89)$$

na qual l_1 é a mesma função que varia lentamente em 4-84 e $Z_t^{i,j}$ o tamanho da n -ésima geração do j -ésimo ramo do vértice s_i .

Uma vez que os ramos são independentes, utilizando 4-84 para encontramos

$$\mathbf{P}(\{Z_t^i > 0\}) = 1 - f'(1 - \mathbf{P}(\{X_t^{i,j} > 0\})) \quad (4-90)$$

$$= (\beta - 1) (\mathbf{P}(\{Z_t^{i,j} > 0\}))^{\beta-2} l_1(\mathbf{P}(\{Z_t^{i,j} > 0\})) (1 + o(1)) \quad (4-91)$$

$$= \frac{\beta - 1}{\beta - 2} \frac{1}{t} (1 + o(1)) \quad (4-92)$$

Por fim, através do item (ii) do teorema 4.4.1 encontramos os limites inferiores para d_h e d_s .

■

5

Conclusão

Os recentes avanços em modelos de multigrafos para a gravitação quântica nos motivou a estudar o processo de Galton-Watson. Primeiramente, no capítulo 2 definimos alguns conceitos da Teoria dos Grafos e da Teoria da Probabilidade que embasam a estrutura teórica do estudo de modelos de árvores aleatórias.

No capítulo 3, abordamos de forma intuitiva o processo de ramificação, definindo o caso subcrítico, crítico e supercrítico. Também fornecemos demonstrações mais rigorosas para a probabilidade de extinção do processo. No final do capítulo 3, apresentamos um modelo de Galton-Watson condicionado que produz uma propriedade interessante: uma espinha única infinita. Em especial, a condição que dá origem à essa espinha pode ser relacionada com o limite termodinâmico da Física Estatística.

No capítulo 4, nós revisamos os resultados obtidos em [26]. Assim apresentamos a definição de dimensão de Hausdorff e dimensão espectral e desenvolvemos um método para calcular a dimensão de árvores aleatórias com uma espinha infinita. Os teoremas 4.3.1 e 4.4.1 são demonstrados com esse propósito. Aplicamos esses métodos ao modelo de Galton-Watson condicionado, demonstrando a efetividade das técnicas utilizadas.

As técnicas obtidas podem ser facilmente aplicadas a outros modelos que satisfaçam as condições de existência das dimensões de Hausdorff e dimensão espectral. Por exemplo, as técnicas foram aplicadas satisfatoriamente ao “attachment and grafting model” em [26]. Isso sugere que o método abordado têm a possibilidade de futuras aplicações a outros modelos de grafos aleatórios. Ainda, a revisão de [26] neste trabalho nos permitiu aprender as técnicas necessárias para estudar um modelo em especial: árvores aleatórias geradas por percolação de invasão, no qual estamos atualmente trabalhando. O objetivo inicial era que ele estivesse inserido neste trabalho. Porém, devido a alguns intempéries no caminho, nos restringimos a aprendizagem das técnicas demonstradas. Fica assim mencionado, com a perspectiva de novos resultados serem obtidos.

Referências Bibliográficas

- [1] ALDOUS, D. **Probability distributions on cladograms**. In: RANDOM DISCRETE STRUCTURES, p. 1–18. Springer, 1996.
- [2] DAVID, F.; HAGENDORF, C. ; WIESE, K. J. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**. A growth model for rna secondary structures, journal, v.2008, n.04, p. P04008, 2008.
- [3] HUH, D.; LEE, J. ; LEE, S. **BULLETIN-KOREAN CHEMICAL SOCIETY**. Fractional diffusion equation approach to the anomalous diffusion on fractal lattices, journal, v.26, n.11, p. 1723, 2005.
- [4] WILKINSON, D.; WILLEMSSEN, J. F. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. Invasion percolation: a new form of percolation theory, journal, v.16, n.14, p. 3365, 1983.
- [5] LE GALL, J.-F.; OTHERS. **Probab. Surv.** Random trees and applications, journal, v.2, n.245-311, p. 17–33, 2005.
- [6] DI FRANCESCO, P. **2d quantum gravity, matrix models and graph combinatorics**. In: APPLICATIONS OF RANDOM MATRICES IN PHYSICS, p. 33–88. Springer, 2006.
- [7] AMBJØRN, J.; JÓNSSON, Þ. **Quantum geometry: a statistical field theory approach**. Cambridge University Press, 1997.
- [8] GIASEMIDIS, G.; WHEATER, J. F. ; ZOHREN, S. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**. Multigraph models for causal quantum gravity and scale dependent spectral dimension, journal, v.45, n.35, p. 355001, 2012.
- [9] AMBJØRN, J.; JURKIEWICZ, J. ; LOLL, R. **Physical review letters**. The spectral dimension of the universe is scale dependent, journal, v.95, n.17, p. 171301, 2005.
- [10] CARLIP, S. **Reports on progress in physics**. Quantum gravity: a progress report, journal, v.64, n.8, p. 885, 2001.

