



Luiz Henrique Arêas Peres

**Análise de Mecanismos de Venda de Títulos
para o Financiamento Público: Uma Análise
sob a Ótica da Teoria de Leilões**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada da PUC-Rio .

Orientador : Prof. Carlos Tomei
Co-orientador: Prof. Luciano Irineu de Castro

Rio de Janeiro
Março de 2021



Luiz Henrique Arêas Peres

**Análise de Mecanismos de Venda de Títulos
para o Financiamento Público: Uma Análise
sob a Ótica da Teoria de Leilões**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Carlos Tomei

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Luciano Irineu de Castro

Co-orientador

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

Prof. Vinicius Nascimento Carrasco

Departamento de Economia – PUC-Rio

Prof. Leonardo Banra Rezende

Departamento de Economia – PUC-Rio

Prof. Davi Michel Valladão

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Humberto Luiz Ataíde Moreira

Escola Brasileira de Economia e Finanças (EPGE) – FGV-Rio

Rio de Janeiro, 25 de março de 2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luiz Henrique Arêas Peres

Graduado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF)

Ficha Catalográfica

Peres, Luiz

Análise de Mecanismos de Venda de Títulos para o Financiamento Público: Uma Análise sob a Ótica da Teoria de Leilões / Luiz Henrique Arêas Peres; orientador: Carlos Tomei; co-orientador: Luciano Irineu de Castro. – Rio de Janeiro: PUC-Rio , Departamento de Matemática, 2021.

v., 62 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Teoria de Leilões;. 3. Títulos Públicos;. 4. Teoria dos Jogos;. 5. Equilíbrios Colusivos;. I. Tomei, Carlos. II. Irineu de Castro, Luciano. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 004

Aos meus professores, amigos, colegas e familiares
pelo suporte, incentivo e confiança.

Agradecimentos

Ao CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu orientador Professor Carlos Tomei pela liberdade e confiança para a realização deste trabalho. Bem como ao meu co-orientador Professor Luciano Irineu de Castro que me sugeriu o tema e me deu ferramentas para que eu pudesse realizar um trabalho digno.

Aos meus amigos Jyulliano Ferraro, Matheus Tardin, Samuel Pacitti, Alex Peres, Lais Costa, Fernando Braga e Alian Damasceno por todo apoio, paciência, compreensão e ajuda.

À minha irmã Lucia Helena por todo apoio e amor. Bem como a meus pais Carlos Magno e Karla pela educação, atenção e carinho de todas as horas.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora, que aceitaram prontamente o convite e se mostraram solícitos.

À toda equipe docente e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Peres, Luiz; Tomei, Carlos; Irineu de Castro, Luciano. **Análise de Mecanismos de Venda de Títulos para o Financiamento Público: Uma Análise sob a Ótica da Teoria de Leilões**. Rio de Janeiro, 2021. 62p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem por objetivo analisar uma das formas de financiamento da República Federativa do Brasil: a venda de títulos da dívida pública. Para isso serão analisadas diversas informações oficiais dos órgãos competentes, relacionadas às regras que permeiam este tipo de negociação. Além disso, serão explorados trabalhos correlatos e suas principais contribuições. Por fim, o texto busca mostrar qual formato de leilão é, teoricamente, a mais vantajosa para o Tesouro Nacional negociar seus títulos de dívida.

Palavras-chave

Teoria de Leilões; Títulos Públicos; Teoria dos Jogos; Equilíbrios Colusivos;

Abstract

Peres, Luiz; Tomei, Carlos (Advisor); Irineu de Castro, Luciano (Co-Advisor). **Analysis of Mechanisms for the Sale of Government Bonds for Public Financing: A Analysis from the Perspective of Auction Theory**. Rio de Janeiro, 2021. 62p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims to analyze one of the forms of financing the Federative Republic of Brazil: the sale of government bonds. For this, varied information from official agencies related to the rules that govern this type of negotiation will be analyzed. In addition, related works and their main contributions will be explored. Finally, the text seeks to show which auction format is, theoretically, the most advantageous for the National Treasury to negotiate its debt securities.

Keywords

Auction Theory; Government Securities; Game Theory; Collusive Equilibrium;

Sumário

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Introdução | 13 |
| 1.1 | Motivação | 13 |
| 1.2 | Proposta do Trabalho | 16 |
| 2 | Leilões de Venda do Tesouro Nacional | 19 |
| 2.1 | Quais são os Tipos de Leilão | 21 |
| 2.2 | Quais as Diferenças Entre os Papéis? | 23 |
| 2.3 | Um leilão com poucos licitantes e poucos lances | 24 |
| 2.4 | Modelo para o Funcionamento dos Leilões do TN | 29 |
| 3 | Revisão Bibliográfica | 35 |
| 3.1 | Contribuições para o Embasamento da Teoria de Leilões | 36 |
| 3.2 | Teoria de Leilões | 38 |
| 3.3 | Uma Teoria para Leilões de Tesouro | 47 |
| 3.4 | Leilões híbridos do TN | 48 |
| 4 | Modelando as Estratégias em Leilões do TN | 50 |
| 4.1 | Leilões com Oferta Fixa de Títulos | 51 |
| 4.2 | Leilões com Oferta Variável | 55 |
| 5 | Conclusões | 57 |
| A | Apêndice - Histórico Recente de Leilões | 58 |
| 6 | Referências bibliográficas | 59 |

Lista de figuras

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 1.1 | Taxas Médias Reais de Crescimento do PIB <i>per capita</i> por Década (%) - Elaboração: FGV/IBRE (2) - Fonte: IPEA e IBGE | 13 |
| Figura 1.2 | Resultado das Contas do Governo (em R\$ bilhões) - Elaboração: G1 (3) - Fonte: STN | 14 |
| Figura 1.3 | Evolução da Dívida Pública (% PIB) - Elaboração: IFI (4) - Fonte: BACEN | 14 |
| Figura 1.4 | Dívida Mobiliária em Mercado e Saldo das Compromissadas (% PIB) - Elaboração: IFI(4) - Fonte: BACEN | 15 |
| Figura 3.1 | Comparação de receitas entre leilão uniforme e discriminatório. Elaborado pelo autor com base em gráfico apresentado na referência (42) | 43 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------------|--|----|
| Tabela 2.1 | Instituições Autorizadas a Atuar Como <i>dealer</i> Entre Fevereiro e Julho de 2021 - Elaboração Própria - Fonte: STN (22) | 19 |
| Tabela 2.2 | Tabela Representando Critérios de Avaliação - Elaboração Própria - Fonte: DOU (21) | 20 |
| Tabela 2.3 | Características dos Títulos do Tesouro - Elaboração Própria - Fonte: STN (28) e (29). | 24 |
| Tabela 2.4 | Lances do Exemplo | 25 |
| Tabela 2.5 | Seleção de Propostas no Modelo Tradicional | 26 |
| Tabela 2.6 | Exemplo - Leilão Tradicional (Discriminatório) | 27 |
| Tabela 2.7 | Exemplo - Resultado do Leilão Uniforme (Traducional) | 28 |
| Tabela 2.8 | Exemplo - Resultado do Leilão Uniforme (Híbrido) | 29 |
| Tabela A.1 | Histórico Recente de Leilões de Venda do Tesouro Nacional | 58 |

Lista de símbolos

BACEN – Banco Central do Brasil

Codip – Coordenação-Geral de Operações da Dívida Pública

CTVM – Sociedades Corretoras de Títulos e Valores Mobiliários

DBGG – Dívida Bruta Geral do Governo

Demab – Departamento de Operações do Mercado Aberto

DLSP – Dívida Líquida do Setor Público

DOU – Diário Oficial da união

DPMFi – Dívida Pública Mobiliária Federal Interna

DTVM – Distribuidoras de Títulos e Valores Mobiliários

FGV – Fundação Getúlio Vargas

IBRE – Instituto Brasileiro de Economia

IFI – o Instituto Fiscal Independente

IPCA – Índice de Preços ao Consumidor Amplo

IPEA – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

LFT – Letras Financeiras do Tesouro

LTN – Letras do Tesouro Nacional

NTN-B – Notas do Tesouro - Série B

NTN-F – Notas do Tesouro - Série F

Ofdealer – Oferta a Dealers

Ofpub – Oferta Pública

PIB – Produto Interno Bruto

Selic – Sistema Especial de Liquidação e Custódia

SIPV – Symmetric Independent Private Values

STN – Secretaria do Tesouro Nacional

TN – Tesouro Nacional

Knowledge is a free good. The biggest cost in its transmission is not in the production or distribution of knowledge, but in its assimilation.

Kenneth J. Arrow, *Creating a Learning Society*.

1 Introdução

1.1 Motivação

Segundo o IPEA (1), entre os anos de 2011 e 2020, o Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro teve sua pior década em 120 anos, registrando um crescimento médio de 0,3% ao ano. Segundo Considera & Trece (2), o crescimento do PIB *per capita* no período “empata” com o da década de 80, sendo as únicas duas décadas em que o PIB *per capita* teve crescimento negativo na história do país, uma queda de 0,6%.

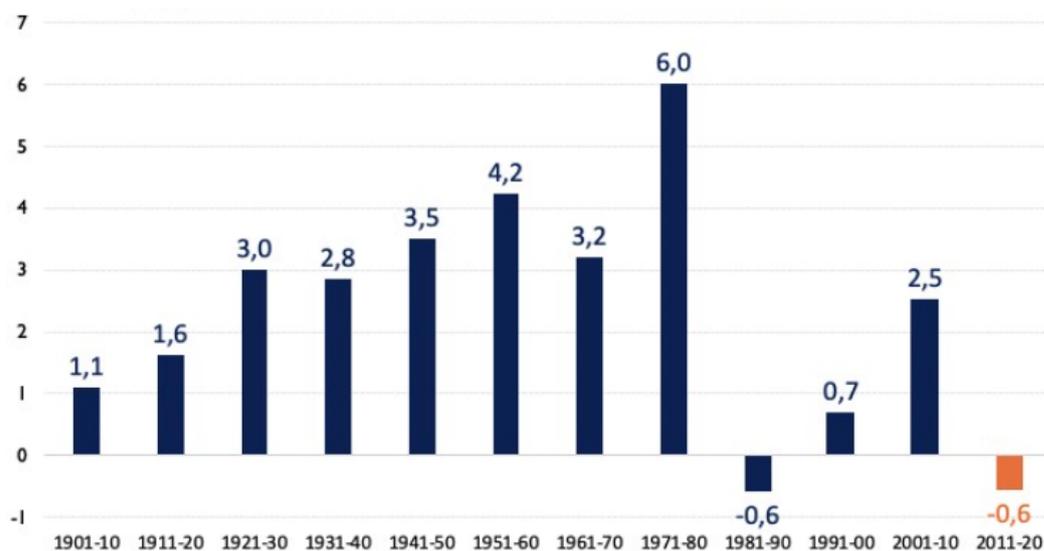


Figura 1.1: Taxas Médias Reais de Crescimento do PIB *per capita* por Década (%) - Elaboração: FGV/IBRE (2) - Fonte: IPEA e IBGE

Além disso, o portal G1 (3) apresenta dados da Secretaria de Tesouro Nacional (STN) sobre a situação fiscal entre os anos de 2010 e 2019. Os dados mostram que desde 2014 o governo brasileiro vem apresentando déficits, isto é, o governo possui um volume maior de despesas do que de receitas, conforme indicado no gráfico a seguir:

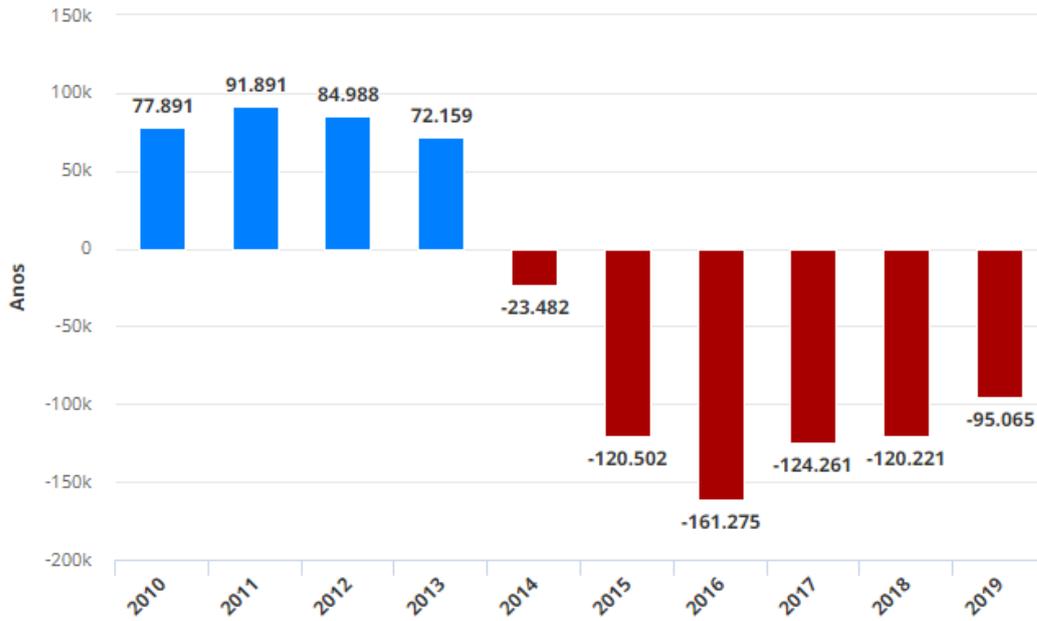


Figura 1.2: Resultado das Contas do Governo (em R\$ bilhões) - Elaboração: G1 (3) - Fonte: STN

Em suma, a dívida pública do Brasil vem crescendo. De acordo com o Relatório de Acompanhamento Fiscal publicado em 2018 pelo Instituto Fiscal Independente (IFI)¹ (4), tanto a dívida bruta geral do governo (DBGG), quanto a dívida líquida do setor público vêm crescendo acentuadamente desde o início de 2014 (setembro de 2015, no caso da DLSP²).

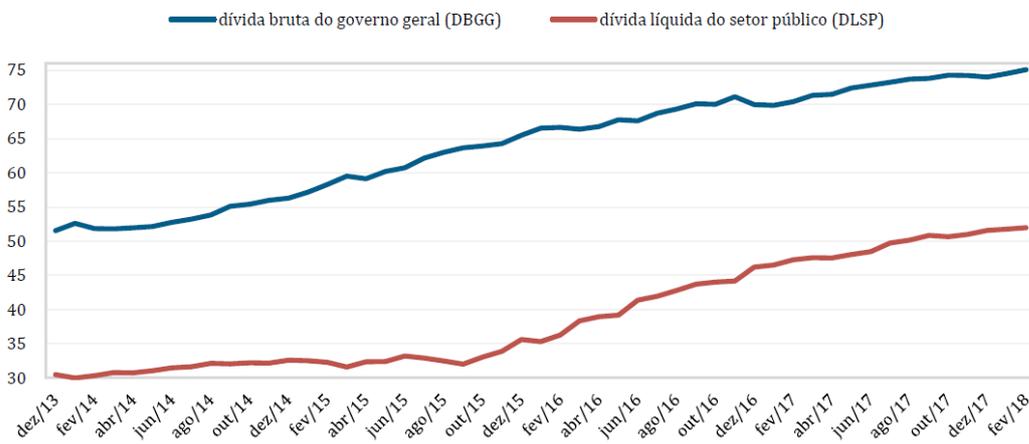


Figura 1.3: Evolução da Dívida Pública (% PIB) - Elaboração: IFI (4) - Fonte: BACEN

¹O Instituto Fiscal Independente é uma instituição do Senado Federal brasileiro que tem por objetivo ampliar a transparência das contas públicas.

²“A DLSP demorou mais tempo que a DBGG para subir por conta da desvalorização cambial ocorrida de julho de 2014 a setembro de 2015. Como aquele indicador de dívida é deduzido das reservas internacionais, no período de desvalorização, o valor em real das reservas subiu, compensando o efeito de outros fatores que atuavam para elevar a DLSP.” (4).

