



Camila Sobrinho Crispim

**Dinâmicas minimais em conjuntos de Cantor e
diagramas de Bratteli**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Rio de Janeiro
março de 2021



Camila Sobrinho Crispim

Dinâmicas minimais em conjuntos de Cantor e diagramas de Bratteli

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Meniño Cotón

Departamento de Análise – UFF

Prof. Ali Messaoudi

Departamento de Matemática – UNESP

Prof. Marcelo Sobottka

Departamento de Matemática – UFSC

Rio de Janeiro, 31 de março de 2021

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Camila Sobrinho Crispim

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF) em 2018.

Ficha Catalográfica

Sobrinho Crispim, Camila

Dinâmicas minimais em conjuntos de Cantor e diagramas de Bratteli / Camila Sobrinho Crispim; orientador: Lorenzo Justiniano Díaz Casado. – 2021.

184 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Sistemas Dinâmicos – Teses. 3. Conjunto de Cantor. 4. Diagrama de Bratteli. 5. Equivalência orbital. 6. Grupo abeliano ordenado. 7. Minimalidade. 8. Odômetro. I. Diaz, L.J.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 620.11

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por todo o suporte, carinho, dedicação e apoio em todas as fases da minha vida.

Ao meu orientador Lorenzo Díaz, por todos os ensinamentos, pelas diversas conversas com entusiasmo e paciência que foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

À Maryam Hosseini pelas contribuições fornecidas ao último capítulo deste trabalho.

Aos professores Ali Messaoudi, Carlos Meniño Cotón, Marcelo Sobottka e Rafael Oswaldo Ruggiero por aceitarem fazer parte da banca.

À minha orientadora de iniciação científica, a professora Cybele Vinagre, por ter me incentivado e por ser uma amiga.

Ao Luiz pelo apoio e companheirismo durante todos esses anos e por sempre me incentivar a dar o meu melhor.

Aos meus amigos, em especial: Giovanna, Isabela, Guilherme e Raphael, que me acompanham desde a graduação.

Ao professor Bruno Santiago por ter me apresentado Sistemas Dinâmicos durante o curso de Equações Diferenciais Ordinárias na graduação.

À Capes, à Petrobras e à PUC-Rio pelo apoio financeiro.

O Presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (Capes) - Código de financiamento 001.

Resumo

Sobrinho Crispim, Camila; Diaz, L.J.. **Dinâmicas minimais em conjuntos de Cantor e diagramas de Bratteli**. Rio de Janeiro, 2021. 184p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ é um objeto combinatório representado por um grafo dividido em infinitos níveis, cada um com número finito de vértices e de arestas entre vértices de níveis consecutivos. Além disso, todo vértice possui ligação com vértices dos níveis precedente e sucessor.

Estudamos, do ponto de vista topológico, o espaço dos caminhos infinitos formados pelas arestas de um diagrama de Bratteli, denotado por $X_{\mathfrak{B}}$. Estabelecemos uma relação de equivalência neste espaço, denominada AF. Quando é possível definir uma ordem parcial em $X_{\mathfrak{B}}$ o diagrama é dito ordenado; neste caso, definimos um homeomorfismo em $X_{\mathfrak{B}}$ denominado de função de Bratteli-Vershik. Consideramos sistemas dinâmicos minimais definidos em conjuntos de Cantor e associamos a estes diagramas de Bratteli ordenados.

Um exemplo paradigmático de um conjunto de Cantor é o espaço das sequências infinitas formadas por 0's e 1's, munido de uma métrica apropriada. Neste espaço são definidas as funções odômetro. Definimos a relação de equivalência orbital, na qual duas sequências são equivalentes se estão na mesma órbita do odômetro, e a relação de equivalência de caudas, onde duas sequências são equivalentes se a partir de alguma entrada elas são iguais. Estudamos como estas duas relações estão relacionadas. Provamos que o odômetro diádico é um homeomorfismo minimal definido em um conjunto de Cantor e, portanto, pode ser associado a um diagrama de Bratteli ordenado.

Uma relação de equivalência é dita *étale* quando admite uma topologia gerada por uma ação local. Dois exemplos são as relações AF e orbital. Dada uma relação de equivalência *étale* R em um espaço X , definimos um invariante algébrico $D(X, R)$. Construímos o grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli. Provamos, então, que dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$, seu grupo de dimensão é isomorfo a $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$, onde $R_{\mathfrak{B}}$ é relação AF de $\mathfrak{B}$. Finalmente, estudamos sob quais condições um grupo abeliano ordenado é o grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli.

Esta dissertação é baseada no livro de Ian F. Putnam "Cantor minimal systems", publicado em University Lecture Series, 70. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. [6]

Palavras-chave

Conjunto de Cantor; Diagrama de Bratteli; Equivalência orbital; Grupo abeliano ordenado; Minimalidade; Odômetro.

Abstract

Sobrinho Crispim, Camila; Diaz, L.J. (Advisor). **Minimal dynamics on Cantor sets and Bratteli diagrams**. Rio de Janeiro, 2021. 184p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A Bratteli diagram $\mathfrak{B}$ is a combinatorial object represented by a graph divided into infinite levels, each level with a finite number of vertices and edges between vertices of consecutive levels. Moreover, every vertex is connected to vertices of the preceding and successor levels.

We study, from a topological point of view, the space of infinite paths formed by the edges of a Bratteli diagram, denoted by $X_{\mathfrak{B}}$. We establish an equivalence relation on this space, called the AF relation. When it is possible to define a partial order in $X_{\mathfrak{B}}$ the Bratteli diagram is called ordered; in this case, we define a homeomorphism on $X_{\mathfrak{B}}$ called the Bratteli-Vershik function. We consider minimal dynamic systems defined on Cantor sets and associate to these systems ordered Bratteli diagrams.