- [11] BENEDETTI, D. **Physical review letters**. Fractal properties of quantum spacetime, journal, v.102, n.11, p. 111303, 2009.
- [12] DURHUUS, B.; JONSSON, T. ; WHEATER, J. F. **Journal of Statistical Physics**. The spectral dimension of generic trees, journal, v.128, n.5, p. 1237–1260, 2007.
- [13] GRUHL, D.; GUHA, R.; LIBEN-NOWELL, D. ; TOMKINS, A. **Information diffusion through blogspace**. In: PROCEEDINGS OF THE 13TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON WORLD WIDE WEB, p. 491–501. ACM, 2004.
- [14] DIESTEL, R. **Graduate texts in mathematics**. Graph theory, volume 173 of, journal, 2000.
- [15] BONDY, J. A.; MURTY, U. **Graph theory and its applications**, 1976.
- [16] DURRETT, R. **Probability: theory and examples**. Cambridge university press, 2010.
- [17] WILLIAMS, D. **Probability with martingales**. Cambridge university press, 1991.
- [18] ATHREYA, K. B.; NEY, P. E. **Branching processes**. Springer, 1972.
- [19] DURRETT, R. **Random graph dynamics**, volume 200. Cambridge university press Cambridge, 2007.
- [20] FLAJOLET, P.; SEDGEWICK, R. **Analytic combinatorics**. cambridge University press, 2009.
- [21] IMBUZEIRO, R. **IMPA - Programa de Doutorado: Probabilidade e Grafos**. Disponível em: <<http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-doutorado-probabilidade-e-grafos>>, Acesso em: 05 dez. 2014.
- [22] KENNEDY, D. P. **Journal of Applied Probability**. The galton-watson process conditioned on the total progeny, journal, p. 800–806, 1975.
- [23] ALDOUS, D.; PITMAN, J. **Tree-valued markov chains derived from galton-watson processes**. In: ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ (B) PROBABILITY AND STATISTICS, volume 34, p. 637–686. Elsevier, 1998.

- [24] DURHUUS, B.; JONSSON, T. ; WHEATER, J. F. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. Random walks on combs, journal, v.39, n.5, p. 1009, 2006.
- [25] BARLOW, M. T.; KUMAGAI, T. ; OTHERS. **Illinois Journal of Mathematics**. Random walk on the incipient infinite cluster on trees, journal, v.50, n.1-4, p. 33–65, 2006.
- [26] STEFÁNSSON, S. Ö.; ZOHREN, S. **Journal of Statistical Physics**. Spectral dimension of trees with a unique infinite spine, journal, v.147, n.5, p. 942–962, 2012.
- [27] SENETA, E. **Regularly varying functions**. Springer, 1976.
- [28] FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**, volume 2. John Wiley & Sons, 2008.
- [29] JONSSON, T.; STEFÁNSSON, S. Ö. **Journal of Statistical Physics**. Condensation in nongeneric trees, journal, v.142, n.2, p. 277–313, 2011.
- [30] HARRIS, M. G.; WHEATER, J. F. **Physics Letters B**. The hausdorff dimension in polymerized quantum gravity, journal, v.448, n.3, p. 185–190, 1999.
- [31] CROYDON, D.; KUMAGAI, T. **Electron. J. Probab.** Random walks on galton-watson trees with infinite variance offspring distribution conditioned to survive, journal, v.13, p. 1419–1441, 2008.
- [32] SLACK, R. **Probability Theory and Related Fields**. A branching process with mean one and possibly infinite variance, journal, v.9, n.2, p. 139–145, 1968.