A maior parte dessa dívida é interna – em fevereiro de 2018 a dívida interna correspondia a 95,4% do total. E a maior parte dessa dívida interna, 68,8%, corresponde ao que chamamos de Dívida Pública Mobiliária Federal Interna (DPMFi)³, que é a dívida que o governo federal adquire ao vender títulos emitidos pelo Tesouro Nacional (TN) para o mercado doméstico. A segunda maior parte da dívida interna, 23,1%, é composta por operações compromissadas do Banco Central (BACEN), que são empréstimos tomados pelo BACEN lastreados em títulos de dívida do TN presentes na carteira do BACEN.

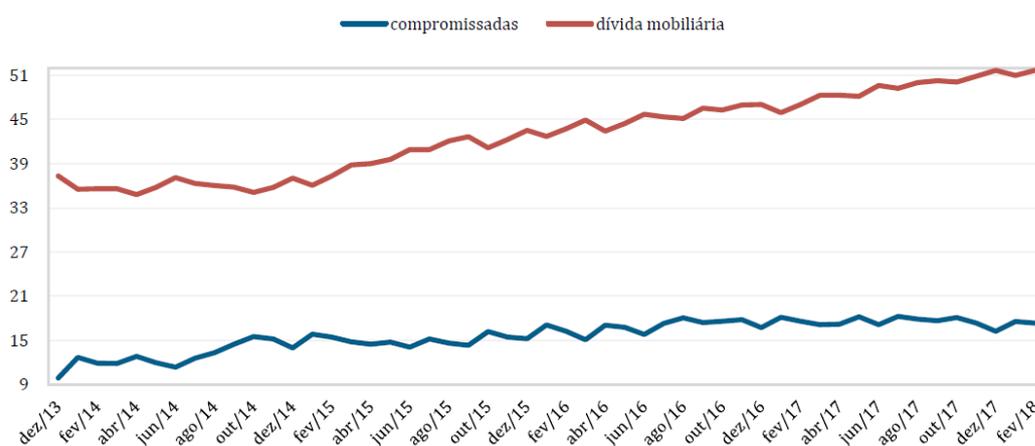


Figura 1.4: Dívida Mobiliária em Mercado e Saldo das Compromissadas (% PIB) - Elaboração: IFI(4) - Fonte: BACEN

Existem duas instituições estatais que negociam papéis da dívida pública do governo federal com o mercado, o TN e o BACEN, cada uma com finalidades diferentes. O TN faz o papel de autoridade fiscal, já o BACEN de autoridade monetária, a preocupação principal do Tesouro é a saúde fiscal do país e a do Banco Central é fazer política monetária.

Ao TN interessa se o governo pode pagar os custos da máquina pública, com esse objetivo emite títulos de dívida. Já o BACEN está preocupado essencialmente com questões que envolvem taxa de câmbio, taxa de juros e inflação (em alguns casos também há a preocupação com o nível de desemprego). Segundo Mauricio Leister (6), no passado o BACEN também tinha o poder de emitir títulos de dívida, entretanto agora apenas o TN pode emitir tais papéis⁴.

Os leilões de papéis de dívida do Tesouro, promovidos pelo TN e BACEN, podem objetivar, de acordo com o interesse da autoridade competente, a

³Segundo a STN (5): “Atualmente, toda a Dívida Pública Federal em circulação no mercado nacional é paga em real e captada por meio da emissão de títulos públicos”.

⁴O texto de Leister (6) discute quando o BACEN deve ser autorizado a emitir títulos próprios de dívida.

compra, venda ou troca de títulos. Entretanto, apesar de não terem os mesmos objetivos, as ações de uma instituição geram consequências nas políticas da outra. Assim, se o Tesouro resolve colocar à venda uma quantidade grande de títulos atraentes, pode ocorrer uma diminuição na liquidez do mercado, o que poderia causar um aumento da taxa de juros. Em outras palavras, a escassez do dinheiro faria com que sua disponibilidade para empréstimos diminuísse, e assim só quem estivesse disposto a pagar mais conseguiria obter dinheiro emprestado, podendo levar à deflação em um caso extremo.

Para remediar isso, o BACEN pode tomar uma série de medidas como comprar dólares do mercado para sua reserva, reduzir o montante que ele obriga aos bancos a deixarem depositados em uma conta no BACEN (os chamados compulsórios) ou ainda comprar títulos do Tesouro que estejam em circulação no mercado, essas alternativas servem para aumentar a liquidez do mercado. O inverso, evidentemente, também pode ocorrer caso a autoridade monetária busque diminuir a taxa de juros ou aumentar um pouco a inflação (podendo também desvalorizar o câmbio).

Por outro lado, políticas do BACEN podem ter impacto fiscal. Uma política monetária que eleve os juros praticados no mercado pode aumentar o custo da dívida do TN. Isso ocorre pois alguns desses papéis são indexados pela taxa Selic, como será visto na Seção 2.2. Ou seja, como afirmado antes, apesar de terem preocupações de natureza diferente, as políticas de uma instituição podem gerar consequências para a outra.

Entendidas essas diferenças e correlações, percebe-se que o Tesouro Nacional é a instituição que se preocupa, primordialmente, em maximizar o preço dos papéis a serem vendidos, de forma a reduzir o custo da dívida. Esse objetivo é percebido de forma mais clara nos leilões de venda, em que o Tesouro disponibiliza seus títulos recém emitidos no mercado. Reforçando essa ideia, Arupratan Daripa (7) destaca que uma visão prevalente sobre bancos centrais é que enquanto os Tesouros se concentram na receita do leilão, os bancos centrais se preocupam em guiar a política monetária.

O presente trabalho é motivado pela situação fiscal do país, e por isso irá analisar os leilões de venda de títulos promovidos pelo TN.

1.2

Proposta do Trabalho

Com o objetivo de analisar os leilões de venda de títulos públicos promovidos pelo TN, o Capítulo 2 faz uma análise detalhada da forma com que esses leilões ocorrem. Essa análise se inicia com a apresentação de dados

e regras presentes em lei, normativos, portarias e sites governamentais. Em seguida, na Seção 2.3, é proposto um exemplo simplificado do funcionamento de cada mecanismo de venda de título que o TN possui. Estes exemplos são o primeiro passo para introduzir o leitor, na Seção 2.4, a um modelo matemático original para o funcionamento dos leilões do TN. Esse modelo não leva em conta o comportamento e as possíveis estratégias dos licitantes diante das regras do leilão.

Na busca de estratégias razoáveis, no Capítulo 3 é feita uma revisão bibliográfica. A Seção 3.1 cita o desenvolvimento da Teoria dos Jogos. O conceito de equilíbrio de Nash é essencial para prever estratégias que serão adotadas por licitantes que buscam obter o melhor resultado para si próprios.

Já na Seção 3.2 é feita uma detalhada revisão bibliográfica de teoria de leilões. A Seção começa tratando do artigo seminal de William Vickrey (8), de 1961, que analisa leilões sob a hipótese de valores privados independentes. Destacam-se ainda, os trabalhos de Robert Wilson (9, 10, 11) que rompem com a hipótese de valores privados de Vickrey, introduzindo a hipótese de valor comum. Esse novo ponto de vista levou a considerar o conceito de maldição do vencedor. Ainda na Seção 3.2, são citados trabalhos como o de Paul Milgrom & Robert Weber (12) e o de Ken Binmore & Joe Swierzbinsk (13) que tratam, dentre outras coisas, de formas de se lidar com a maldição do vencedor.

Em seguida, são introduzidas as Subseções 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 que tratam de conceitos essenciais para a comparação entre leilões uniforme e discriminatório. Nessas Subseções, cabe destacar os trabalhos de Kerry Back & Jaime Zender (14, 15), David McAdams (16) e Ausbel *et al.*(17).

As Seções 3.3 e 3.4 tratam de textos que possuem contribuições mais específicas para leilões como o do TN. O trabalho comentado na Seção 3.3, “Teoria de Leilões do Tesouro” de Arupratan Daripa (7), é usado no Capítulo 4 para modelar o comportamento dos licitantes diante dos formatos discriminatório e uniforme de leilões. Nesse capítulo, é estabelecida a superioridade do leilão uniforme sobre o leilão discriminatório em termos de receita dada as regras do TN e as hipóteses de Daripa.

O Capítulo 4 não leva em conta algumas especificidades dos leilões do TN. Uma delas, o formato híbrido de leilão descrito matematicamente na Seção 2.4.3, é analisada no trabalho de Leopoldo Rodrigues & Maurício Bugarin (18). Esse trabalho, apresentado na Seção 3.4, destaca a vantagem de se utilizar a modalidade de leilão híbrido ao invés da tradicional.

Cabe ressaltar que as conclusões deste trabalho são teóricas. Existem trabalhos empíricos, como os de Steven R. Umlauf (19) e Daniel Heller & Yvan

Lengwiler (20), que analisam leilões de Tesouros de outros países e sustentam as principais conclusões desta dissertação. Este texto não tem a pretensão de fazer uma recomendação assertiva ao TN. Os resultados podem ser usados para auxiliar futuros estudos empíricos destinados a analisar leilões de venda.

2

Leilões de Venda do Tesouro Nacional

Conforme publicado no Diário Oficial da União¹, existe uma classe privilegiada no trato com o Tesouro quando o assunto é negociar títulos de dívida pública. As instituições que pertencem a essa classe são chamadas instituições *dealers*. Existem atualmente 12 *dealers* do TN. Estes se dividem em duas categorias: três devem ser corretoras ou distribuidoras² e nove vagas são destinadas para as demais instituições³ autorizadas a funcionar pelo BACEN. Duas instituições de um mesmo conglomerado financeiro não podem assumir vagas distintas. A lista de *dealers* do Tesouro no primeiro semestre de 2021 está na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Instituições Autorizadas a Atuar Como *dealer* Entre Fevereiro e Julho de 2021 - Elaboração Própria - Fonte: STN (22)

| Lista de instituições dealer | |
|------------------------------|---|
| Corretoras/Distribuidoras | Demais instituições financeiras |
| BGC Liquidez DTVM LTDA | Banco do Brasil S/A |
| Renascença DVTM LTDA | Banco Bradesco S.A. |
| XP Investimentos CCTVM S/A | Banco BTG Pactual S.A. |
| | Banco Santander (BRASIL) S.A. |
| | Banco Votorantim S.A. |
| | Bank of America Merrill Lynch Banco Múltiplo S.A. |
| | Caixa Econômica Federal |
| | Goldman Sachs do Brasil Banco Múltiplo S.A |
| | Itaú Unibanco S.A. |

Semestralmente, ocorre uma mudança na composição dos *dealers*. Uma instituição de cada categoria na tabela 2.1 é substituída por outra que estava de fora. Segundo (21), para uma instituição tornar-se *dealer*, são necessários alguns pré-requisitos:

- Ter um patrimônio mínimo de R\$ 26.250.000,00.
- Ter conduta no mercado financeiro considerada ética.
- TN e BACEN não vetarem o credenciamento por critérios próprios.

No mais, o que define se uma instituição pode tornar-se *dealer* é uma espécie de ranking dado por fatores indicados na tabela 2.2. Ao término de

¹Portaria Nº 431, de 7 de Agosto de 2020 (ver (21)).

²Uma “instituição financeira cuja denominação social enquadre se em corretora ou distribuidora, pertencente ou não a conglomerado financeiro com instituição bancária” (21).

³Essa é a categoria onde Bancos se enquadram.

cada período, as instituições não *dealers* que obtiverem maior pontuação neste ranking em cada categoria da tabela 2.1 tornam-se *dealers* no período seguinte, substituindo os *dealers* com a menor pontuação.

Tabela 2.2: Tabela Representando Critérios de Avaliação - Elaboração Própria - Fonte: DOU (21)

| Fator de Avaliação | Instituição | | | |
|---|-----------------------|-------------------------|--------------------|----------------------|
| | Candidata (Corretora) | Credenciada (Corretora) | Candidata (Demais) | Credenciada (Demais) |
| Atuação em sistema eletrônico de negociação | — | — | — | 20% |
| Operações definitivas | 100% | 80% | 60% | 10% |
| Operações definitivas dos objetos de negociação | — | — | — | 15% |
| Ofertas públicas | — | — | 40% | 35% |
| Relacionamento com a Codip | — | 20% | — | 20% |

Existem dois processos de venda de títulos da dívida pelo TN, os competitivos e os não competitivos. Vamos tratar deles separadamente. Podem participar diretamente dos leilões competitivos, apresentando propostas, todas as instituições regularmente habilitadas no Selic⁴. Outras pessoas físicas ou jurídicas só podem participar por intermédio dessas instituições. Já nos processos não competitivos apenas os *dealers* que cumprirem determinadas metas podem participar.

O processo de venda de títulos divide-se em duas fases. A primeira é a oferta pública (Ofpub), de natureza competitiva. A segunda, a oferta a *dealers* (Ofdealers), é restrita a *dealers* que cumprem certas metas⁵ e não é competitiva. Segundo (25),

As ofertas não competitivas fazem parte da estrutura de benefícios e obrigações do sistema de *dealers*. Quando se vende pelo menos 50% do lote ofertado no leilão, é possibilitado aos *dealers* comprarem uma quantidade predefinida do título de forma não competitiva (segunda volta). A cada *dealer* é determinado um percentual do volume ofertado na segunda volta, cujo índice é definido de acordo com sua avaliação objetiva⁶ como *dealer*.

Quando o TN não venderia mais de 50% de seus títulos numa oferta pública? Isso ocorre em dois casos, ambos associados a um mesmo fator: **o TN pode decidir, após receber os lances, não vender todo lote disponibilizado inicialmente na Ofpub, podendo inclusive cancelar**

⁴Em dezembro de 2018 havia 467 instituições cadastradas no Selic. Os bancos compunham a maior fatia, 34,7%, as distribuidoras de títulos e valores mobiliários (DTVM), 14,6%, e sociedades corretoras de títulos e valores mobiliários (CTVM), 13,9% (23).

⁵As metas estão especificadas na referência (24).

⁶Para um detalhamento maior dessa avaliação objetiva ver a referência (21).

o **leilão**. Caso os lances dados no leilão não correspondam a expectativa do TN, sendo interpretados como pouco competitivos, o TN pode fazer uso da prerrogativa de reduzir a oferta de títulos. O segundo caso é quando a demanda dos licitantes pelos títulos é menor que a oferta⁷.

Apesar da possibilidade de redução de oferta, o TN evita utilizar esse recurso, uma vez que a quantidade ofertada é um dado importante na preparação das propostas dos licitantes⁸.

2.1

Quais são os Tipos de Leilão

Os leilões são os principais processos de venda de títulos do TN. Leilões de venda são classificados por dois critérios: o primeiro é o valor a ser pago pelos licitantes vencedores, já o segundo critério é dado pelo volume máximo de títulos oferecido pelo TN.

Um mesmo leilão pode tratar de vários títulos diferentes. O volume máximo pode ser ou por cada tipo de título separadamente ou para uma cesta de títulos. Leilões se diferenciam com base no volume da oferta na maneira a seguir.

- **Leilão Tradicional** – O licitante conhece o volume disponível para venda de cada papel (mesmo tipo de título e mesmo vencimento) colocado em leilão;

- **Leilão Híbrido** – O licitante conhece a quantidade total de todos os títulos que serão colocados à venda. No leilão híbrido habitual, o TN oferece o mesmo tipo de título com datas de vencimento diferentes. Contudo, após ter em mãos os lances para cada tipo de papel, o Tesouro distribui o volume geral ofertado entre os diferentes papéis (com vencimentos diferentes) de acordo com sua conveniência (exemplo: maximizar lucro, alongar dívida, etc).

Segundo (18), não há diferenças para o Tesouro entre adotar o leilão tradicional ou o híbrido num contexto de informação perfeita. O formato

⁷Como os licitantes sabem que ao ofertar um valor muito abaixo do praticado no mercado o TN não aceitará o lance, é comum o licitante demandar menos do que a oferta total de títulos. Veja que se o licitante acreditasse que, ao oferecer uma fração de centavo por unidade de título, o Tesouro pudesse aceitar sua oferta, então não faria sentido haver falta de demanda.

⁸Se não o fosse, o TN poderia sempre anunciar um valor arbitrariamente grande de papéis, sabendo que a quantidade a ser aceita será menor do que a anunciada. Para que a oferta seja condizente com o “apetite do mercado”, o TN está sempre prospectando a demanda de seus maiores compradores. No caso dos *dealers*, a qualidade das respostas das prospecções é avaliada pelo “relacionamento com a Codip”, à luz da tabela 2.2.

híbrido mostra se superior no caso onde há informações imperfeitas quanto à demanda do mercado.