A paradigmatic example of a Cantor set is the space of the infinite sequences formed by 0's and 1's, equipped with an appropriate metric. In this space, are defined the odometer functions. We define the orbital equivalence relation, in which two elements of the Cantor set are equivalent if they are in the same orbit of the odometer, and the tail equivalence relation, where two sequences are equivalents if they differ in only finitely many entries. We study how these equivalence relations are related. We prove that the dyadic odometer is a minimal homeomorphism and, therefore, it can be associated to a ordered Bratteli diagram.

An equivalence relation is called *étale* if it admits a topology generated by a local action. Two examples are the AF equivalence relation and the orbital equivalence relation above. Given an *étale* equivalence relation R on a space X , we define an algebraic invariant $D(X, R)$. We construct the dimension group of a Bratteli diagram. Then, we prove that given a Bratteli diagram $\mathfrak{B}$, its dimension group is isomorphic to $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$, where $R_{\mathfrak{B}}$ is the AF equivalence relation of $\mathfrak{B}$. Finally, we study under which conditions an ordered abelian group is the dimension group for some Bratteli diagram.

This master thesis is based on the book by Ian F. Putnam "Cantor minimal systems", published in University Lecture Series, 70. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. [6]

Keywords

Abelian ordered group; Bratteli diagram; Cantor set; Minimality; odometer.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Introdução	11
1.1.1	O odômetro diádico e diagrama de Bratteli	12
1.1.2	Diagramas de Bratteli e sistemas de Cantor minimais	15
1.2	Organização desta dissertação	20
2	Odômetro	23
2.1	Adição de sequências	23
2.2	Odômetro	23
2.3	Outra relação de equivalência	30
3	Conjuntos de Cantor	33
3.1	Conceitos preliminares	33
3.2	Conjuntos de Cantor	41
4	Equivalência orbital	45
5	Diagrama de Bratteli	48
5.1	Diagrama de Bratteli: definição e compacidade do espaço $X_{\mathfrak{B}}$	48
5.2	Propriedade telescópica de um diagrama de Bratteli	55
5.3	Relação de equivalência AF	56
5.4	Exemplos	59
6	O modelo de Bratteli-Vershik	61
6.1	Diagrama de Bratteli ordenado	61
6.2	As relações $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ e $R_{\mathfrak{B}}$	66
7	Partições de Kakutani-Rokhlin	72
7.1	Castelos	72
7.1.1	Construção de $\mathfrak{B}$	78
7.1.2	Construção da conjugação entre $X_{\mathfrak{B}}$ e X	79
8	Relações de equivalência étale	84
8.1	Ações locais e relações de equivalência Étale	84
8.2	$R_{\mathfrak{B}}$ como uma relação de equivalência étale	88
8.2.1	Relação AF em um conjunto de Cantor	92
8.3	R_{φ} como uma relação de equivalência étale	97
9	Conceitos de Álgebra	100
9.1	Grupos	100
9.2	Grupos abelianos ordenados	101
10	O invariante D	104
10.1	O grupo $C(X, \mathbb{Z})$	104
10.2	O invariante	107

11 O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli	112
11.1 Limite indutivo de grupos	112
11.2 O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli	119
11.2.1 A função $h_{\mathfrak{B}_n}$	119
11.2.2 O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli	122
11.2.3 O grupo de dimensão e a propriedade telescópica	127
11.2.4 O grupo de dimensão e a ordem unitária	128
12 O invariante para as relações AF e orbital	133
12.1 O invariante para relações-AF	133
12.2 O invariante para o modelo de Bratteli-Vershik	138
13 O Teorema de Effros-Handelman-Shen	144
13.1 O Teorema de Effros-Handelman-Shen	144
13.1.1 O Teorema de Shen	147
13.1.2 Fim da prova do Teorema de Effros-Handelman-Shen	156
14 O Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger	160
14.1 Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger	160
15 Equivalência orbital forte	167
15.1 Cociclos orbitais	167
15.2 Equivalência orbital forte e classificação	172
16 Equivalência orbital versus conjugação	181
16.1 Equivalência orbital versus conjugação	181
Referências bibliográficas	184

Lista de figuras

Figura 1.1	Uma rotação em $\mathbf{S}^1$	11
Figura 1.2	Grafo infinito $\mathfrak{B}$.	13
Figura 1.3	Diagrama de Bratteli que não é próprio	16
Figura 2.1	Ilustração da permutação dos cilindros de tamanho dois.	29
Figura 3.1	Ilustração de uma sequência de partições refinadoras.	36
Figura 5.1	Exemplo de um diagrama de Bratteli	48
Figura 5.2	Diagrama de Bratteli que representa $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$	60
Figura 5.3	Diagrama $\mathfrak{T}$, onde $X_{\mathfrak{T}}$ é um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.	60
Figura 6.1	Diagrama de Bratteli próprio.	65
Figura 6.2	Diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$	65
Figura 6.3	Diagrama de Bratteli $\mathfrak{Q}$	66
Figura 7.1	Ilustração de um castelo.	75
Figura 11.1	Diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$	122
Figura 11.2	Diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, r, s)$	124
Figura 11.3	Exemplo de diagrama de Bratteli com mais de um elemento em V_0 .	129
Figura 13.1	Diagrama comutativo	155
Figura 13.2	Diagrama comutativo	157
Figura 14.1	Diagrama de Bratteli $\mathfrak{E}$.	161
Figura 14.2	$\mathfrak{Q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{T})$.	162
Figura 16.1	Primeiro passo da primeira etapa da Construção da transformação de Chacón.[1]	182
Figura 16.2	Segundo passo da primeira etapa da construção da transformação de Chacón.[1]	183
Figura 16.3	Fim da primeira etapa da construção da transformação de Chacón. [1]	183

1

Introdução

1.1

Introdução

Na teoria dos sistemas dinâmicos um dos objetos centrais de estudo é o comportamento das órbitas. Isto é, dados um espaço métrico (X, d) , um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$ e um ponto x de X , estudamos como se comporta o conjunto

$$\mathcal{O}_\varphi(x) := \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

denominado de órbita de x por φ . Associada à função $\varphi : X \rightarrow X$ definimos a *relação de equivalência orbital*, denotada por R_φ , onde $x, y \in X$ são equivalentes se, e só se, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = \varphi^n(x)$. A classe de equivalência de um ponto x na relação orbital é o conjunto $\mathcal{O}_\varphi(x)$.

O homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$ é dito minimal se para todo $x \in X$ o conjunto $\mathcal{O}_\varphi(x)$ é denso. Baseado nesta definição, dizemos que uma relação de equivalência definida no conjunto X é minimal se todas suas classes de equivalência são densas. Dessa forma, a função φ é minimal se e somente se a relação R_φ é minimal.

Um exemplo muito simples de função minimal é a rotação no círculo

$$\mathbf{S}^1 := \{e^{2\pi i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

por um ângulo irracional α , definida por

$$\rho_\alpha(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}.$$

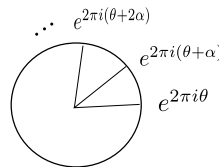


Figura 1.1: Uma rotação em $\mathbf{S}^1$

Como na rotação deslocamos sempre o mesmo ângulo, observamos que as rotações no círculo são isometrias.

O foco desta dissertação é estudar sistemas dinâmicos (X, φ) tais que X é um conjunto de Cantor e a função φ é um homeomorfismo minimal.

Um conjunto de Cantor é um espaço métrico compacto, totalmente desconexo e sem pontos isolados. Veremos que todos os conjunto de Cantor são homeomorfos.

A partir de agora, consideraremos que X é um conjunto de Cantor e $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Veremos, em primeiro lugar, a maioria dos conceitos apresentados nesta dissertação para o exemplo mais simples e paradigmático de dinâmicas minimais em um conjunto Cantor, que generaliza as rotações irracionais: a função odômetro diádico.

1.1.1

O odômetro diádico e diagrama de Bratteli

Considere o espaço das sequências infinitas formadas por 0's e 1's, denotado por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Denotamos um elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ por $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots) = (x_n)_{n \geq 1}$, onde $x_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \geq 1$. Em particular, denotamos $\mathbf{0} = (00 \dots)$ e $\mathbf{1} = (11 \dots)$. Consideramos para $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a métrica

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 \neq y_1, \\ \inf\{2^{-n} \mid n \geq 1, x_i = y_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}, & \text{se } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Desta forma, o espaço métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ é um conjunto de Cantor.

O odômetro diádico é a função definida por:

$$\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (1000 \dots),$$

precisamos definir o que é somar o elemento $(1000 \dots)$ a um elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Primeiro, definimos que

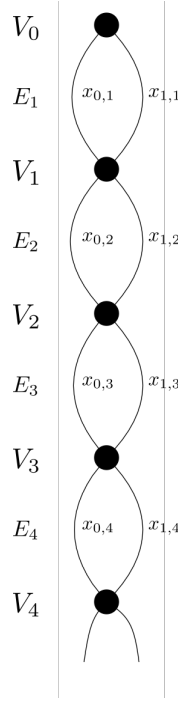
$$\mathbf{1} + (1000 \dots) = \mathbf{0}.$$

Agora, considere $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots) \neq \mathbf{1}$, existe n mínimo tal que $x_n = 0$, definimos, então,

$$\mathbf{x} + (1000 \dots) = (00 \dots 01 x_{n+1} x_{n+2} \dots).$$

Repare que, assim como nas rotações irracionais, no odômetro estamos sempre transladando um mesmo valor, portanto, o odômetro também é uma isometria.

Provamos que o odômetro é um homeomorfismo e que a relação de equivalência R_Φ é minimal. Portanto o odômetro diádico é um homeomorfismo minimal definido em um conjunto de Cantor.

Figura 1.2: Grafo infinito $\mathfrak{B}$.

Considere o grafo infinito apresentado na Figura 1.2, este diagrama é um caso particular de diagrama de Bratteli. Note que $\mathfrak{B}$ está dividido em infinitos níveis de vértices $\{V_n\}_{n \geq 0}$, onde $V_n = \{v_n\}$ e de arestas $\{E_n\}_{n \geq 1}$, onde $E_n = \{x_{0,n}, x_{1,n}\}$. Repare, também, que não há nenhum vértice que não receba uma aresta. Assim, existem "caminhos infinitos" formados pelas arestas do grafo. Denotamos o espaço de todos os caminhos infinitos formado pelas arestas de $\mathfrak{B}$ por $X_{\mathfrak{B}}$ e um elemento de $X_{\mathfrak{B}}$ por $\mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1}$, onde $x_i \in \{x_{0,i}, x_{1,i}\}$ para todo $i \geq 1$. O espaço $X_{\mathfrak{B}}$ é compacto quando considerada uma métrica apropriada. Repare que como há uma escolha diádica para as entradas do caminho, o espaço $X_{\mathfrak{B}}$ é o mesmo que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Definimos uma relação de equivalência em $X_{\mathfrak{B}}$, denominada relação AF e denotada por $R_{\mathfrak{B}}$, onde dois elementos são equivalentes se diferem em um número finito de entradas. Podemos definir, para cada $n \geq 1$,

$$x_{\min,n} := x_{0,n} < x_{1,n} =: x_{\max,n}.$$

Denominamos $x_{\min,n}$ e $x_{\max,n}$ como, respectivamente, as arestas mínima e máxima no nível E_n . Denotamos $\mathbf{x}_{\max} = (x_{\max,n})_{n \geq 1}$ e $\mathbf{x}_{\min} = (x_{\min,n})_{n \geq 1}$. Note que estes elementos estão unicamente determinados e estão em $X_{\mathfrak{B}}$.