Para os dois tipos de leilões, o formato dos lances é padrão. Para cada papel colocado à venda, os licitantes enviam uma quantidade de lances. Caso o licitante seja *dealer*, ele pode enviar até sete lances, no contrário o limite é de três por papel. Cada lance é um par ordenado do tipo (**preço por unidade, quantidade demandada**), em que a quantidade é um múltiplo de 50 unidades.

O TN ordena os lances recebidos de forma decrescente de preços unitários licitados. A partir daí, soma as quantidades demandadas em cada lance seguindo o ordenamento até atingir o volume ofertado. Verifica se em que lance a demanda total supera a oferta. O **preço de corte** é o preço associado a esse lance. Todos os lances que oferecem preços maiores do que o preço de corte são integralmente contemplados. Descontado o volume correspondente aos lances integralmente contemplados do volume ofertado, obtemos a **oferta residual**⁹. Os lances que ofertarem o preço de corte são contemplados dividindo a oferta residual proporcionalmente ao volume demandado em cada um, respeitando o lote mínimo de 50 unidades¹⁰. Os dois tipos de leilões, tradicional e híbrido, têm o mesmo critério de seleção dos lances vencedores.

Após a seleção dos lances vencedores do leilão, há duas formas que o Tesouro utiliza para definir o valor do pagamento efetuado por cada vencedor.

- **Preços Múltiplos / Melhor Preço / Leilão Discriminatório** - Cada licitante paga exatamente o valor correspondente a seus lances contemplados.

- **Preço Único / Menor Preço Vencedor / Leilão Uniforme** - Aqui, todos pagam, por unidade arrematada, o preço de corte do leilão.

O leilão termina aqui quando não há uma segunda volta, isto é, quando menos da metade dos títulos oferecidos é vendida. Só *dealers* que cumprem as metas estipuladas pelo TN participam da segunda volta. O volume de títulos vendidos na segunda volta é escolhido pelo TN e é anunciado no início do leilão.

As regras da segunda volta dependem do tipo de leilão da primeira. Se a primeira volta é um leilão uniforme, o preço cobrado pelo TN por papel na segunda volta é exatamente o preço de corte da primeira, que é igual ao valor unitário pago por todos os vencedores na etapa competitiva.

⁹Alguns lances cujo preço é igual ao preço de corte podem estar ainda abaixo do volume ofertado, mas ainda não estão contemplados.

¹⁰Ninguém pode receber uma quantidade que não seja múltipla de 50 no leilão.

Já no caso de leilão discriminatório, cobra-se o preço médio pago por título na primeira volta¹¹.

Terminamos aqui a descrição do mecanismo dos leilões de venda do TN. Informações de leilões de venda recentes do Tesouro Nacional podem ser encontrados no anexo A, cujos dados estão disponíveis nas referências (26) e (27).

2.2

Quais as Diferenças Entre os Papéis?

Existem três características principais que distinguem os títulos públicos: indexador, cupom de juros e data do vencimento. O **indexador** é uma taxa que corrige o valor do papel levando em conta todo o rendimento até a data de vencimento do título, que é o momento do pagamento ao seu portador. O indexador pode ser uma taxa pré-fixada, por exemplo 10% ou variável, como por exemplo o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O **cupom de juros**, diferentemente do indexador, é uma taxa paga em períodos menores, frequentemente semestrais, que o vencimento do título. Por fim, a **data de vencimento** é a data em que o portador do título deverá trocá-lo por dinheiro novamente junto ao TN. Vale destacar também que o termo período de maturação é usado para se referir ao tempo compreendido entre a data de emissão do título e sua data de vencimento.

Atualmente, o TN faz ofertas públicas de 4 tipos de títulos: Letras do Tesouro Nacional (LTN), Notas do Tesouro Nacional - Série F (NTN-F), Letras Financeiras do Tesouro (LFT) e por fim as Notas do Tesouro Nacional - Série B (NTN-B). Cada um desses títulos possuem características diferentes e despertam interesses de compradores por motivos diversos. Em particular, para o primeiro trimestre de 2021, as características dos títulos estão sintetizadas na tabela abaixo.

¹¹Nesse caso, é possível que um *dealer* que tenha pago um valor superior aos demais deseje se aproximar do preço médio pago pelos outros. Para alcançar esse objetivo, ele pode comprar papéis na segunda volta. Da mesma forma, um *dealer* que tiver dado um lance muito baixo, de forma a não satisfazer sua demanda na primeira volta, pode usar a segunda para comprar mais papéis.

Tabela 2.3: Características dos Títulos do Tesouro - Elaboração Própria - Fonte: STN (28) e (29).

| Título | Indexador | Tipo de Leilão (Preço) | Tipo de Leilão (Oferta) | Maturação | cupom |
|--------|------------|------------------------|-------------------------|-------------------|--------------------------------|
| LTN | Pré-Fixado | Discriminatório | Tradicional | de 6 até 48 meses | Não há |
| NTN-F | Pré-Fixado | Discriminatório | Tradicional | de 6 até 10 anos | 10% ao ano pago semestralmente |
| NTN-B | IPCA | Uniforme | Tradicional | de 1 até 6 anos | 6% ao ano pago semestralmente |
| LFT | Selic | Uniforme | Híbrido | de 3 até 40 anos | Não há |

Duas observações são oportunas:

1. Até 2020 os leilões de NTN-B eram feitos com preço uniforme na modalidade híbrida. Por força de um comunicado da Secretaria de Tesouro em 2021 (28), o leilão de NTN-B passou a ocorrer na modalidade tradicional.
2. Em alguns contextos, os títulos apresentados nesta seção recebem outros nomes, com o intuito de deixar mais claro para o investidor suas características.
 - **NTN-F** - Tesouro Prefixado com Juros Semestrais
 - **NTN-B** - Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais
 - **LTN** - Tesouro Prefixado
 - **LFT** - Tesouro Selic

2.3

Um leilão com poucos licitantes e poucos lances

Consideramos três *dealers* (d_1, d_2, d_3) e três outras instituições (e_1, e_2, e_3). Vamos supor que cada *dealer* envia até três propostas e as demais companhias enviam apenas um lance. Os exemplos serão divididos nos formatos: tradicional discriminatório, tradicional uniforme e híbrido uniforme. Por concisão, vamos também supor que os lances dados por cada licitante sejam iguais em cada um dos formatos tradicionais. Além disso, vamos aproveitar estes mesmos lances para o primeiro tipo de papel do leilão híbrido. Mais ainda, fixamos o valor de face do título em 1000 reais. Assim, os lances são sempre inferiores a esse valor. Como exigido, a quantidade (ou volume) proposta em cada lance deve ser múltipla de 50 unidades. Por fim, são colocados à venda 650 papéis e o Tesouro vende todos eles.

Vamos considerar dois tipos de papéis à venda no leilão híbrido, os quais vamos denominar de Híbrido I e Híbrido II. Os lances de cada licitante – pares (preço, quantidade) – estão descritos na tabela 2.4.

O formato do leilão é importante na hora de formular lances. O exemplo não leva isso em conta, por isso ele deve ser utilizado apenas para fins de entendimento geral do funcionamento de cada mecanismo de venda do TN separadamente.

Tabela 2.4: Lances do Exemplo

| Licitante | Tradicional/Híbrido I | | | Híbrido II | | |
|-----------|-----------------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| | Lance 1 | Lance 2 | Lance 3 | Lance 1 | Lance 2 | Lance 3 |
| d_1 | (950, 150) | (930, 200) | (910, 300) | (850, 100) | (800, 200) | — |
| d_2 | (930, 300) | (900, 100) | — | (900, 200) | (870, 300) | — |
| d_3 | (900, 300) | — | — | (950, 150) | — | — |
| e_1 | (935, 200) | — | — | (920, 50) | — | — |
| e_2 | (930, 100) | — | — | (940, 100) | — | — |
| e_3 | (890, 300) | — | — | (940, 50) | — | — |

O primeiro passo é ordenar os lances em ordem não crescente (decrecente no sentido lato) de preço:

Tradicional/Híbrido I

$$(950, 150), (935, 200), (930, 200), (930, 300), (930, 100), (910, 300), (900, 100), (900, 300), (890, 300) \quad (2-1)$$

Híbrido II

$$(950, 150), (940, 100), (940, 50), (920, 50), (900, 200), (870, 300), (850, 100), (800, 200) \quad (2-2)$$

A continuação depende do tipo de leilão adotado, como veremos a seguir.

2.3.1

Leilões Tradicionais

No leilão tradicional, só interessam os lances presentes em (2-1) acima e a ordem que estabelecemos. Assim, o primeiro lance contemplado é (950, 150) submetido por d_1 . Para os demais lances, restam $650 - 150 = 500$ unidades. O

próximo lance, contemplado, é o $(935, 200)$, submetido por e_1 , e o volume a arrematar agora é $500 - 200 = 300$ unidades. Os próximos três lances na ordenação propõem um mesmo preço, 930 reais, e a soma dos volumes demandados em cada lance é igual a 600 unidades, que é mais do que o volume disponível (300 unidades). Nas palavras da seção 2.1, o preço de corte é 930 reais e o volume residual é 300. As últimas unidades devem ser distribuídas proporcionalmente aos volumes propostos ao preço de $R\$930,00$. O lance $(930, 100)$ de e_2 é contemplado com uma quantidade correspondente a um sexto de 300, isto é, 50 unidades, o lance $(930, 200)$ garante ao licitante d_1 100 unidades e o lance $(930, 300)$ garante a d_2 150 papéis. A tabela abaixo enumera os volumes arrematados.

Tabela 2.5: Seleção de Propostas no Modelo Tradicional

| Tradicional | | | | | |
|-------------|------------|------------|------------|------------------------------|----------------------------|
| Licitante | Lance 1 | Lance 2 | Lance 3 | Lances Aceitos Integralmente | Volume Residual Arrematado |
| d1 | (950, 150) | (930, 200) | (910, 300) | (950, 150) | 100 |
| d2 | (930, 300) | (900, 100) | — | — | 150 |
| d3 | (900, 300) | — | — | — | — |
| e1 | (935, 200) | — | — | (935, 200) | — |
| e2 | (930, 100) | — | — | — | 50 |
| e3 | (890, 300) | — | — | — | — |

Falta ainda estabelecer quanto cada licitante paga, o que depende se o leilão é discriminatório ou uniforme.

2.3.1.1

Formato Discriminatório

No caso discriminatório, a tabela 2.6 mostra o resultado de cada licitante.

Tabela 2.6: Exemplo - Leilão Tradicional (Discriminatório)

| Tradicional - Discriminatório | | | | | | |
|-------------------------------|--|--|--|---------------------|------------------|----------------|
| Licitante | Quantidade Contemplada por R\$950,00 | Quantidade Contemplada por R\$935,00 | Quantidade Contemplada por R\$930,00 | Preço Médio Pago | Volume Obtido | Total a Pagar |
| d1 | 150 | 0 | 100 | R\$ 942,00 | 250 | R\$ 235.500,00 |
| d2 | 0 | 0 | 150 | R\$ 930,00 | 150 | R\$ 139.500,00 |
| d3 | 0 | 0 | 0 | R\$ - | 0 | R\$ - |
| e1 | 0 | 200 | 0 | R\$ 935,00 | 200 | R\$ 187.000,00 |
| e2 | 0 | 0 | 50 | R\$ 930,00 | 50 | R\$ 46.500,00 |
| e3 | 0 | 0 | 0 | R\$ - | 0 | R\$ - |
| Total | 150 | 200 | 300 | R\$ 936,15 | 650 | R\$ 608.500,00 |

Na linha denominada “Total”, vê-se que o TN recebe em média R\$936,15 por papel vendido. Além disso, sua receita total é igual a R\$608.500,00. A situação permite uma segunda volta.

Após esse resultado, ocorre uma segunda etapa de negociação que chamamos de segunda volta do leilão, nesse exemplo, os *dealers* d_1 , d_2 e d_3 que quiserem comprar títulos podem participar dessa etapa para comprar mais papéis. O valor que cada um deve pagar por papel nessa etapa é igual a R\$936,15, sendo a média dos valores pagos na primeira etapa. Além disso, conforme a citação que antecede a seção 2.1, o volume que cada um tem acesso nesse momento depende do cumprimento de metas individuais. Sendo assim, d_3 que não conseguiu comprar títulos na primeira volta, poderia comprar na segunda volta alguns títulos por R\$936,15. Por outro lado, e_3 não consegue mais comprar estes títulos diretamente do Tesouro, restando a ele apenas a possibilidade de comprar esses títulos no mercado secundário.

2.3.1.2 Formato Uniforme

A tabela 2.7 traz os resultados para cada licitante no formato tradicional do leilão uniforme.

Tabela 2.7: Exemplo - Resultado do Leilão Uniforme (Tradicional)

| Tradicional - Uniforme | | | |
|------------------------|---------------------------|------------------------|----------------|
| Licitante | Quantidade Contemplada | Preço Unitário Pago | Total a Pagar |
| d1 | 250 | R\$ 930,00 | R\$ 232.500,00 |
| d2 | 150 | R\$ 930,00 | R\$ 139.500,00 |
| d3 | 0 | R\$ - | R\$ - |
| e1 | 200 | R\$ 930,00 | R\$ 186.000,00 |
| e2 | 50 | R\$ 930,00 | R\$ 46.500,00 |
| e3 | 0 | R\$ - | R\$ - |
| Total | 650 | R\$ 930,00 | R\$ 604.500,00 |

O leiloeiro (o TN) vende 650 títulos por um montante de 604500 reais, e o preço recebido por cada título é o mesmo e corresponde a 930 reais.

Novamente é permitido ao *dealer* que tenha cumprido suas metas obter um volume extra de títulos. O valor pago por unidade é igual ao valor médio pago na primeira etapa de negociação, ou seja, R\$930,00.

2.3.2

Leilão Híbrido - Uniforme

O TN não usa o leilão híbrido discriminatório na venda de títulos.

Vamos considerar um leilão envolvendo dois papéis diferentes. No início do leilão, o TN anuncia apenas o volume total dos dois títulos, nesse caso 650 unidades, sem discriminar a quantidade de cada um. A quantidade de cada título que será vendida é decidida pelo Tesouro após ter em mãos todos os lances dos participantes. A forma que cada licitante dá seus lances é descrita na tabela 2.4 no início da seção 2.3.

Vamos supor que o Tesouro queira maximizar a receita total. Ordenam-se juntamente os lances, ainda que cada lance especifique o tipo de papel. No exemplo, os lances com preços superiores ao de corte do caso tradicional (R\$930,00) são

$$(950, 150), (950, 150), (940, 100), (940, 50), (935, 200) \quad (2-3)$$

Como a soma desses é igual ao lote ofertado (650 unidades), cada um recebe a quantidade proposta em seu lance. O lance de menor preço aceito pelo papel I é o (935, 200) enviado por e_1 , e o lance de menor preço aceito pelo papel II é o (940, 50) enviado por e_3 . A tabela 2.8 resume o resultado do leilão híbrido.

Tabela 2.8: Exemplo - Resultado do Leilão Uniforme (Híbrido)

| Híbrido - Uniforme | | | | | | |
|--------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------------------------|-------------------------|----------------|--|
| Licitante | Quantidade Contemplada do Papel I | Preço Unitário Papel I | Quantidade Contemplada do Papel II | Preço Unitário Papel II | Total a Pagar | |
| d1 | 150 | R\$ 935,00 | 0 | R\$ - | R\$ 140.250,00 | |
| d2 | 0 | R\$ - | 0 | R\$ - | R\$ - | |
| d3 | 0 | R\$ - | 150 | R\$ 940,00 | R\$ 141.000,00 | |
| e1 | 200 | R\$ 935,00 | 0 | R\$ - | R\$ 187.000,00 | |
| e2 | 0 | R\$ - | 100 | R\$ 940,00 | R\$ 94.000,00 | |
| e3 | 0 | R\$ - | 50 | R\$ 940,00 | R\$ 47.000,00 | |
| Total | 350 | R\$ 935,00 | 300 | R\$ 940,00 | R\$ 609.250,00 | |

O leiloeiro (Tesouro) vende todos os 650 títulos por um montante de 609250 reais, e o preço unitário recebido por cada um dos 350 títulos do tipo I vendidos é R\$935,00 e por cada um dos 300 do tipo II vendidos é R\$940,00.