Seja $\varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ o homeomorfismo tal que

$$\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) = \mathbf{x}_{\min}$$

e se $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\max}$,

$$\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) = (x_{(\min,1)}, \dots, x_{(\min,n-1)}, x_{(\max,n)}, x_{n+1}, \dots),$$

onde n é a primeira entrada de $\mathbf{x}$ que não é uma aresta máxima. A função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ se assemelha com o odômetro diádico.

Denominamos $\varphi_{\mathfrak{B}}$ de função de *Bratteli-Vershik* associada a $\mathfrak{B}$. O homeomorfismo

$$h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad h((x_{i_n, n})_{n \geq 1}) = (i_n)_{n \geq 1}, \quad i_n \in \{0, 1\} \text{ para todo } n \geq 1$$

é uma conjugação entre os sistemas $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \Phi)$ e $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$. Isto é, $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é um homeomorfismo e

$$h \circ \varphi_{\mathfrak{B}} = \Phi \circ h.$$

Portanto, a um sistema dinâmico minimal associamos um diagrama de Bratteli.

Ainda no exemplo acima, para cada vértice v_n consideramos o grupo abeliano

$$\mathbb{Z}v_n = \{mv_n \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Definimos, para cada $n > 0$ um homomorfismo $h_{\mathfrak{B}_n} : \mathbb{Z}v_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}v_n$ por

$$h_{\mathfrak{B}_n}(mv_{n-1}) = 2mv_n.$$

Dado $\ell > 0$, definimos, também

$$h_{\mathfrak{B}_n}^{\ell} = h_{\mathfrak{B}_\ell} \circ \dots \circ h_{\mathfrak{B}_{n+2}} \circ h_{\mathfrak{B}_{n+1}}.$$

Repare que, pela definição do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$, para todo $n > 0$, existem duas arestas ligando o vértice v_{n-1} ao vértice v_n . Consideramos então, a união disjunta dos grupos $\mathbb{Z}v_n$:

$$\bigsqcup_n \mathbb{Z}v_n = \{(mv_n, n) \mid n \geq 0, m \in \mathbb{Z}\}$$

e estabelecemos uma relação de equivalência em $\bigsqcup_n \mathbb{Z}v_n$, onde dois elementos (v_n, n) e (v_k, k) são equivalentes se existem inteiros não negativos ℓ e k tais que

$$h_{\mathfrak{B}_n}^{\ell}(v_n) = h_{\mathfrak{B}_m}^k(v_m) \quad \text{e } n + \ell = m + k.$$

O grupo formado por todas as classes de equivalência desta relação é chamado de grupo de dimensão do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e denotado por $D(\mathfrak{B})$.

Mostraremos que $D(\mathfrak{B})$ é isomorfo ao grupo diádico

$$\left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Podemos representar a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ pelo conjunto

$$R_{\mathfrak{B}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_{\mathfrak{B}} \times X_{\mathfrak{B}} \mid \mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{y}\}.$$

Fixe $N > 0$, denotamos o conjunto dos caminhos que ligam o vértice v_0 ao vértice v_N por $E_{0,N}$ e um elemento de $E_{0,N}$ por $p = (p_1, \dots, p_N)$. Definimos o cilindro centrado em p por

$$C(p) = \{\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}} \mid (x_1, \dots, x_N) = (p_1, \dots, p_N)\}.$$

Agora, dados $p, q \in E_{0,N}$, considere o conjunto

$$\gamma(p, q) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in C(p), \mathbf{y} \in C(q) \text{ e } x_n = y_n \text{ para todo } n > N\}.$$

Provamos que a coleção formada pelo conjunto vazio e por todos os conjuntos $\gamma(p, q)$, onde $p, q \in E_{0,N}$ e $N \geq 1$, gera uma base para uma topologia do conjunto $R_{\mathfrak{B}}$ denominada *étale*. Observamos que a topologia *étale* não é a mesma que a induzida pela topologia produto.

Considere o grupo quociente

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) = C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z}) / B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}),$$

onde $C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z})$ é o grupo das funções contínuas de $X_{\mathfrak{B}}$ em $\mathbb{Z}$ e $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ o subgrupo de $C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z})$ gerado pelas funções da forma $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma(p,q))} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma(p,q))}$, onde $\mathcal{X}$ é a função característica e π_1 e π_2 são, respectivamente, as projeções na primeira e na segunda coordenada. Provamos que $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ é isomorfo ao grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$, portanto, também é isomorfo ao grupo diádico.

Agora que os conceitos já foram apresentados para um exemplo, vamos apresentá-los em um caso geral.

1.1.2

Diagramas de Bratteli e sistemas de Cantor minimais

Um *Diagrama de Bratteli* é um grafo infinito, denotado por

$$\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E = \{E_n\}_{n \geq 1}, s = \{s_n\}_{n \geq 1}, r = \{r_n\}_{n \geq 1}),$$

onde V é conjunto dos vértices, E o conjunto de pares e V_n e E_n são conjuntos finitos para todo n . Para cada $n > 1$, temos que $s_n : E_n \rightarrow V_{n-1}$ e $r_n : E_n \rightarrow V_n$. Além disso, $s^{-1}\{v\} \neq \emptyset$ para todo $v \in \cup_{n \geq 1} V_n$ e $r^{-1}\{v\} \neq \emptyset$ para todo $v \in \cup_{n \geq 0} V_n$, isto é, não existe vértice que está desconectado. Assim, é possível formar caminhos infinitos com as arestas de $\mathfrak{B}$. Denotamos o espaço dos caminhos infinitos de $\mathfrak{B}$ por $X_{\mathfrak{B}}$.

Dizemos que duas arestas e e w entre os níveis V_{n-1} e V_n são *comparáveis* se, e só se, incidem sobre o mesmo vértice em V_n , isto é, $r(e) = r(w)$. Assim, é possível ordenar as arestas que são comparáveis em E_n e é possível determinar um elemento máximo e um elemento mínimo. Neste caso, $\mathfrak{B}$ é um *diagrama de Bratteli ordenado*.

O diagrama de Bratteli da Figura 1.2 possui apenas um caminho infinito formado somente por arestas máximas e um caminho infinito formado por arestas mínimas, mas há casos em que isso não ocorre. Por exemplo, na Figura 1.3, apresentamos um grafo em que isto não ocorre, já que todo vértice só recebe uma aresta, toda aresta é máxima e mínima ao mesmo tempo. Assim, temos mais de um caminho infinito formado somente por arestas máximas e mais de um caminho infinito formado somente por arestas mínimas.

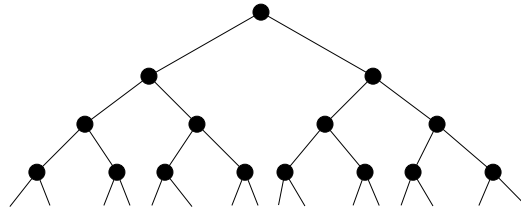


Figura 1.3: Diagrama de Bratteli que não é próprio

Se existir uma ordem em que o caminho infinito formado apenas por aresta máxima e o caminho infinito formado apenas por arestas mínimas são únicos, dizemos que $\mathfrak{B}$ é um *diagrama de Bratteli ordenado e próprio*. Denotamos por $\mathbf{x}_{\max}$ e por $\mathbf{x}_{\min}$ os caminhos formados somente por arestas máximas e mínimas, respectivamente.

Suponha que $\mathfrak{B}$ é um diagrama de Bratteli ordenado e próprio. Dado $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\max}$, existe $n > 0$ tal que x_n não é uma aresta máxima, considere que n é mínimo com tal propriedade. Seja y_n comparável com x_n e seguinte a x_n na ordem de $\mathfrak{B}$ e $(y_1, \dots, y_{n-1})$ um caminho formado somente por arestas mínimas

ligando v_0 ao vértice que se origina a aresta y_n , definimos o homeomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} &\rightarrow X_{\mathfrak{B}} \\ \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) &= \mathbf{x}_{\min}, \\ \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) &= (y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots), \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\max}.\end{aligned}$$

Denominamos o homeomorfismo $\varphi_{\mathfrak{B}}$ de *função de Bratteli-Vershik* associada a $\mathfrak{B}$. Pela definição da função $\varphi_{\mathfrak{B}}$, temos que

$$\varphi(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) = (\tilde{y}_1, y_2, y_3, \dots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

onde $\tilde{y}_1$ é o elemento seguinte a y_1 na ordem considerada.

Mais uma vez, a função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é parecida com o odômetro diádico, mas desta vez há mais opções para as entradas.

Provaremos, que dados um conjunto de Cantor X e um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$, existe um diagrama de Bratteli ordenado e próprio $\mathfrak{B}$ tal que (X, φ) e $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ são conjugados.

,Se $\gamma : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo e $U, V \subset X$ são abertos, dizemos que γ é um homeomorfismo parcial. Dizemos que Γ é uma ação loca, se Γ é uma coleção de homeomorfismos parciais em X tal que:

1. se $\gamma \in \Gamma$, então $\gamma^{-1} \in \Gamma$;
2. se γ_1 e γ_2 estão em Γ , então $\gamma_1 \circ \gamma_2$ e $\gamma_1 \cap \gamma_2$ estão em Γ ;
3. a coleção de conjuntos

$$\{U \subset X \mid U \text{ é aberto e } \text{id}_U \in \Gamma\}$$

forma uma base para a topologia de X .

Para cada $\gamma \in \Gamma$, denotamos por U_{γ} o seu domínio e representamos γ como o par $(U_{\gamma}, \gamma(U_{\gamma}))$. Veremos que a propriedade de que a interseção de dois homeomorfismo parciais de Γ está em Γ fornece informações topológicas interessantes.

Então definimos a relação de equivalência R_{Γ} em X , onde dois elementos x e y estão associados, se existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $y = \gamma(x)$. Podemos representar a relação R_{Γ} como o subconjunto

$$R_{\Gamma} := \left\{ (x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{(x, \gamma(x))\}, x \in U_{\gamma} \right\} \subset X \times X.$$

Provaremos que Γ é base de uma topologia em R_Γ . Denominamos tal topologia de *étale* e R_Γ de relação de equivalência *étale*. Dois exemplos de relação de equivalência *étale* são a relação de equivalência orbital e a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$, onde $\mathfrak{B}$ é um diagrama de Bratteli. Dizemos que duas relações de equivalência *étale* R e Q definidas em X e Y , respectivamente, são isomorfas se existe um homeomorfismo $g : X \rightarrow Y$ tal que $g \times g : R \rightarrow Q$ é um homeomorfismo quando consideradas as topologias *étales* de R e Q .

Dada uma relação de equivalência *étale* R em um espaço métrico X , definimos o grupo quociente

$$D(X, R) = C(X, \mathbb{Z})/B(X, R),$$

onde $C(X, \mathbb{Z})$ é grupo das funções contínuas de X em $\mathbb{Z}$ e $B(X, R)$ o subgrupo de $C(X, \mathbb{Z})$ gerado pelas funções da forma $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$, onde π_1 e π_2 são, respectivamente, as projeções na primeira e na segunda coordenada e $\gamma \subset R$ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto. Provamos que este grupo quociente é um invariante algébrico para relações de equivalência *étale* em espaços compactos e totalmente desconexos. Isto é, se (X, R) e (Y, Q) são relações de equivalência *étale* isomorfas, então os grupos $D(X, R)$ e $D(Y, Q)$ são isomorfos.