Após esse resultado, ocorre uma segunda rodada de negociação onde é permitido ao *dealer* que queira comprar mais títulos obter um volume extra de cada papel – a depender do cumprimento de suas metas individuais. Nessa etapa, o preço a ser pago pelo papel do tipo I é R\$935,00 e pelo do tipo II é R\$940,00.

2.4

Modelo para o Funcionamento dos Leilões do TN

O modelo matemático proposto nesta seção não leva em conta as características específicas de cada tipo de papel: a análise concentra-se apenas na mecânica da negociação entre TN e licitantes. O modelo servirá como ponto de partida para o estudo de estratégias dos licitantes na seção 4.

Considere uma quantidade S de lotes padrão de títulos colocados, inicialmente, à venda pelo TN em uma oferta pública. O valor de face de cada título é igual a R\$1000,00, tendo em vista o lote de padrão de 50 unidades, cada lance (*bid*) b é um par ordenado preço-quantidade, (p, q) , onde $0 \leq p \leq 5000$, $0 \leq q \leq S$. Nesse contexto, q é a quantidade de lotes padrão demanda no lance e p é o preço ofertado por cada lote no lance.

Sejam d_1, d_2, \dots, d_{12} os *dealers*. Considere também γ participantes e_1, \dots, e_γ que não são *dealers*.

Conforme as normas do leilão, cada *dealer* d_i envia 7 lances e cada um dos demais competidores e_i envia 3 lances, totalizando $84 + 3\gamma$ lances.

Pelas regras do leilão, O TN ordena os lances $b_1, \dots, b_{84+3\gamma}$ de modo que, se $i > j$, então $p_i \geq p_j$. Por conveniência teórica, o TN anexa à lista ordenada dois lances extremos, $b_0 = (5000, 0)$ e $b_{3\gamma+85} = (0, S)$.

Definimos um **índice de referência provisório**

$$I_p = \max\{j \in \{0, \dots, 3\gamma + 85\} \mid \sum_{i=0}^j q_i < S\} .$$

Em palavras, o lance b_{I_p+1} disputaria o último lote ofertado com os demais lances que apresentam preço p_{I_p+1} , caso a oferta S não seja alterada.

A ordenação é ambígua, no sentido que não há maneira de distinguir dois lances com o mesmo preço. Ainda assim, I_p é bem definido, assim como $I_p + 1$, uma vez acrescentado o extremo $(0, S)$.

Nesse momento do leilão, o TN decide se quer reduzir a oferta inicial S , passando a trabalhar com uma nova oferta S' , $0 \leq S' \leq S$. A nova oferta leva a um **índice de referência** I_r ,

$$I_r = \max\{j \in \{0, \dots, 3\gamma + 85\} \mid \sum_{i=0}^j q_i < S'\} .$$

Cada b_k com $p_k < p_{I_r+1}$ é contemplado integralmente. Vamos supor que existem $m \in [0, 3\gamma + 84]$ lances (de licitantes) contemplados integralmente. O **volume residual** S_r é

$$S_r = S' - \sum_{i=1}^m q_i .$$

O volume residual S_r deve ser distribuído, respeitando o lote mínimo de 50 unidades, para os n lances $b_{\alpha+1}, \dots, b_{\alpha+n}$ que ofertem o preço $p_{(I_r+1)}$ (o **preço de corte** do leilão). A quantidade $\tilde{q}_{\alpha+i}$ que cada lance $b_{\alpha+i}$ arremata é

$$\tilde{q}_{\alpha+i} = \left\lfloor \frac{q_{\alpha+i}}{\sum_{j=1}^n q_{\alpha+j}} \times S_r \right\rfloor , \quad (2-4)$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

Resumindo os arremates:

- Se $p_i > p_{(I_r+1)}$, então b_i arremata q_i lotes

- Se $p_i = p_{(I_r+1)}$, então b_i arremata $\tilde{q}_{\alpha+i} = \left\lfloor \frac{q_{\alpha+i}}{\sum_{j=1}^n q_{\alpha+j}} \times S_r \right\rfloor$ lotes
- Se $p_i < p_{(I_r+1)}$, então b_i arremata 0 lotes

O volume total vendido pelo Tesouro S^* , em lotes padrão, é

$$S^* = S' - S_r + \sum_{j=1}^n \tilde{q}_{\alpha+j} . \quad (2-5)$$

2.4.1

Leilão Discriminatório (Tradicional)

Para cada lance b_i aceito parcial ou integralmente, o licitante remetente deve pagar por unidade arrematada no lance o valor p_i . Sendo assim, a receita R_D obtida pelo Tesouro até aqui é

$$R_D = \left(\sum_{i=1}^{I_r} (p_i \cdot q_i) \right) + \sum_{j=1}^n \tilde{q}_{\alpha+j} \cdot p_{I_r+1} . \quad (2-6)$$

Passamos a modelar a segunda volta do leilão. A partir de agora é importante distinguir entre lances de *dealers* e não *dealers*.

- Dados $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $j \in \{1, \dots, 12\}$ e $i \in \{1, \dots, 7\}$, denominamos $b_{id_j} = (p_{id_j}, q_{id_j})$ o i -ésimo lance do *dealer* d_j .
- Dados $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $j \in \{1, \dots, \gamma\}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$, denominamos $b_{ie_j} = (p_{ie_j}, q_{ie_j})$ o i -ésimo lance de não *dealer* e_j .

Vamos supor que todos os *dealers* d_i cumpriram as metas necessárias para participarem da segunda volta. Para cada d_i é ofertada uma quantidade fixa de lotes Z_i (conforme a citação que antecede a seção 2.1) de títulos com as mesmas características dos papéis da primeira etapa. Nessa etapa, o preço p_{Ds} a ser pago por lote é fixo e comum a todos os *dealers*,

$$p_{Ds} = \frac{R_D}{S^*} . \quad (2-7)$$

Cabe a cada d_i decidir qual quantidade $q_{si} \leq Z_i$ ele deseja comprar. Ao final das duas voltas, a quantidade de lotes \bar{q}_{d_i} arrematados pelo *dealer* i é

$$\bar{q}_{d_i} = \sum_{p_{kd_i} > p_{I_r+1}} q_{kd_i} + \sum_{p_{kd_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{kd_i} + q_{si} , \quad (2-8)$$

onde \tilde{q}_{kd_i} foi definido na equação (2-4).

Num leilão discriminatório, o preço médio $A_{d_i}^D$ pago por d_i por cada lote é

$$A_{d_i}^D = \frac{\sum_{p_{kd_i} > p_{I_r+1}} q_{kd_i} p_{kd_i} + \sum_{p_{kd_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{kd_i} p_{\lambda+1} + q_{si} p_{ds}}{\bar{q}_{d_i}} . \quad (2-9)$$

Para calcular o ganho que cada *dealer* teve com o leilão, é necessário estimar o valor do título para o participante, que definimos como sendo o preço de venda de 50 papéis no mercado secundário de títulos. Esse valor v é comum a todos os participantes após o encerramento do leilão. Assim, o lucro (*pay-off*) π_{d_i} é

$$\pi_{d_i} = (v - A_{d_i}^D) \times \bar{q}_{d_i} . \quad (2-10)$$

As variáveis definidas para *dealers* têm suas contrapartidas para não *dealers*, com a única ressalva de que esses licitantes não participam da segunda volta. Definimos em (2-11) a quantidade arrematada \bar{q}_{e_i} ao fim do leilão, o preço médio pago por lote $A_{e_i}^D$ em (2-12) e o lucro π_{e_i} em (2-13) de cada um dos e_i 's,

$$\bar{q}_{e_i} = \sum_{p_{ke_i} > p_{I_r+1}} q_{ke_i} + \sum_{p_{ke_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{ke_i} . \quad (2-11)$$

$$A_{e_i}^D = \frac{\sum_{p_{ke_i} > b_{I_r+1}} q_{ke_i} p_{ke_i} + \sum_{p_{ke_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{ke_i} p_{I_r+1}}{\bar{q}_{e_i}} . \quad (2-12)$$

$$\pi_{e_i} = (v - A_{e_i}^D) \times \bar{q}_{e_i} . \quad (2-13)$$

A receita arrecadada pelo TN no leilão ao final das voltas é

$$\begin{aligned} R_{Df} = & \sum_{p_{kd_i} > p_{I_r+1}} q_{kd_i} p_{kd_i} + \sum_{p_{kd_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{kd_i} p_{I_r+1} + q_{si} p_{Ds} \\ & + \sum_{p_{ke_i} > b_{I_r+1}} q_{ke_i} p_{ke_i} + \sum_{p_{ke_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{ke_i} p_{I_r+1} . \end{aligned} \quad (2-14)$$

2.4.2

Leilão Uniforme (Tradicional)

Nesta modalidade de leilão, para cada lance b_i aceito (parcial ou integralmente), o licitante remetente deve pagar por lote arrematado no lance o valor p_{I_r+1} (aqui desconsideramos o caso extremo onde não há como destinar ao menos um lote inteiro para cada lance que oferta o preço p_{I_r+1} , nesse caso extremo o preço a ser pago, por lote arrematado, seria p_{I_r}). A receita R_U obtida pelo Tesouro na primeira volta é

$$R_U = S^* \cdot p_{I_r+1} . \quad (2-15)$$

Novamente, após essa fase, é permitido que cada d_i participe de uma segunda volta. Como antes, para cada d_i é ofertada uma quantidade fixa de lotes Z_i de títulos que são idênticos aos da primeira etapa. Entretanto, nessa etapa o preço p_{U_s} a ser pago por lote, é o mesmo da primeira volta,

$$p_{Us} = p_{(I_r+1)} . \quad (2-16)$$

Aqui d_i escolhe a quantidade $q_{si} \leq Z_i$ a comprar.

A forma de calcular as quantidades de lotes arrematados por participante \bar{q}_{e_i} e \bar{q}_{d_i} é a mesma do discriminatório. Entretanto, os preços médios e lucros dependem do preço a ser pago por lance e por isso a forma de se calcular é diferente. Em (2-17) definimos o preço médio $A_{d_i}^U$ do *dealer* d_i e seu lucro π_{Ud_i} em (2-18):

$$A_{d_i}^U = \frac{\sum_{p_{kd_i} > p_{I_r+1}} q_{kd_i} p_{I_r+1} + \sum_{p_{kd_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{kd_i} p_{I_r+1} + q_{si} p_{I_r+1}}{\bar{q}_{d_i}} . \quad (2-17)$$

$$\pi_{Ud_i} = (v - A_{d_i}^U) \times \bar{q}_{d_i} . \quad (2-18)$$

Da mesma forma, para o não *dealer* e_i o preço médio $A_{e_i}^U$ pago por lote e seu lucro π_{Ue_i} com a aquisição dos papéis é

$$A_{e_i}^U = \frac{\sum_{p_{ke_i} > p_{I_r+1}} q_{ke_i} p_{I_r+1} + \sum_{p_{ke_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{ke_i} p_{I_r+1}}{\bar{q}_{e_i}} . \quad (2-19)$$

$$\pi_{Ue_i} = (v - A_{e_i}^U) \times \bar{q}_{e_i} . \quad (2-20)$$

Por fim, a receita final do leilão uniforme é

$$\begin{aligned} R_{uf} = & \sum_{p_{kd_i} > p_{I_r+1}} q_{kd_i} p_{I_r+1} + \sum_{p_{kd_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{kd_i} p_{I_r+1} + q_{si} p_{I_r+1} \\ & + \sum_{p_{ke_i} > p_{I_r+1}} q_{ke_i} p_{I_r+1} + \sum_{p_{ke_i} = p_{I_r+1}} \tilde{q}_{ke_i} p_{I_r+1} . \end{aligned} \quad (2-21)$$

2.4.3

Leilão Uniforme (Híbrido)

Neste modelo, existem diferentes papéis sendo colocados à venda simultaneamente. Em geral, trata-se de um mesmo tipo de título com vencimentos diferentes. Vamos supor títulos de tipo 1 e 2. Manteremos as mesmas condições definidas no início da seção 2.3, com uma única diferença: a quantidade total de lotes ofertados S é dividida por tipo de título, $S = S_1 + S_2$. O TN só anuncia S_1 e S_2 após o recebimento de todos os lances. Desta forma, nenhum licitante conhece S_1 e S_2 no momento que envia seus lances.

Além disso, cada d_i propõe 7 lances para tipo de papel, já cada e_i propõe 3. O TN ordena os lances dos competidores por cada tipo de papel da mesma forma que no modelo tradicional, obtendo duas ordenações distintas,

- Títulos do tipo 1: $b_1^1, b_2^1 \dots b_{(3\gamma+84)}^1$
- Títulos do tipo 2: $b_1^2, b_2^2 \dots b_{(3\gamma+84)}^2$

Determinados S_1 e S_2 , o leilão se divide em dois leilões independentes, com índices de referência I_{r1} e I_{r2} e demandas residuais S_{r1} , S_{r2} . A partir daí, a forma de se proceder em cada problema é exatamente igual a da seção 2.4.2. Além disso, se mais de 50% de S é vendido ocorre segunda volta para ambos os papéis.

3

Revisão Bibliográfica

O presente capítulo tem por objetivo fazer uma revisão da literatura de trabalhos que trouxeram contribuições, em especial teóricas, para o estudo de leilões como do TN. Inicialmente, será feita uma breve revisão de Teoria dos Jogos, para em seguida analisar diversos textos que, desde a década de 1960, buscaram estudar especificamente leilões.

O artigo de Arupratan Daripa (7), dentre todos os outros, se mostrou possuir características mais compatíveis com a formato de negociação que o TN utiliza, adequando-se melhor ao modelo desenvolvido na Seção 2.4. Ainda assim, Daripa não analisa o formato híbrido de leilão e tampouco leva em conta a possível segunda volta. Leilões híbridos são analisados no artigo de Leopoldo Rodrigues & Maurício Bugarin (18). O impacto de uma segunda volta não competitiva dos leilões do TN não é tratado em nenhum dos trabalhos analisados nesse capítulo.

O capítulo também busca contextualizar o leitor de certos aspectos da Teoria de Leilões, principalmente, a oferta de múltiplas unidades simultâneas disputadas por lances fechados/selados, além de considerar quais formatos de leilões, dentre os apresentados no Capítulo 2, em teoria, poderiam trazer mais vantagens para o TN.

Na discussão dos modelos de Teoria de Leilões é importante conhecer os conceitos de *ex ante*, *interim* e *ex post*.

- ▶ O termo latino *ex ante* é usado para se referir a um momento anterior a um evento que carrega consigo alguma incerteza. Por exemplo, quando se fala de leilões, *ex ante* é todo período que antecede o envio dos lances. Neste período os participantes fazem projeções, elaboram estratégias, criam expectativas sobre como será o decorrer do leilão e sobre o que acontecerá após seu fim.
- ▶ O termo latino *ex post* é usado para se referir a um momento em que as análises são feitas com base em um acontecimento já ocorrido. Análises *ex post* utilizam informações reveladas após um período de incertezas. Assim, a análise *ex post* é empregada para estudar as consequências de decisões já tomadas.

- ▶ O termo *interim* refere-se a um período entre o *ex ante* e o *ex post*. Nesse período, a análise pode considerar como dada algumas informações que *ex ante* não são conhecidas, mas não aquelas que são conhecidas *ex post*.

3.1

Contribuições para o Embasamento da Teoria de Leilões

Um dos aspectos a analisar quando estudamos leilões é a forma pela qual os participantes elaboram suas estratégias. O estudo de estratégia em jogos competitivos e cooperativos ganhou destaque com o advento da Teoria dos Jogos. Segundo Alessandra Almeida (30),

A teoria dos jogos tem a finalidade de prever os movimentos dos outros jogadores, sejam eles concorrentes ou aliados. Através dessa teoria os jogadores se posicionam da melhor forma para obter o resultado desejado. O objetivo da teoria dos jogos é entender a lógica na hora da decisão e ajudar a responder se é possível haver colaboração entre os jogadores, em quais circunstâncias o mais racional é não colaborar e quais estratégias devem ser adotadas para garantir a colaboração entre os jogadores.

Ainda segundo Almeida, vários autores contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria. Dentre eles, destacam-se o matemático e economista francês Antoine Augustin Cournot que estudou pontos de equilíbrio de jogos, o matemático húngaro John von Neumann que provou que há sempre uma solução racional para um conflito entre dois indivíduos com interesses divergentes (teorema do minimax), o matemático norte-americano John Forbes Nash Jr¹, que generalizou os estudos de Cournot para além do caso especial dos jogos de soma zero. Leilões buscam criar o máximo de valor possível e por isso não são jogos de soma zero. A contribuição de Nash foi importantíssima para que fosse possível fazer uma análise rigorosa de leilões.

Robert Aumann & Lloyd Shapley (31) afirmam que há dois conceitos gerais de soluções em teoria dos jogos: cooperativos e não-cooperativos. O primeiro emprega-se em casos onde há confiança entre os licitantes, ou quando é possível punir aqueles que desrespeitarem a estratégia previamente combinada. O segundo conceito, deve ser utilizado em casos onde há falta de confiança entre os competidores ou quando não há mecanismos de coação ou coerção para evitar o não cumprimento da estratégia combinada coletivamente.

Segundo Luciano de Castro & Daniel Karney (32), o equilíbrio de Nash é mais do que simplesmente um conceito de solução, ele é também a

¹Prêmio Nobel de Economia em 1994.

suposição mais aceita para embasar metodologias usadas por pesquisadores que visam estudar o comportamento de licitantes em leilões. Essa suposição, ou paradigma, permite que pesquisadores se concentrem em um comportamento que pode ser considerado estável e razoável e, a partir daí, é possível fazer previsões. Assim, o equilíbrio de Nash fornece uma combinação poderosa entre a estrutura matemática necessária para estudar jogos complexos e as conclusões econômicas derivadas da análise.

Ainda segundo de Castro & Karney (32), o equilíbrio de Nash permite uma previsão concisa de estratégias que são estáveis do ponto de vista de cada jogador. Em um equilíbrio de Nash, nenhum jogador pode obter resultado melhor mudando apenas a própria estratégia. Tal estabilidade é essencial para uma análise econômica mais profunda. A análise de equilíbrios instáveis é muito menos informativa.

O equilíbrio de Nash é um resultado ótimo *ex post*, *ex ante* pode ser difícil que todos os jogadores escolham estratégias correspondentes a um mesmo equilíbrio de Nash. Até mesmo calcular estratégias que levem a um equilíbrio de Nash pode ser muito complexo, e mesmo que um jogador “faça sua parte”, se outros não seguirem as estratégias individuais correspondentes, a estratégia calculada deixa de levar a esse equilíbrio de Nash, passando a ser subótima.

Peter Herings & Ronald Peeters (33), citando Andrew McLennan (34), ressaltam que o número de equilíbrios de Nash em um problema cresce muito rápido com o número de estratégias possíveis e a quantidade de participantes. Em um jogo que possui 4 agentes, em que cada um deles possui 6 estratégias, estima-se que em média existem 2037 equilíbrios de Nash. Ainda que todos os participantes consigam calcular esses **múltiplos equilíbrios**, eles geram incertezas já que cada jogador pode preferir um equilíbrio diferente, resultando em uma configuração subótima.

Paul Milgrom² (35) defende que, apesar de parecer paradoxal, trabalhar com algumas hipóteses irrealistas é necessário para analisar problemas de alta complexidade. Para Milgrom, simplificações bem escolhidas podem ajudar a remover a “poeira e a fumaça” que prejudicam a percepção das diversas forças econômicas. Segundo o economista, apesar de teoremas levarem a *insights* em modelos que simplificam a realidade, a aplicação desses resultados na vida real exige cuidado. Alguns dos teoremas mais celebrados de teoria econômica dependem de hipóteses profundamente irrealistas (35) :

O primeiro teorema do bem-estar de Arrow e Debreu assume que existe um equilíbrio walrasiano e que não há externa-

²Prêmio Nobel de Economia em 2020 por contribuições em Teoria de Leilões.

lidades de consumo e produção, tampouco considera que existem empresas capazes de afetar os preços dos bens que vendem. O teorema de Coase assume que não existem custos de transação. (...) O teorema de equivalência de receita de Vickrey-Myerson pressupõe que os valores dos licitantes são distribuídos de forma independente e idêntica e que eles não possuem nenhuma outra informação. Esses teoremas importantes também supõem que os agentes são todos perfeitamente racionais e, quando precisam formar expectativas sobre os preços futuros ou estratégias de outros agentes, suas expectativas estão sempre corretas! (Tradução nossa)

O equilíbrio de Nash, bem como outras suposições, foram e ainda são necessárias para avançar na construção da Teoria de Leilões, em particular para o desenvolvimento de um modelo que seja útil em análise de nosso estudo de caso.

3.2

Teoria de Leilões

Na década de 60, a discussão sobre leilões começou a ganhar força, começando pelo artigo seminal de William Vickrey³ (8) publicado em 1961. Nesse trabalho, Vickrey faz uma análise bem completa de leilões tratando inclusive de leilões de lances fechados e com venda simultânea de múltiplas unidades, característica compatível com a dos leilões do TN. Entretanto, os resultados mais expressivos se restringem ao caso em que **cada licitante demanda apenas uma unidade** dos itens colocados a leilão e que **não há conluio entre os licitantes**.

No Capítulo 2, definimos o leilão uniforme e o leilão discriminatório de acordo com as regras do TN. Durante essa revisão bibliográfica, o termo leilão uniforme pode ser mais abrangente: leilão uniforme é aquele que vende múltiplas unidades simultâneas (no qual inclusive cada licitante pode demandar mais de uma unidade) e todos os licitantes vencedores pagam o mesmo preço por unidade arrematada. Esse preço pode ser o menor preço ofertado em um lance que arrematou itens (menor lance vencedor), como no Capítulo 2. Uma outra possibilidade é o preço pago pelos vencedores ser o maior preço entre os lances que não arrematam nenhum item (maior lance perdedor)⁴.

Vickrey estabelece que a maior vantagem do leilão uniforme sobre o discriminatório é que, no formato uniforme, os preços ofertados nos lances se aproximam mais do valor real que o licitante atribui aos objetos disputados

³Vencedor do Prêmio Nobel de Economia no ano de 1996.

⁴Existe uma modalidade de leilão uniforme na qual o preço a ser pago é uma combinação convexa entre os dois valores. Esse formato é considerado nos resultados apresentados nesse Capítulo.

no leilão. Essa aproximação entre valores teria a vantagem (de cunho social) para além da receita do leiloeiro: os objetos vendidos no leilão ficariam de posse daqueles que mais atribuem valor a eles. Quando isso ocorre, dizemos que há uma **alocação eficiente** desses objetos na sociedade⁵.

De acordo com Vickrey, para aproveitar melhor essa eficiência, os leilões uniformes não deveriam utilizar o menor preço vencedor, mas sim o maior preço perdedor. Segundo ele, apenas esse formato garante que cada licitante faça um lance com o valor exatamente igual ao que ele atribui ao objeto. Além disso, por mais que possa parecer contraintuitivo, ele advoga que a longo prazo esse modelo de maior preço perdedor renderá um preço médio tão alto quanto ao de menor preço vencedor.

Vickrey destaca ainda, que se passamos a considerar o caso em que um único licitante deseje obter duas ou mais unidades dos bens que estão sendo leiloados, não será possível obter um resultado que gere uma alocação eficiente sem reduzir as expectativas de receita do leiloeiro⁶.

No caso dos leilões do TN, os licitantes costumam demandar múltiplas unidades (múltiplos lotes padrão), e o método usado no leilão uniforme é o que utiliza o menor preço vencedor. Assim, para Vickrey, os leilões do TN tendem a não ser eficientes.

Outra característica primordial do modelo de Vickrey é que o valor de cada bem adquirido por um licitante *ex post* depende apenas da sua avaliação individual *ex ante* do valor do item. Dessa forma, o valor que outros atribuem aos objetos arrematados não influencia o valor que ele terá para os vencedores do leilão: os licitantes possuem **valores privados independentes**.

Para Vijay Krishna (36), a hipótese de valores privados independentes é mais plausível quando o valor do objeto para um licitante provém de seu consumo ou uso pessoal. Quando existe um mercado secundário que define o valor de revenda desse objeto, como é o caso dos títulos do TN, a hipótese de valor privado não é apropriada.

Para entender melhor a estrutura de valores privados independentes de Vickrey, considere o caso em que há um único bem indivisível colocado à venda e existem $N \geq 2$ licitantes competindo. Nesse cenário, o i -ésimo licitante atribui ao item colocado à venda um valor v_i independente do valor dos demais licitantes, além disso v_i é gerado por uma mesma função de distribuição do tipo $F : [0, \bar{v}] \rightarrow [0, 1]$. Adicionalmente, o licitante i sabe seu valor v_i , mas não sabe o valor que os demais licitantes atribuem ao objeto *ex ante*. A função

⁵Do ponto de vista social, alocações que não sejam eficientes são indesejáveis.

⁶Exceto se houver um número muito grande de competidores.

de estratégia $\mathcal{B}(\cdot)$ leva o valor v_i do licitante i num lance $\mathcal{B}(v_i)$. Se chamamos de p o preço pago pelo vencedor⁷, o ganho que o licitante i obtém, caso seja vencedor desse leilão, é igual a $v_i - p$, em caso de derrota seu ganho é igual a 0 e ele não paga nada.

Em 1965, Milton Friedman⁸ (37), interessado em questões de estabilidade financeira⁹ (o que é uma preocupação maior para o BACEN) também defendia o uso do leilão uniforme. Nas operações de mercado aberto¹⁰, Friedman afirma que um Tesouro deve vender os títulos através de leilões em que as compras sejam feitas por um mesmo preço (leilão uniforme). Além disso, sugere que cada leilão deva vender apenas dois tipos de papéis, preferencialmente, um de vencimento mais curto e outro mais longo. Para ele, os leilões deveriam ocorrer em intervalos regulares, vendendo quantidades previamente definidas. Cabe ressaltar que estas propostas são adotadas pelo TN, exceto pelo uso do leilão uniforme, que o TN só segue em alguns casos.

Posteriormente, John Harsanyi¹¹ (38, 39, 40) desenvolveu um conceito de equilíbrio que permitiu a Robert Wilson¹² (9, 10) estudar leilões que vendem um único objeto sem utilizar a hipótese de independência dos valores, como era feito até então. Wilson considerou que o valor (*ex post*) dos itens é o mesmo para todos os agentes econômicos, apesar de *ex ante* os licitantes poderem ter estimativas distintas desse valor. Isso se justifica, pois a distribuição de informação entre os licitantes sobre os objetos pode ser heterogênea *ex ante*. Esse novo conceito de valor introduzido por Wilson ficou conhecido como a hipótese de **valor comum**.

Para o caso de ativos financeiros, que é o nosso objeto de estudo, esse conceito de valor comum de Wilson é mais adequado que o de valor privado de Vickrey, isso ocorre pois o valor de mercado *ex post* é relevante para a percepção de valor do licitante comprador. Ao considerar a hipótese de valor comum, a discussão de eficiência perde sentido, pois todos atribuem o mesmo valor aos bens leiloados *ex post*, e conseqüentemente toda alocação é socialmente ótima.

Segundo Milgrom (35), o modelo de Wilson trouxe para o debate a situação em que um vencedor do leilão superestima o valor do bem arrematado.

⁷O preço a ser pago pelo vencedor depende do formato de leilão que os licitantes estão participando. Neste trabalho não exploramos os formatos de leilão que vendem apenas uma unidade, para saber mais sobre leilões que vendem apenas uma unidade veja (36).

⁸Laureado em 1976 com o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas.

⁹Negociações de títulos públicos também são usadas como instrumento de política monetária, tendo efeitos, por exemplo, sobre taxa de juros e inflação.

¹⁰Operações em que um banco central negocia seus títulos.

¹¹Também laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 1994 com Nash.

¹²Também laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 2020 junto com Milgrom por contribuições em Teoria de Leilões.

Quando isso acontece, diz-se que esse vencedor foi “amaldiçoado”. Para explicar formalmente o conceito de **maldição do vencedor**, vamos considerar N licitantes num leilão em que é vendido um único objeto. Cada um deles faz uma estimativa independente e imparcial X_i do valor v ($v = E[X_i|v]$), e usa uma função de estratégia $\mathcal{B}_i(X_i)$ não decrescente¹³ (estimativas maiores sobre o valor do bem levam a maiores preços enviados no lance). O licitante i vence se o seu lance excede o maior lance dos demais licitante $\omega_i = \max_{i \neq j} \mathcal{B}_j(X_j)$. Condicionadas a v , as estimativas são independentes o que implica que $E[X_i|v, X_i > \mathcal{B}_i^{-1}(\omega_i)] \geq E[X_i|v] = v$. A desigualdade apresentada mostra que o valor estimado pelo vencedor é maior ou igual em esperança ao valor do objeto leiloadado

No modelo de Wilson, a eficiência não é uma preocupação e no de Vickrey, a maldição do vencedor não é um problema: o valor do item depende apenas da avaliação individual de cada licitante *ex ante*, dessa forma não há incerteza sobre o valor do bem¹⁴.

Segundo Richard Thaler (41), o vencedor pode ser amaldiçoado de duas formas distintas:

1. O vencedor pode ter prejuízo caso dê um lance que exceda o valor que ele pode extrair do item arrematado.
2. O licitante tem lucro (com o uso do objeto arrematado) menor que o esperado, gerando assim um sentimento de frustração.

Ausubel et al. (17) estenderam a noção de maldição do vencedor para o contexto de leilões de venda simultânea de múltiplas unidades. Conforme destaca os autores, arrematar uma quantidade grande de títulos em um leilão pode ser uma má notícia sobre o valor que os demais licitantes atribuem aos objetos leiloados. De fato, o desinteresse dos demais participantes do leilão significaria que o licitante que arrematou muitas unidades superestimou o valor dos bens.

Pode se argumentar que a maldição do vencedor não prejudica em nada o leiloeiro: sem ela, ele receberia talvez menos. Contudo, observa-se que é comum

¹³No modelo de valores privados independentes (Vickrey), o argumento da função de estratégia é o valor previamente conhecido pelo licitante. Já no caso do valor comum (Wilson), o argumento é a estimativa que cada licitante tem do valor do produto antes de enviar seu lance.

¹⁴Existe uma variação do modelo de valores privados independentes em (17) que considera que podem haver informações sobre os itens leiloados que não são conhecidas por algum vencedor do leilão. Assim, mesmo que o valor que outros atribuam ao objeto não importe, existe a possibilidade de ocorrer a maldição do vencedor.

que os licitantes temam ser amaldiçoados e, para reduzir este risco, passam a dar lances menores¹⁵.

Milgrom & Weber (12) introduziram o **princípio da ligação** (*linkage principle*), que estabelece que o leiloeiro deve fornecer aos licitantes todas as informações (positivas ou negativas) disponíveis sobre o valor dos itens leiloados, diminuindo assim a possibilidade dos licitantes de superestimar seus valores. Como consequência, os licitantes ficariam menos receosos quanto a maldição do vencedor, e portanto a receita esperada do leilão aumentaria.

Binmore & Swierzbinski (13) também ressaltam a importância de se difundir ao máximo informações sobre os itens leiloados. Segundo eles, em situações onde os compradores não sabem se seus rivais conseguem elaborar uma estratégia ótima ou quando um jogo (leilão) tem múltiplos equilíbrios acarretando dúvidas sobre o que os outros jogadores considerarão ótimo, ocorre uma **incerteza estratégica**. A situação leva a um comportamento excessivamente conservador, com o intuito de se evitar a maldição do vencedor, podendo inclusive diminuir o número de licitantes interessados em participar do leilão.