Dado um grupo abeliano $(G, +)$, dizemos que G^+ é o *cone positivo* de G , se G^+ é fechado para a operação de G ,

$$G^+ - G^+ = G \quad \text{e} \quad G^+ \cap (-G^+) = \{0\}.$$

Se o grupo G possui um cone positivo, dizemos que (G, G^+) é um *grupo abeliano ordenado*. Dados $a, b \in G$, definimos que $a \leq b$ se, e só se, $b - a \in G^+$.

Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E = \{E_n\}_{n \geq 1}, r, s)$, para cada $n \geq 0$, considerando os conjunto

$$\mathbb{Z}V_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\#V_n} m_i v_i^n \mid m_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } 1 \leq i \leq \#V_n \right\}$$

e

$$\mathbb{Z}V_n^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{\#V_n} m_i v_i^n \mid m_i \geq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq \#V_n \right\}$$

o par $(\mathbb{Z}V_n, \mathbb{Z}V_n)^+$ forma um grupo abeliano ordenado.

Consideramos a união disjunta dos grupos $\mathbb{Z}V_n$

$$\bigsqcup_n \mathbb{Z}V_n = \{(a, n) \mid n \geq 0, a \in \mathbb{Z}V_n\},$$

e para cada $n > 0$ um homomorfismo $h_{\mathfrak{B}_n} : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n$, definido por

$$h_{\mathfrak{B}_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} m_i v_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) m_i \right) v_j^n.$$

Note que, dados $1 \leq i \leq \#V_{n-1}$ e $1 \leq j \leq \#V_{n+1}$ o número

$$\#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\})$$

é a quantidade de arestas que ligam o vértice v_i^{n-1} ao vértice v_j^n . No caso do diagrama de Bratteli da Figura 1.2, há sempre duas arestas ligando vértices de níveis consecutivos.

Dado $\ell > 0$, definimos a composição $h_{\mathfrak{B},n}^\ell$ como no caso anterior.

Estabelecemos, também, uma relação de equivalência em $\bigsqcup_n \mathbb{Z}V_n$, onde dois elementos (a, n) e (b, m) estão relacionados se, e só se, existem inteiros não negativos k e ℓ , tais que

$$h_{\mathfrak{B}_n}^k(a) = h_{\mathfrak{B}_m}^\ell(b) \quad \text{e } n + k = m + \ell.$$

Definimos o conjunto de todas as classes de equivalência desta relação como o grupo de dimensão do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$, denotado por $D(\mathfrak{B})$.

Provamos que se $\mathfrak{B}$ é um diagrama de Bratteli tal que V_0 possui somente um elemento, os invariantes $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ são isomorfos ao grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$.

Um grupo abeliano ordenado (G, G^+) é dito *perfurado* se existem um $a \in G$ e um inteiro positivo n tais que $a \notin G^+$ e $na \in G^+$. Caso contrário, dizemos que (G, G^+) é *sem perfuração*.

Agora, dizemos que (G, G^+) satisfaz a *interpolação de Riesz* se dados quaisquer $a, b, c, d \in G$, tais que $a, b \leq c, d$, existe $e \in G$ tal que $a, b \leq e \leq c, d$.

Um dos principais teoremas apresentados é o Teorema de Effros-Handelman-Shen que determina sob quais condições um grupo abeliano ordenado é o grupo de dimensão de algum diagrama de Bratteli. Este teorema é útil, porque através dele podemos obter diagramas de Bratteli, simplesmente, verificando se um grupo abeliano é enumerável, sem perfuração e satisfaz a interpolação de Riesz.

Outro teorema fundamental é o Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger. Este teorema informa quando dados dois diagramas de Bratteli $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ os invariantes $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$ são invariantes completos, isto é, as relações de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ e $R_{\mathfrak{T}}$ são isomorfas se, e só se, os invariantes $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$ são isomorfos.

Agora, voltamos às relações de equivalência. Dizemos que duas relações de equivalência R e Q definidas nos conjuntos de Cantor X e Y , respectivamente, são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(\langle x \rangle_R) = \langle h(x) \rangle_Q$. Em particular, se $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ são homeomorfismos minimais e as relações orbitais R_φ e R_ψ são equivalentes dizemos que o homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ é uma *equivalência orbital* entre (X, φ) e (Y, ψ) . Provamos que $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital entre (X, φ) e (Y, ψ) se e somente se existem funções, denominadas cociclos orbitais, $m_h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ e $n_h : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$h \circ \varphi(x) = \psi^{m_h(x)} \circ h(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

e

$$h^{-1} \circ \psi(y) = \varphi^{n_h(y)} \circ h^{-1}(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Uma equivalência orbital tal que seus cociclos orbitais possuem, cada um, no máximo um ponto de descontinuidade é dita forte.

Provamos, usando o Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger, que dados conjuntos de Cantor X e Y e homeomorfismos minimais $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$, os invariantes $D(X, R_\varphi)$ e $D(Y, R_\psi)$ são isomorfos se e somente se existe uma equivalência orbital forte entre (X, φ) e (Y, ψ) .

Concluimos a dissertação com uma breve discussão sobre quando uma equivalência orbital entre (X, φ) e (Y, ψ) é uma conjugação entre os sistemas (X, φ) e (Y, ψ) .

1.2

Organização desta dissertação

Abaixo segue uma descrição específica do que é feito em cada capítulo:

No Capítulo 2, definiremos a função odômetro, a relação orbital associada ao odômetro e a relação de equivalência de caudas. Provaremos que a relação orbital associada ao odômetro é minimal. Além disto, estudaremos como a relação orbital e a relação de equivalência de caudas se relacionam.

No Capítulo 3, definiremos um conjunto de Cantor e conceitos necessário para mostrar que quaisquer dois conjuntos de Cantor são homeomorfos.