Em 1979 Wilson (11) publicou um artigo sobre leilões de partes (*auctions of shares*). O modelo supõe que é colocado à venda um objeto, e os licitantes podem demandar frações do objeto em cada lance. Wilson apresenta dois exemplos em que vender frações de um bem para diferentes licitantes geraria uma receita menor do que seria possível obter vendendo o bem inteiro para um único licitante. A desvantagem do leilão de frações ocorre de duas formas diferentes, a primeira fazendo com que o aumento de concorrência não induza a um aumento de receita esperada. Na segunda as estratégias ótimas para os licitantes não são vantajosas para o leiloeiro. Por fim, Wilson destacou que essas estratégias (consideradas ótimas) podem não refletir o comportamento real dos licitantes.

3.2.1

Lances Marginais e Inframarginais

Chamamos um lance de **marginal** quando ele determina o preço de corte de um leilão. Os lances **inframarginais** são os lances vencedores que não definem o preço de corte (que ofertam preços superiores ao de corte). A diferença entre os dois tipos é central na compreensão do comportamento de licitantes que participam de leilões de múltiplas unidades.

¹⁵Esse fenômeno é largamente referido na literatura como *Winner's Curse avoidance*.

No leilão uniforme, ao contrário do que ocorre no discriminatório, o licitante em geral paga um valor abaixo do proposto em seu lance. Assim espera-se que, num leilão uniforme, de uma forma geral, os lances enviados apresentem valores superiores aos enviados num leilão discriminatório. Entretanto, o envio de valores maiores nos lances não implica necessariamente em preços maiores a serem pagos pelos seus remetentes.

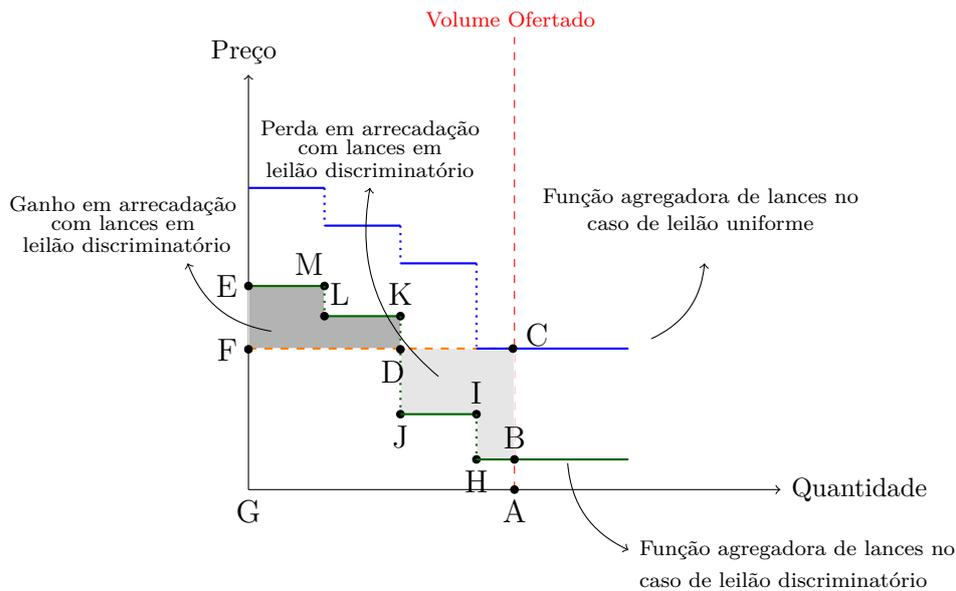


Figura 3.1: Comparação de receitas entre leilão uniforme e discriminatório. Elaborado pelo autor com base em gráfico apresentado na referência (42)

A figura 3.1 representa o dilema com que o leiloeiro se depara quando deve escolher entre adotar o formato uniforme ou discriminatório de leilão. O gráfico representa o caso em que os bens são considerados indivisíveis (discretos), e os lances são dados no formato de pares preço-quantidade. A letra A indica a quantidade de itens leiloados (linha vermelha). A linha verde é a função agregadora de lances do leilão discriminatório e a azul a do leilão uniforme. A linha laranja é o preço de corte do leilão uniforme. A área cinza escura, do polígono EFDKLM, e a cinza clara, do polígono DCBHII, representam respectivamente ganhos e perdas com lances do leilão discriminatório, quando comparados com preço de corte no leilão uniforme. Se a área cinza escura for maior do que a área cinza clara, o leilão discriminatório é mais vantajoso e vice versa. A área do retângulo GFCA é a arrecadação no caso uniforme e a área sob a função verde representa a arrecadação no caso discriminatório. Evidentemente, essas áreas podem ser utilizadas como parâmetro de comparação entre os tipos de leilão.

Em 1993, Back & Zender mostraram que os leilões uniformes poderiam ser mais propensos a formação de cartéis, já que lances inframarginais não afetam o preço pago pelos licitantes no leilão uniforme. Eles utilizaram o modelo de Wilson (11), de bens completamente divisíveis e valor comum, para analisar a possibilidade de equilíbrios colusivos serem adotados pelos licitantes. Essa contribuição é muito importante para nosso estudo de caso uma vez que de Castro & Karney (32) afirmam que, quando leilões acontecem repetidamente com os mesmos licitantes, a probabilidade de ocorrência de conluíus aumenta.

Uma vez que no leilão uniforme o valor que interessa em termos de pagamento é apenas o da unidade marginal, lances inframarginais podem apresentar valores altos. Isso ocorre, pois quando o valor proposto no lance marginal é baixo, o preço a ser pago por cada unidade arrematada (por todos os licitantes) seja igualmente baixo. Um lance maior pela unidade marginal, causa um maior custo sobre todos os itens ofertados. Isso funcionaria como um incentivo para que os licitantes participem de um conluio em que o valor proposto pela unidade marginal é previamente combinado para ser um preço baixo, ainda que o valor proposto pelas unidades inframarginais sejam elevados. Assim, todos poderiam obter um lucro expressivo por unidade arrematada e, caso alguém tentasse desviar da estratégia colusiva buscando arrematar mais unidades do que as combinadas, isso geraria um alto custo para todos.

Esse tipo de equilíbrio colusivo não se sustenta em leilões discriminatórios. Nesse caso, oferecer preços altos em lances inframarginais leva a um custo tão alto quanto para as unidades demandadas nesses lances. Além disso, a disputa pela unidade marginal não levaria a um aumento generalizado de preços a serem pagos pelas demais unidades. Conseqüentemente, em um leilão discriminatório há uma menor diferença entre o valor ofertado pelas unidades marginais e inframarginais.

Em resumo, Back & Zender mostram que é possível sustentar um equilíbrio colusivo em leilões uniformes. Tal equilíbrio afetaria negativamente a receita esperada do leiloeiro. Em contrapartida, não existe esse equilíbrio num leilão discriminatório, induzindo uma maior competitividade e conseqüente aumento de receita esperada para o leiloeiro. Back & Zender (14), concluem que o formato discriminatório seria mais vantajoso que o uniforme sob a ótica da receita esperada.

Em 2001, Back & Zender (15) publicam outro artigo incorporando uma regra que alguns Tesouros ao redor do mundo já utilizavam na modalidade uniforme de leilão. Essa regra consiste em permitir que o leiloeiro, caso deseje, reduza o volume ofertado inicialmente após receber os lances dos

licitantes (*ex post*). Com essa mudança, os licitantes mudariam a forma de elaborar suas estratégias no leilão uniforme. Ocorre que os preços ofertados por unidades inframarginais deixam de ser desprezíveis para estimar o preço por unidade arrematada no leilão uniforme. Como resultado, não existem equilíbrios baseados em lances inframarginais com preços elevados nos leilões do tipo uniforme tornando assim, o leilão uniforme mais competitivo. Os resultados principais desse trabalho (15) são os seguintes:

- ▶ A prerrogativa de redução de oferta *ex post* faz com que aumente o número de licitantes dispostos a participar efetivamente do leilão uniforme, aumentando assim também a receita esperada do leilão;
- ▶ Em equilíbrio, a prerrogativa de redução de oferta *ex post* não é utilizada pelo leiloeiro, ela funciona mais como uma ameaça.

Ao incorporar a possibilidade de redução de oferta *ex post*, o modelo de Back & Zender (15) passa a não contradizer mais alguns resultados empíricos como o de Umlauf (19), que em 1993 analisou leilões de um tipo de título do Tesouro Nacional do México. As negociações desse papel costumavam utilizar o formato discriminatório de leilão, além disso a mudança para o formato uniforme foi vantajosa para o governo mexicano. Outro trabalho empírico que corrobora com o resultado de Umlauf (19) foi produzido em 2001 por Heller & Lengwiler (20). Nesse artigo os autores analisaram os títulos de Tesouro da Suíça, para chegar à conclusão de que o leilão uniforme seria mais vantajoso para o governo do país.

3.2.2 Valores Marginais

Nesta Subseção será introduzido os conceitos de valor marginal constante, valor marginal decrescente, curvas de demanda planas e curvas de demanda decrescentes.

Um licitante avalia os itens disponíveis em um leilão com **valor marginal contante**, quando o fato de já ter em sua posse itens desse tipo não desvaloriza (ou não valoriza mais) novos itens do mesmo tipo que podem ser obtidos por ele. Neste caso, dizemos que o licitante possui uma **curva de demanda plana**, pois ele demanda todos os itens disponíveis a um mesmo preço.

Um licitante avalia os itens com **valor marginal decrescente** quando o valor de um novo item é menor do que o dos demais itens já obtidos, neste caso sua **curva de demanda é decrescente**.

Assim como Back & Zender (15), McAdams (16) analisou a alteração da oferta *ex post* em leilões uniformes. Sob a suposição de curvas de demanda planas, McAdams (16) demonstrou que, se o leiloeiro pode alterar a oferta *ex post*, todo equilíbrio é eficiente e leva a uma receita superior ao de um leilão com oferta fixada *ex ante*.

3.2.3

Simetria da Demanda

Nesta Subseção, será analisado um trabalho mais recente que os demais, e durante esta análise será explorado o conceito de simetria de demanda e seus efeitos nos resultados de leilões.

Em 2014, Ausubel et al. (17) buscaram comparar principalmente os formatos uniforme (maior preço perdedor) e discriminatório. Apesar do artigo não levar em conta a possibilidade de alteração na oferta *ex post* por parte do leiloeiro e considerar apenas estratégias não colusivas, o trabalho analisa os leilões sob a ótica de valores privados, comuns e também **interdependentes**, que é qualquer caso em que o valor possui tanto influência privada (depende da avaliação individual), quanto comum (depende de uma avaliação de mercado). O trabalho também considera dois tipos de demanda: plana (valores marginais constantes) e decrescente (valores marginais decrescente).

Além dessa classificação em plana e decrescente, as demandas também são classificadas (e analisadas) quanto a sua simetria. A demanda dos licitantes é **simétrica** quando o fato de dois ou mais licitantes que estimarem um mesmo valor (*ex ante*) para qualquer objeto faz com que eles ofereçam um mesmo preço por esse produto. A demanda é **assimétrica** quando, a partir de uma mesma avaliação *ex ante*, os licitantes oferecem lances diferentes.

Ausubel et al. (17) mostram que os rankings de eficiência e receita são ambíguos em geral. A escolha entre o leilão uniforme e o discriminatório depende das hipóteses consideradas. Dado um número fixo e igual de licitantes para ambos os formatos e demandas planas, quando se assume demandas simétricas o leilão discriminatório domina o uniforme em receita e eficiência¹⁶. Já quando se assume demanda assimétrica, o leilão uniforme domina o discriminatório em receita e eficiência. Por outro lado, se as funções de demanda são lineares e decrescentes, ainda considerando um número fixo e igual de participantes, em ambos os formatos esse equilíbrio linear nos leva a uma superioridade do leilão discriminatório em receita.

¹⁶Como já mencionado, quando se assume a hipótese de valor comum, todos os leilões são igualmente eficientes.

Os autores ressaltam também que a maior vantagem dos leilões do tipo uniforme é atrair mais licitantes para a competição. Mesmo que os novos participantes possuam valores marginais iguais aos participantes que já atuavam naquele mercado, os licitantes dão lances com preços maiores dada a presença de novos competidores. Entretanto, quando as demandas além de idênticas também são planas, a receita do leilão se mantém a mesma independentemente do aumento de participação. Nos demais casos, uma pequena diferença no número de competidores causa um acréscimo substancial na receita esperada do leilão. Como consequência, o leilão uniforme domina o leilão discriminatório em receita e participação. Segundo Ausubel et al. (17) essa superioridade do leilão uniforme é consistente com a evidência de experimentos de leilões do Tesouro dos Estados Unidos.

3.3

Uma Teoria para Leilões de Tesouro

Em 2001, Arupratan Daripa publicou “Uma Teoria para Leilões de Tesouro” (7). O artigo possui muitas características que são compatíveis com o modelo de Ofpub do TN:

1. Os licitantes são divididos em dois grupos que possuem condições diferentes de competir.
2. Os títulos são bens discretos (em oposição ao modelo de bens perfeitamente divisíveis) e a demanda por eles não é singular.
3. As estratégias dos licitantes levam em conta que os leilões se repetem com regularidade.
4. É possível que haja um agente externo que participe de um ou mais leilões. Esse agente externo observa se existe margem para ele entrar no leilão de forma a obter lucro¹⁷.
5. Há a possibilidade de redução na oferta de títulos *ex post*. Do ponto de vista do licitante, isso é visto como uma oferta aleatória.

Os trabalhos anteriormente citados nesse Capítulo analisam estratégias em um único leilão, sem considerar as implicações que a repetição desses poderia causar na estratégia dos licitantes. Daripa (7), por outro lado, leva em conta que os leilões se repetem constantemente e que informações detalhadas do leilão são divulgadas após o seu término, conforme ocorre nos leilões do

¹⁷Esse lucro é definido com base na hipótese do valor comum de Wilson.

TN. Cada licitante, na hora de elaborar sua estratégia, leva em conta essas informações sobre o histórico de comportamento dos demais licitantes.

É importante considerar na análise de leilões repetitivos esse tipo de estratégia dinâmica. Segundo Fudenberg & Maskin (43), o receio de retaliação pode levar a resultados diferentes do esperado em um jogo único, em que não há esse receio. Num cenário onde os licitantes podem se monitorar perfeitamente, Drew Fudenberg & Eric Maskin estabeleceram o Teorema Popular (*Folk Theorem*) para jogos que se repetem indefinidamente, os denominados **super jogos**. O teorema diz que um equilíbrio colusivo pode se sustentar como resultado de um super jogo.

Por fim, o resultado de Daripa (7) que mais nos interessa é que, dadas a possibilidade de alteração na oferta *ex post* e as demais hipóteses do modelo, o leilão uniforme é superior ao leilão discriminatório do ponto de vista da receita esperada para leiloeiro.

Apesar de não abordar o modelo híbrido de leilão e tampouco considerar o impacto de uma etapa não competitiva (segunda volta) nas estratégias da etapa competitiva (primeira volta), o modelo do Daripa é, dentre os analisados, é o que melhor descreve o formato dos leilões do TN. Por isso, no Capítulo 4 vamos nos basear no modelo do Daripa (7) para estender a modelagem apresentada na Seção 2.4. O modelo que propomos para os leilões do TN vai levar aos mesmos resultados de (7).

3.4

Leilões híbridos do TN

Em 2003, Rodrigues & Bugarin (18) fizeram uma análise teórica do formato de leilão híbrido do TN, detalhado no Capítulo 3. Os autores estudaram o caso onde a oferta agregada de dois papéis é fixa, mas a decisão de qual parte da oferta vai ser disponibilizada para cada papel é feita após os envio dos lances.

A vantagem da modalidade híbrida de leilão em comparação com a tradicional é que a decisão sobre a oferta de cada papel é tomada quando as funções de demanda de todos os licitantes já foram reveladas. Isso permite ao TN satisfazer melhor sua necessidade de financiamento, segundo os autores (18):

Este resultado mostra de forma contundente a vantagem do leilão híbrido em presença de volatilidade de demanda por títulos públicos: ao usar um leilão híbrido,

o governo consegue postergar a decisão de quanto vender de cada título para depois que a informação sobre as curvas de demanda se torna evidente (pelos lances dos participantes) resolvendo a imperfeição original do mercado.

Rodrigues & Bugarin destacam que, quando o TN tem uma boa estimativa da demanda do mercado (os licitantes) pelos papéis que serão colocados a leilão, não há necessidade de se optar pelo formato híbrido.

4

Modelando as Estratégias em Leilões do TN

Para estender o modelo do Capítulo 2, analisando estratégias e equilíbrios iremos usar a metodologia desenvolvida por Daripa (7).

Os leilões se repetem com regularidade. Além disso, ao término de cada leilão são divulgadas informações que são usadas para o monitoramento do comportamento dos licitantes, tanto pelos participantes do leilão quanto pelos agentes que podem vir a participar de futuros leilões. As estratégias dos licitantes são analisadas do ponto de vista de um super jogo (definido na seção 3.3), levando em conta a média de ganhos a longo prazo.

Supõe-se uma divisão assimétrica de informações. Os *dealers*, que são *market makers*¹ do mercado secundário de títulos, conseguem prever com bastante precisão o valor de mercado desses papéis ao início de cada leilão. Já os não *dealers* não alcançam essa precisão. Por este motivo, ao início de cada leilão, para cada não *dealer*, o valor (*ex ante*) dos papéis é uma variável aleatória X , distribuída por uma função $F : [0, 50.000] \rightarrow [0, 1]$, lembrando que 50.000 é o valor de face de 50 títulos conforme definido na seção 2.4.

Como os não *dealers* sabem dessa assimetria, eles observam os dados públicos dos leilões para analisar se os lances estão muito descontados, isto é, se os preços pagos pelos *dealers* estão muito abaixo do preço $E[X]$ que costuma ser praticado no mercado. Desta forma, caso algum não *dealer* observe uma oportunidade lucrativa de participar em algum leilão, eles enviam lances para aproveitar a oportunidade.

Por outro lado, os *dealers* sabem que os não *dealers* estão em busca desta oportunidade e, sob a hipótese do valor comum² descrita no Capítulo 3, se organizam para impedir que não *dealers* entrem no leilão de forma a obter lucro. Esse comportamento por parte dos *dealers* será chamado de restrição de não entrada³ (lucrativa), definida a seguir.

Dizemos que um perfil de estratégias de *dealers* $\tilde{\sigma} \equiv \langle \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_N \rangle$ permite **entrada lucrativa** (de não *dealers*) se existir um período t e um lance $\tilde{b} = (\tilde{p}, \tilde{q})$ tal que um não *dealer* possa, no período t com o lance \tilde{b} , obter

¹O *market maker* é um participante do mercado que se compromete a manter ofertas de compra e venda de um ativo dando liquidez a ele. Também estabelece o preço máximo e mínimo para se comprar e vender um ativo com ele. (44)

²É possível que algum não *dealer* consiga obter lucro através de alguma componente privada em sua avaliação de valor. Esse tipo de comportamento é considerado ruidoso e não é tratado explicitamente no modelo.

³No artigo (7) esta restrição é chamada de *no-arbitrage*.

um resultado (lucro esperado) estritamente positivo quando os *dealers* jogam de acordo com $\tilde{\sigma}$. Um perfil de estratégias de *dealers* respeita a **restrição de não entrada** quando ela não permite entrada lucrativa.

Dada a restrição de não entrada, os *dealers* buscam maximizar os seus ganhos como um grupo (cartel). Como descrito no Capítulo 2, os *dealers* nos leilões do TN são doze e cada um tem direito a sete lances. Definimos agora o Equilíbrio do Tesouro, que é a classe de equilíbrio utilizado por Daripa (7).

Seja $\hat{\Sigma}$ o conjunto de estratégias que geram equilíbrio de Nash em um super jogo que satisfaz a restrição de não entrada. Dada qualquer regra de preço (uniforme ou discriminatória), dizemos que uma estratégia $\sigma^* \in \hat{\Sigma}$ gera um **Equilíbrio do Tesouro** em um super jogo se, para toda estratégia $\sigma \in \hat{\Sigma}$,

$$\sum_{i=1}^{12} \pi_i(\sigma^*) \geq \sum_{i=1}^{12} \pi_i(\sigma) . \quad (4-1)$$

Aqui $\pi_i(\cdot)$ é uma função que descreve o lucro (*ex post*) do *dealer* i , quando os *dealers* seguem uma dada estratégia.

Primeiramente, vamos analisar os equilíbrios em leilões sem considerar a prerrogativa do Tesouro em poder alterar a oferta *ex post*. Em seguida, será analisado como essa prerrogativa afeta a receita de cada modalidade de leilão.

4.1 Leilões com Oferta Fixa de Títulos

4.1.1 Leilão Discriminatório - Jogo Único

Inicialmente, vamos analisar as estratégias dos *dealers* em um jogo único. Por temer a maldição do vencedor, os não *dealers* que são relativamente desinformados, não participam do leilão ou dão lances muito descontados. Por isso, desconsideramos seus lances nesta parte da análise.

Seja v uma realização da variável aleatória X , seja ainda $\{b_{1d_i}, \dots, b_{7d_i}\}$ o conjunto de lances do *dealer* i . Seja $\hat{p} = \{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_S\}$ os preços ofertados por unidade nos lances do *dealer* i ordenado em ordem não decrescente: o *dealer* i arremata sua k -ésima unidade pelo preço \hat{p}_k . Definimos $\eta(\hat{p}_k)$ como a probabilidade do licitante arrematar sua k -ésima unidade. Veja que a probabilidade é igual para todas as unidades uma vez que esta função depende apenas do preço de corte definido no leilão e da quantidade total demandada por lances ao preço de corte. Assim, o lucro esperado π^i do *dealer* i é

$$\pi^i = \sum_{k=1}^S \eta(\hat{p}_k)(v - \hat{p}_k). \quad (4-2)$$

O licitante está diante do seguinte problema de maximização:

$$\max_{\hat{p}_1} \eta(\hat{p}_1)(v - \hat{p}_1) + \max_{\hat{p}_2} \eta(\hat{p}_2)(v - \hat{p}_2) + \dots + \max_{\hat{p}_S} \eta(\hat{p}_S)(v - \hat{p}_S). \quad (4-3)$$

Em 4-3, temos S problemas de maximização iguais em que a solução de cada um deles é a mesma. Seja $p^*(v)$ o preço que maximiza cada um dos S problemas. Os lances ótimos do *dealer* i são denotados por

$$b_{1d_i}(v) = (p_i^*(v), S), \quad \text{e} \quad b_{kd_i}(v) = (p, 0), \forall k > 1. \quad (4-4)$$

Como cada *dealer* i oferta apenas um preço por todas as unidades disponíveis e o valor comum v é conhecido por todos eles no momento de elaborar os lances, vale que se um deles ofertar um preço $p_{1d_i} < v$, outro licitante j pode ofertar um preço p_{1d_j} tal que $p_{1d_i} < p_{1d_j} < v$. Nesse caso, o lucro do *dealer* i é 0, se o licitante j é o vencedor do leilão, seu lucro é $v - p_{1d_j} > 0$. Desta forma, estratégias baseadas em valores estritamente menores do que v não levam a um equilíbrio de Nash. Assim, o equilíbrio ocorre quando os licitantes ofertam lances com preço v , o que gera lucro 0 para os participantes⁴. Num jogo único, mesmo que os *dealers* combinem uma estratégia colusiva onde o ganho médio por unidade compense a divisão do volume ofertado, um licitante pode não seguir a estratégia combinada e arrematar todas as unidades por um valor marginalmente superior ao combinado⁵.

4.1.2

Leilão Discriminatório - Super Jogo

Seja $b_n = (p_n, q_n)$ um lance de um não-*dealer*. Uma vez que cada *dealer* demanda cada uma das unidades por um mesmo preço, o *dealer* i envia um único lance b_{1d_i} sobre todas a unidade para maximizar seu lucro esperado. Além disso, a restrição de não entrada deve ser respeitada em cada período t . Assim, o problema do licitante i pode ser descrito pela expressão a seguir:

⁴Equilíbrios como esses foram objeto de estudo do matemático Joseph Bertrand, que estudou oligopólios onde as empresas são formadoras de preços. Bertrand mostrou que, em equilíbrio, as empresas obtém lucro 0 quando eles tem o mesmo preço médio de produção.

⁵Como não há mais turnos no jogo não há possibilidade de retaliação. Por isso não há incentivos para seguir uma estratégia colusiva.

$$\begin{aligned} & \max_{p_{1d_i}(X)} E[X - p_{1d_i}(X)] \\ & \text{s.t.} \\ & E[X - p_n | p_{1d_i}(X) \leq p_n] = 0, \text{ onde } p_n \leq E[X], \end{aligned} \tag{4-5}$$

Evidentemente, para qualquer lance b_n que oferte um preço $p_n > E[X]$, este não *dealer* espera obter prejuízo sempre que arrematar alguma unidade, contrariando a hipótese de que ele só participa do leilão se acredita que pode obter lucro.

Vamos definir a variável $\beta(v) := E[X | X \leq v]$. Daripa (7) mostra que num leilão discriminatório, dada qualquer estratégia $\sigma \in \hat{\Sigma}$, vale a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{12} \pi_i(\sigma) \leq S \times E[X - \beta(X)]. \tag{4-6}$$

Em palavras, o ganho do grupo de *dealers* num Equilíbrio do Tesouro é limitado superiormente por $S \times E[X - \beta(X)]$, e qualquer equilíbrio que gerar este lucro para os licitantes é ótimo.

Uma estratégia que permitiria alcançar essa cota é a seguinte: todos os *dealers* i ofertam lances $b_{1d_i} = (\beta(v), S)$, e para $k > 1$ vale $b_{kd_i} = (p_{kd_i}, 0)$.

Se em algum período t , o maior lance vencedor seja superior a $\beta(v)$, a cota não é alcançada então uma estratégia de retaliação é adotada. Neste cenário, cada *dealer* deve assumir, a partir do período $t + 1$, a estratégia ótima para o jogo de período único. Essa estratégia de retaliação serve apenas de incentivo para que nenhum *dealer* desvie da estratégia que realiza a cota ótima. Assim, a receita discriminatória esperada, em cada período t , é dada por:

$$R_D = S \times \beta(v) \tag{4-7}$$

4.1.3 Leilão Uniforme

Conforme já mencionado na Seção 3.2.1, existe uma distinção entre duas categorias de unidades arrematáveis em um leilão. A última unidade arrematável, a que define o preço de corte do leilão, é chamada de **unidade marginal**. Já as demais unidades são chamadas de unidades **inframarginais**. Essa categorização das unidades tem uma importância especial no leilão uniforme⁶ uma vez que o preço responsável pelo arremate da unidade marginal

⁶Assim como no Capítulo 2, quando falamos em leilão uniforme neste capítulo estamos nos referindo ao de menor preço vencedor.

define o preço a ser pago por todas as unidades. No contexto do modelo, a disputa pela unidade marginal do leilão uniforme possui a mesma característica da disputa por todas as unidades no leilão discriminatório.

Dada a restrição de não entrada, os *dealers* enviam lances sobre as $S - 1$ unidades inframarginais com preço $p \geq E[X]$. Dessa forma, os não *dealers* ficam fora da competição pelas unidades inframarginais, pois todo lance que busque arrematar mais de uma unidade gera um prejuízo esperado para qualquer não *dealer*.⁷

Assim, para garantir que a restrição de não entrada seja respeitada e ao mesmo tempo maximizar o lucro esperado dos *dealers*, resta analisar as estratégias sobre a unidade marginal. Se o $p_m(X)$ é o preço proposto pelo cartel sobre a unidade marginal, a S -ésima unidade, e p_n é o maior preço proposto em um lance de não *dealer*, o problema encarado pelos *dealers* é

$$\begin{aligned} & \max_{p_m(X)} E[X - p_m(X)] \\ & \text{s.t.} \\ & E[X - p_n | p_m(X) \leq p_n] = 0, \text{ onde } p_n \leq E[X], \end{aligned} \tag{4-8}$$

Este problema é idêntico ao do caso discriminatório e portanto o preço proposto na unidade marginal pelos *dealers* deve ser o mesmo preço $\beta(X)$.

Seja t um número natural e $M(t)$ tal que $M(t) = \lfloor \frac{t}{12} \rfloor$. t pode ser escrito como $t = M(t) \times 12 + k$, onde $k \in \{1, \dots, 12\}$. A estratégia descrita a seguir leva a um Equilíbrio do Tesouro para leilões uniformes com oferta fixada.

1. No período 0, os lances devem ser enviados da seguinte forma: o primeiro lance do *dealer* 12 é $b_{1d_{12}} = (\beta(v), 1)$. Já cada *dealer* i tal que $i \in \{1, \dots, 11\}$ oferta o seguinte lance $b_{1d_i} = (50.000, \lfloor \frac{S-1}{11} \rfloor)$. E os $(S - 1) - (11 \times \lfloor \frac{S-1}{11} \rfloor)$ lotes restantes são demandados no segundo lance do *dealer* 12 ao preço 50.000. Todos os lances não mencionados demandam 0 lotes.
2. Para qualquer $t > 0$, em que $t = M(t).12+k$, os lances devem ser enviados da seguinte maneira: o primeiro lance do *dealer* k é $b_{1d_k} = (\beta(v), 1)$. Já cada *dealer* i tal que $i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, 12\}$ dá o seguinte lance $b_{1d_i} = (50.000, \lfloor \frac{S-1}{11} \rfloor)$. E os $(S - 1) - (11 \times \lfloor \frac{S-1}{11} \rfloor)$ lotes restantes são demandados no segundo lance do licitante k ao preço 50.000. Todos os lances não mencionados demandam 0 lotes.

⁷Esta estratégia possui semelhança com a analisa por Back & Zender em 1993 (14).

Os passos 1 e 2 da estratégia anterior permitem que o cartel maximize seus ganhos, pagando por unidade arrematada, em cada período t , o valor $\beta(v)$. Caso, em algum período $t > 0$, o menor lance vencedor apresente um preço superior a $\beta(v)$, cada *dealer* deve assumir, a partir do período $t + 1$, a mesma estratégia de retaliação descrita no caso discriminatório em que todos os *dealers* demandam todas as unidade pelo preço v . Novamente, a estratégia de retaliação não é usada em equilíbrio, ela é apenas uma ameaça que garante que todos os *dealers* sigam a estratégia que maximiza a receita do grupo.

Usando a estratégia descrita, em Equilíbrio do Tesouro, a receita esperada em cada período num leilão uniforme é dada por $R_U = S \times \beta(v)$. Essa receita esperada é igual a do leilão discriminatório, conforme explicitado em 4-7.

Conclusão para leilões de oferta fixada *ex ante*: Em Equilíbrio do Tesouro a receita esperada do leilão uniforme é equivalente a do discriminatório.

4.2

Leilões com Oferta Variável

No caso de oferta variável, o Tesouro anuncia inicialmente uma quantidade S de lotes de títulos. Entretanto, após receber os lances, ele redefine a oferta e passa a considerar uma nova oferta S' tal que $0 \leq S' \leq S$.

Quando o Tesouro tem esta prerrogativa, não é possível distinguir lances marginais e inframarginais. Dado que o preço ofertado nos lances do leilão discriminatório é o mesmo para todas as unidades, não importando a quantidade a ser ofertada, as estratégias dos *dealers* não são afetadas com a possibilidade de redução de oferta. Caso os *dealers* mantenham a estratégia do caso discriminatório, o ganho por lote arrematado se mantém o mesmo e a restrição de não entrada continua a ser respeitada.

Por outro lado, conforme discutido no Capítulo 3 e explicitado na estratégia que leva ao Equilíbrio do Tesouro no caso de oferta fixa (Subseção 4.1.3), no leilão uniforme a unidade marginal tem natureza distinta das demais unidades (inframarginais): o lance marginal define o preço a ser pago igualmente por cada unidade arrematada em leilão, enquanto lances inframarginais não afetam os preços a serem pagos ao fim do leilão.

Desta maneira, caso os *dealers* decidam manter a estratégia do caso em que a oferta é fixada *ex ante* e o leiloeiro reduza a oferta em ao menos um lote *ex post*, o valor a ser pago por lote deixa de ser $\beta(v)$ e passa a ser 50.000, gerando um custo substancialmente maior para os *dealers*. Assim, estratégias que se baseiem em lances inframarginais muito elevados deixam de fazer sentido. Em

contrapartida, os *dealers* não devem reduzir o valor proposto pela S -ésima unidade, a unidade marginal. Com efeito, se o leiloeiro mantiver a oferta inicial e o preço ofertado pela S -ésima unidade for menor que $\beta(v)$, então a estratégia passa a não respeitar mais a restrição de não entrada, logo o preço ofertado pelos *dealers*, por cada unidade, continua a ter que ser maior ou igual a $\beta(v)$ em cada período t .