No Capítulo 4, definiremos a relação de equivalência orbital e o conceito de equivalência orbital entre duas relações de equivalência. Dados X e Y espaços conexos e homeomorfismos $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ sem pontos periódicos, mostraremos que se existe uma equivalência orbital entre R_φ e R_ψ , então existe uma conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ) ou entre (X, φ) e (Y, ψ^{-1}) .

No Capítulo 5, definiremos na Seção 5.1 um diagrama de Bratteli e mostraremos que o espaço dos caminhos infinitos formado pelas arestas de um digrama de Bratteli, munido com uma métrica apropriada, é compacto. Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ explicaremos como obter um novo diagrama de Bratteli a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência. Estabeleceremos um homeomorfismo entre $X_{\mathfrak{B}}$ e o espaço dos caminhos infinitos formado pelas arestas deste novo diagrama. Definiremos a relação de equivalência AF e o que é um diagrama de Bratteli simples.

No Capítulo 6, definiremos, em primeiro lugar, um diagrama de Bratteli ordenado e próprio e a aplicação de Bratteli-Vershik. Também estudaremos o comportamento da relação orbital $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ quando $\mathfrak{B}$ é um diagrama de Bratteli ordenado e próprio.

No Capítulo 7, dados um conjunto de Cantor X e um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$, construiremos um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ ordenado simples e próprio, tal que os sistemas dinâmicos (X, φ) e $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ são topologicamente conjugados. Para isto, definiremos a partição de Kakutani-Rokhlin, ou castelo, de um conjunto de Cantor X e uma sequência de castelos refinadores de X . Mostraremos, também, a existência de uma sequência de castelos refinadores de um conjunto de Cantor. Construiremos o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e definimos a conjugação entre (X, R) e $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$.

No Capítulo 8, definiremos uma ação local, uma relação de equivalência étale e quando dois espaços (X, R_{Γ}, Γ) e $(Y, Q_{\Upsilon}, \Upsilon)$ são isomorfos, onde X e Y são espaços métricos, Γ e Υ ações locais e R_{Γ} e Q_{Υ} são as relações de equivalência étale induzidas por Γ e Υ . Mostraremos que $R_{\mathfrak{B}}$ é uma relação de equivalência étale. Também definiremos o que é uma relação de equivalência AF em um espaço topológico qualquer X . Provaremos sob quais condições uma relação de equivalência étale definida em um conjunto de Cantor é uma relação de equivalência AF. Mostraremos que a relação orbital é uma relação de equivalência étale e que dados um conjunto de Cantor e um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$, não existe nenhum diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ tal que as relações R_{φ} e $R_{\mathfrak{B}}$ são isomorfas.

Os objetos algébricos necessários para o que será feito a seguir serão tratados no Capítulo 9.

No Capítulo 10, definiremos o invariante algébrico $D(X, R)$, onde X é um espaço métrico compacto e totalmente desconexo e R é uma relação de equivalência étale definida em X . Provaremos que se R e Q são relações de equivalência étale definidas em X e Y , respectivamente, tais que (X, R) e (Y, Q) são isomorfos então existe um isomorfismo ordenado entre os invariantes $D(Y, Q)$ e $D(X, R)$.

No Capítulo 11, dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ definiremos o grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$ do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$. Mostraremos que dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e um diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$ obtido através de $\mathfrak{B}$ a partir de uma subsequência existe um isomorfismo entre $D(\mathfrak{B})$ e $D(\mathfrak{T})$.

No Capítulo 12, estudaremos o invariante $D(X_{\mathfrak{B}}, R)$ quando R é a relação $R_{\mathfrak{B}}$ e quando R é a relação $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$.

Nos Capítulos 13 e 14, provaremos o Teorema de Effros-Handelman-Shen e o Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger, respectivamente.

No Capítulo 15, na Seção 15.1 definiremos o que são os cociclos orbitais associados a uma equivalência orbital. Na seção 15.2 definiremos o que é uma equivalência orbital forte e provaremos que dados conjuntos de Cantor X e Y e homeomorfismos minimais $\varphi: X \rightarrow X$ e $\psi: Y \rightarrow Y$, existe uma equivalência orbital forte entre (X, φ) e (Y, ψ) se e somente se existe um isomorfismo ordenado que preserva ordem unitária entre os invariantes $D(X, R_{\varphi})$ e $D(Y, \psi)$.

Finalmente, no capítulo 16, apresentaremos um exemplo de quando uma equivalência orbital não é uma conjugação.

2

Odômetro

O objetivo deste capítulo é definir a função odômetro e provar a sua minimalidade.

2.1

Adição de sequências

Denotamos por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências infinitas de 0's e 1's e um elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ por $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$, tal que $x_n \in \{0, 1\}$ para todo $n \geq 1$. Com o intuito de definir a função odômetro, precisamos definir a soma de dois elementos neste espaço, o que não pode ser feito da mesma forma que somamos números representados na base decimal, já que as sequências são infinitas e, portanto, não conseguimos determinar quem é o último elemento a direita. Por isso, precisamos somar da esquerda para direita. Dados dois elementos $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ e $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, definimos que

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z} = (z_n)_{n \geq 1},$$

e consideramos a sequência auxiliar $\{w_n\}_{n \geq 1}$, onde se $x_1 + y_1 < 2$, então $z_1 = x_1 + y_1$ e definimos $w_1 = 0$. Agora, se $x_1 + y_1 = 2$, então $z_1 = 0$ e definimos $w_1 = 1$. Considere, agora, que $n > 1$ e que já foram definidos os valores de z_{n-1} e w_{n-1} . Se $x_n + y_n + w_{n-1} < 2$, então $z_n = x_n + y_n + w_{n-1}$ e definimos que $w_n = 0$. Caso, $x_n + y_n + w_{n-1} \geq 2$, temos que $z_n = x_n + y_n + w_{n-1} - 2$ e definimos $w_n = 1$. Dessa forma, quando somamos duas entradas iguais a 1 o resultado é 0 e transportamos 1 para a soma das entradas seguintes.