Suponha que os *dealers*, em determinado período t , ofertem o preço $\beta(v)$ sobre ao menos os lotes S e $S-1$. Nesse caso, é possível que um não *dealer* envie um lance $b_m = (E[X], 1)$. Esse não *dealer* paga $\beta(v)$ se não houver redução de oferta, o que caracteriza uma violação da restrição de não entrada. No caso de redução de oferta, de modo que o lance desse não *dealer* passe a ser marginal, ele paga $E[X]$ pelo lote arrematado, caracterizando um lucro esperado nulo. Portanto, essa estratégia permite que um não *dealer* busque um ganho positivo sem risco de obter prejuízo (em esperança).

A consequência disso é que, em cada período t , o preço p_d que os *dealers* devem ofertar por cada um dos S lotes deve respeitar a desigualdade $v > p_d > \beta(v)$. O p_d que leva ao Equilíbrio do Tesouro foi calculado em (7). Para efeito de comparação de receitas, é necessário saber apenas que $p_d > \beta(v)$, assim a receita do leilão uniforme (com oferta variável), em um dado período t , é dada por $p_d \times S'$, que é maior que a receita do caso discriminatório descrita por $\beta(v) \times S'$.

A conclusão é que, dadas as hipóteses do modelo, com oferta fixa *ex ante* o leilão uniforme é equivalente ao discriminatório em termos de receita esperada. Entretanto, quando há a possibilidade de alteração de oferta *ex post*, o leilão uniforme se mostra superior ao discriminatório em termos de receita.

5 Conclusões

O Capítulo 2 apresentou informações detalhadas sobre os leilões de venda de títulos do TN, os quais tem por prioridade a maximização de receita. Em particular, a Seção 2.4 descreve formalmente o funcionamento de cada tipo de leilão utilizado pelo Tesouro Nacional.

O Capítulo 3 apresentou diversos trabalhos relevantes para a análise de estratégias de participantes em leilões. Conceitos como: valor comum, unidade marginal, maldição do vencedor, valor marginal constante (demanda plana), assimetria da demanda, redução de oferta *ex post* e estratégias em jogos que se repetem indefinidamente foram introduzidos ao longo do capítulo se mostraram úteis na análise de leilões que possuem as características das ofertas públicas do Tesouro Nacional.

No Capítulo 4, associamos a estrutura desenvolvida na Seção 2.4 com as hipóteses do modelo de Daripa (7) para concluir que em Equilíbrio do Tesouro¹, dada a possibilidade de redução de oferta *ex post*, o leilão uniforme gera uma receita esperada maior do que o leilão discriminatório.

Para tratar da diferença entre leilão híbrido e tradicional foi apresentado o trabalho de Rodrigues & Bulgarin (18), que mostra que o leilão híbrido tem a vantagem de permitir ao TN decidir a oferta para diferentes títulos após receber os lances. Essa característica possibilita escolher uma quantidade ótima de cada tipo de papel, levando o TN a satisfazer melhor sua necessidade de financiamento.

Ao que diz respeito à regra de preço, o trabalho conclui que, com as regras do TN, leilões do tipo uniforme seriam mais vantajosos que os do tipo discriminatório. Essa conclusão também é alcançada por estudos empíricos que analisaram Tesouros de diferentes países ao redor do mundo². Além disso, do ponto de vista da oferta, a conclusão é que, para o TN, o leilão híbrido seria mais vantajoso que o leilão tradicional.

Os resultados teóricos apresentados aqui devem ser usados apenas para auxiliar futuros trabalhos empíricos que possam corroborar os resultados apresentados. Apenas partindo de uma análise empírica cuidadosa é possível sugerir alguma mudança na forma que são negociados os títulos em ofertas públicas.

¹Conceito definido no próprio capítulo 4

²Destacamos dois desses estudos (19, 20) no capítulo 3. Entretanto é possível encontrar mais trabalhos com esta conclusão na referência (42).

A

Apêndice - Histórico Recente de Leilões

Tabela A.1: Histórico Recente de Leilões de Venda do Tesouro Nacional

| Data do leilão | Título | Tipo de leilão | Volta | Vencimento | Oferta | Taxa máx. | Taxa média | Taxa mín. | Venda |
|----------------|--------|----------------|-----------------------|------------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
| 28/01/2021 | LFT | Venda | 1. ^a volta | 01/03/2022 | 1.500.000 | 0,105 | 0,105 | 0,105 | 108.750 |
| 28/01/2021 | LFT | Venda | 2. ^a volta | 01/03/2022 | 21.750 | 0,105 | 0,105 | 0,105 | 10.428 |
| 28/01/2021 | LFT | Venda | 1. ^a volta | 01/03/2027 | 1.500.000 | 0,325 | 0,325 | 0,325 | 1.391.250 |
| 28/01/2021 | LFT | Venda | 2. ^a volta | 01/03/2027 | 278.250 | 0,325 | 0,325 | 0,325 | 207.106 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 1. ^a volta | 01/01/2023 | 6.000.000 | 5,2099 | 5,1941 | 5,2099 | 4.205.500 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 2. ^a volta | 01/01/2023 | 1.200.000 | 5,1941 | 5,1941 | 5,1941 | 1.199.990 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 1. ^a volta | 01/07/2024 | 1.000.000 | 6,534 | 6,4998 | 6,534 | 779.200 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 2. ^a volta | 01/07/2024 | 200.000 | 6,4998 | 6,4998 | 6,4998 | 199.996 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 1. ^a volta | 01/10/2021 | 10.000.000 | 3,017 | 3,0099 | 3,017 | 10.000.000 |
| 28/01/2021 | LTN | Venda | 2. ^a volta | 01/10/2021 | 2.000.000 | 3,0099 | 3,0099 | 3,0099 | 1.999.990 |
| 28/01/2021 | NTN-F | Venda | 1. ^a volta | 01/01/2027 | 500.000 | 6,92 | 6,8979 | 6,92 | 500.000 |
| 28/01/2021 | NTN-F | Venda | 2. ^a volta | 01/01/2027 | 100.000 | 6,8979 | 6,8979 | 6,8979 | 99.994 |
| 28/01/2021 | NTN-F | Venda | 1. ^a volta | 01/01/2029 | 1.000.000 | 7,345 | 7,3425 | 7,345 | 1.000.000 |
| 28/01/2021 | NTN-F | Venda | 2. ^a volta | 01/01/2029 | 200.000 | 7,3425 | 7,3425 | 7,3425 | 199.999 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 1. ^a volta | 15/08/2024 | 500.000 | 2,123 | 2,123 | 2,123 | 500.000 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 2. ^a volta | 15/08/2024 | 100.000 | 2,123 | 2,123 | 2,123 | 20.824 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 1. ^a volta | 15/08/2028 | 1.500.000 | 3,1839 | 3,1839 | 3,1839 | 1.458.700 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 2. ^a volta | 15/08/2028 | 300.000 | 3,1839 | 3,1839 | 3,1839 | 299.991 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 1. ^a volta | 15/08/2040 | 50.000 | 3,9 | 3,9 | 3,9 | 26.500 |
| 26/01/2021 | NTN-B | Venda | 2. ^a volta | 15/08/2040 | 10.000 | 3,9 | 3,9 | 3,9 | 1.090 |

6

Referências bibliográficas

- [1] **Com recessões e pandemia, pib do brasil tem pior década em 120 anos.** https://www.ipea.gov.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=37591. Data de acesso: 10/03/2021. 1.1
- [2] CONSIDERA, C.; TRECE, J.. **A nova década perdida brasileira e o resto do mundo – resultados per capita.** https://blogdoibre.fgv.br/posts/nova-decada-perdida-brasileira-e-o-resto-do-mundo-resultados-capita#_ftn2. Data de acesso: 15/03/2021. (document), 1.1, 1.1
- [3] **No sexto ano seguido de déficit, contas do governo registram rombo de r\$95 bilhões em 2019.** <https://g1.globo.com/economia/noticia/2020/01/29/no-6o-ano-seguido-de-deficit-contas-do-governo-registram-rombo-de-r-95-bilhoes-gh.html>. Data de acesso: 10/03/2021. (document), 1.1, 1.2
- [4] **Raf – relatório de acompanhamento fiscal.** https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/540164/RAF15_ABR2018.pdf. Data de acesso: 05/03/2021. (document), 1.1, 1.3, 2, 1.4
- [5] **O que é a dívida pública federal?** <https://www.gov.br/tesouronacional/pt-br/divida-publica-federal/sobre-a-divida-publica/o-que-e-a-divida-publica-federal>. Data de acesso: 05/03/2021. 3
- [6] LEISTER, M. D.. **O Banco Central Deveria Emitir Títulos Públicos?** Tesouro Nacional, 2016. 1.1, 4
- [7] DARIPA, A.. **A theory of treasury auctions.** *Journal of International Money and Finance*, 20:743–767, 2001. 1.1, 1.2, 3, 3.3, 3.3, 4, 3, 4.1.2, 4.2, 5
- [8] VICKREY, W. S.. **Counterspeculation, auctions, and competitive sealed-tenders.** *Journal of Finance*, 16:8–37, 1961. 1.2, 3.2
- [9] WILSON, R. B.. **Competitive bidding with disparate information.** *Management Science*, 15:446–448, 1968. 1.2, 3.2
- [10] WILSON, R. B.. **A bidding model of perfect competition.** *The Review of Economic Studies*, 44:511–518, 1977. 1.2, 3.2

- [11] WILSON, R. B.. **Auctions of shares**. The Quarterly Journal of Economics, 93(4):675–689, 1979. 1.2, 3.2, 3.2.1
- [12] MILGROM, P. R.; WEBER, R. J.. **A theory of auctions and competitive bidding**. Econometrica, 50(5):1089–1122, 1982. 1.2, 3.2
- [13] BINMORE, K.; SWIERZBINSKI, J.. **Treasury auctions: Uniform or discriminatory**. Review of Economic Design, 2000. 1.2, 3.2
- [14] BACK, K.; F.ZENDER, J.. **Auctions of divisible goods: On the rationale for the treasury experiment**. The Review of Financial Studies, 6:733–764, 1993. 1.2, 3.2.1, 7
- [15] BACK, K.; F.ZENDER, J.. **Auctions of divisible goods with endogenous supply**. Economics Letters, 73:29–34, 2001. 1.2, 3.2.1, 3.2.1, 3.2.2
- [16] MCADAMS, D.. **Adjustable supply in uniform price auctions: Non-commitment as a strategic tool**. Economics Letters, 95(1):48–53, 2007. 1.2, 3.2.2
- [17] AUSUBEL, L.; CRAMTON, P.; PYCIA, M.; ROSTEK, M. ; WERETKA, M.. **Demand reduction and inefficiency in multi-unit auctions**. The Review of Economic Studies, 81(4):1366–1400, 2014. 1.2, 3.2, 14, 3.2.3
- [18] RODRIGUES, L. A.; BUGARIN, M. S.. **Uma Análise dos Leilões Híbridos do Tesouro Nacional**. 8º Prêmio do Tesouro Nacional, 2003. 1.2, 2.1, 3, 3.4, 5
- [19] UMLAUF, S. R.. **An empirical study of the mexican treasury bill auction**. Journal of Financial Economics, No. 33, p. 313–340, 1993. 1.2, 3.2.1, 2
- [20] HELLER, D.; LENGWILER, Y.. **Should the treasury price-discriminate? a procedure for computing hypothetical bid functions**. Journal of Institutional and Theoretical Economics (JITE) Vol. 157, No. 3, p. 413–429, 2001. 1.2, 3.2.1, 2
- [21] **Diário oficial da união: Portaria nº 431, de 7 de agosto de 2020**. <https://www.in.gov.br/web/dou/-/portaria-n-431-de-7-de-agosto-de-2020-271714415>. Data de acesso: 20/08/2020. (document), 2, 1, 2, 2.2, 6

- [22] **Sistema de dealers do tesouro nacional.** <https://www.gov.br/tesouronacional/pt-br/divida-publica-federal/mercado-interno/dealers>. Data de acesso: 13/02/2021. (document), 2.1
- [23] **Relatório de administração do sistema especial de liquidação e de custódia (selic).** <https://www3.bcb.gov.br/rasselic/>. Data de acesso: 20/01/2020. 4
- [24] **Portaria stn nº 534, de 09 de agosto de 2019.** https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9::::9:P9_ID_PUBLICACAO:30379. Data de acesso: 30/08/2020. 5
- [25] **Sobre leilões: Informações sobre os leilões de títulos públicos.** <https://www.gov.br/tesouronacional/pt-br/divida-publica-federal/mercado-interno/sobre-leiloes>. Data de acesso: 30/08/2020. 2
- [26] **Pesquisa no histórico dos leilões.** <https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2691:2::::N0::::>. Data de acesso: 13/02/2021. 2.1
- [27] **Mercado aberto.** <https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/legado?url=https:%2F%2Fwww.bcb.gov.br%2Fhtms%2Ffinfecon%2Fdemab%2Fdefault.asp>. Data de acesso: 24/02/2021. 2.1
- [28] **Comunicado do tesouro nacional 1942 - leilões de títulos 1º trimestre/2021.** https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9::::9:P9_ID_COMUNICADO:1942. Data de acesso: 10/02/2021. (document), 2.3, 1
- [29] **Comunicado do tesouro nacional 1902 - leilões de títulos 1º trimestre/2021.** https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9::::9:P9_ID_COMUNICADO:1902. Data de acesso: 13/02/2021. (document), 2.3
- [30] DE ALMEIDA, A. N.. **Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos.** UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, 2006. 3.1
- [31] AUMANN, R. J.; SHAPLEY, L. S.. **Long-term competition-a game-theoretic analysis.** In: ESSAYS IN GAME THEORY, p. 1–16, New York, 1994. Springer-Verlag. 3.1

- [32] DE CASTRO, L. I.; KARNEY, D. H.. **Equilibria existence and characterization in auctions: Achievements and open questions.** *Journal of Economic Surveys*, 26:911–932, 2011. 3.1, 3.2.1
- [33] HERINGS, P. J.-J.; PEETERS, R.. **Homotopy methods to compute equilibria in game theory.** *Economic Theory*, 42(1):119–156, 2010. 3.1
- [34] MCLENNAN, A.. **The expected number of nash equilibria of a normal form game.** *Econometrica*, 73(1):119–156, 2005. 3.1
- [35] MILGROM, P.. **Auction research evolving: Theorems and market designs.** *American Economic Review*, 111(5):1383–1405, 2021. 3.1, 3.2
- [36] KRISHNA, V.. **Auction Theory.** Elsevier Science, 2002. 3.2, 7
- [37] FRIEDMAN, M.. **A program for monetary stability.** In: READINGS IN FINANCIAL INSTITUTIONS, p. 189–209. Houghton Mifflin and Company, 1965. 3.2
- [38] HARSANYI, J. C.. **Games with incomplete information played by 'bayesian' players, i–iii.part i.** *Management Science*, p. 159–189, 1967. 3.2
- [39] HARSANYI, J. C.. **Games with incomplete information played by 'bayesian' players, i–iii.part ii.** *Management Science*, p. 320–334, 1968. 3.2
- [40] HARSANYI, J. C.. **Games with incomplete information played by 'bayesian' players, i–iii.part iii.** *Management Science*, p. 486–502, 1968. 3.2
- [41] THALER, R. H.. **Anomalies: The winner's curse.** *The Journal of Economic Perspectives*, 2:191–202, 1988. 3.2
- [42] MONOSTORI, Z.. **Discriminatory versus uniform-price auctions.** *MNB Occasional Papers*, No. 111, 2014. (document), 3.1, 2
- [43] FUDENBERG, D.; MASKIN, E.. **The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information.** *Econometrica*, 54(3):533–554, 1986. 3.3
- [44] **Market maker: conheça a sua importância para a liquidez nos mercados.** <https://www.suno.com.br/artigos/market-maker/>. Data de acesso: 24/03/2020. 1