2.2

Odômetro

Dado um espaço métrico (X, d) e um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$, definimos a órbita de um ponto $x \in X$ por f como o conjunto

$$\mathcal{O}_\varphi(x) = \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dizemos que a função φ é minimal se $\mathcal{O}_\varphi(x)$ é um conjunto denso para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que (X, φ) é um sistema dinâmico minimal.

A partir de agora, considere que $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e a função $\Phi : X \rightarrow X$ definida por

$$\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (1000 \dots), \quad \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{1}. \quad (2.2.1)$$

O objetivo desta seção é mostrar que (X, Φ) é um sistema dinâmico minimal. Para isto, precisamos de alguns conceitos.

Considere a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 \neq y_1, \\ \inf\{2^{-n} \mid n \geq 1, x_i = y_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}, & \text{se } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Proposição 2.2.1. *A função d é uma métrica no espaço X .*

Prova. Mostraremos que a função d satisfaz as propriedades da definição de métrica. Segue direto da definição que a função d satisfaz a propriedade simétrica.

Mostraremos agora que d satisfaz a propriedade reflexiva. Seja $\mathbf{x} \in X$. Pela definição da função d , temos que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0.$$

Por outro lado, considere que $\mathbf{y}$ seja um elemento de X tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Então

$$\inf\{2^{-n} \mid n \geq 0, x_i = y_i, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n\} = 0.$$

Logo, $x_i = y_i$ para todo $i \geq 1$. Portanto, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e d satisfaz a propriedade reflexiva.

Por último, provaremos que d satisfaz a desigualdade triangular. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ elementos de X . Consideraremos, primeiro, o caso em que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$. Neste caso, $x_1 \neq y_1$, então z_1 é igual ou a x_1 ou a y_1 . Portanto, $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 1$ ou $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 1$. Logo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Agora, consideraremos o caso em que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1$. Neste caso, existe n tal que $x_i = y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Se $z_1 \neq x_1 = y_1$, temos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1$ e, portanto a desigualdade triangular é satisfeita. Se $z_1 = x_1 = y_1$, existe k tal que $z_i = x_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Caso $k \leq n$, temos que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{2}{2^k} \geq \frac{1}{2^n} = d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Agora, se $k > n$, temos que $y_{n+1} \neq z_{n+1}$. Então,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^n} = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Concluimos, assim, que d é uma métrica e, portanto (X, d) é um espaço métrico. ■

Definição 2.2.2 (Cilindros). *Seja o conjunto*

$$[\mathbf{x}]_n = \{\mathbf{y} \in X \mid y_1 = x_1, y_2 = x_2 \dots y_n = x_n\},$$

tais conjuntos são chamados de cilindros.

Quando for conveniente, usaremos as notações:

$$[a^{n-1}b]_n = \{\mathbf{x} \in X \mid x_i = a \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } x_n = b\}$$

e

$$[x_1x_2 \dots x_n] = \{\mathbf{y} \in X \mid y_1 = x_1, y_2 = x_2 \dots y_n = x_n\}.$$

Os cilindros geram a base da topologia em (X, d) , e temos que X é a união de todos os 2^n cilindros de tamanho n . Note que se dois cilindros de mesmo tamanho são diferentes, então eles são disjuntos.

Denominamos a função $\Phi : X \rightarrow X$, definida na equação (2.2.1) por odômetro diádico. Repare que, na prática, de acordo com a definição de soma no espaço X , temos,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1x_2x_3 \dots, & \text{se } x_1 = 0, \\ 00 \dots (x_i = 1)x_{i+1}x_{i+2} \dots, & \text{se } x_k = 1 \text{ para todo } k < i \text{ e } x_i = 0, \\ \Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lema 2.2.3. *Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}' \in X$, definimos $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y}' = \Phi(\mathbf{x}')$. Se $x_n = x'_n$ para todo $1 \leq n \leq N$ então $y_n = y'_n$ para todo $1 \leq n \leq N$.*

Prova. Considere que i e j são as primeiras entradas tais que $x_i = 0$ e $x'_j = 0$. Consideraremos dois casos. O primeiro é quando $i = j$. Neste caso, $1 \leq i, j \leq N$. Pela definição da função Φ ,

$$(\Phi(\mathbf{x}))_\ell = (\Phi(\mathbf{x}'))_\ell = 0 \text{ para todo } \ell < i, j, \quad (\Phi(\mathbf{x}))_i = (\Phi(\mathbf{x}'))_j = 1$$

e as demais entradas permanecem inalteradas. Portanto, $y_n = y'_n$ para todo $1 \leq n \leq N$.

Agora, consideramos o caso em que $i \neq j$. Neste caso temos que $N < i, j$, assim $y_n = y'_n$ para todo $1 \leq n \leq N$. Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Proposição 2.2.4. *A função Φ é um homeomorfismo.*

Prova. Considere a função $\varphi : X \rightarrow X$, definida por:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0x_2x_3\ldots, & \text{se } x_1 = 1, \\ 11\ldots(x_i = 0)x_{i+1}x_{i+2}\ldots, & \text{se } x_k = 0 \text{ para todo } k < i \text{ e } x_i = 1, \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lema 2.2.5. *A função φ é a função inversa de Φ .*

Prova. Mostraremos que para todo $\mathbf{x} \in X$,

$$\varphi \circ \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Phi \circ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Seja $\mathbf{x} \in X$. Temos que

$$\varphi(\Phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} \varphi(1x_2x_3\ldots), & \text{se } x_1 = 0, \\ \varphi(00\ldots(x_i = 1)x_{i+1}x_{i+2}\ldots), & \text{se } x_k = 1 \text{ para todo } k < i \text{ e } x_i = 0, \\ \varphi(\mathbf{0}) & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Pela definição da função φ , segue que

$$\varphi(\Phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0x_2x_3\ldots, & \text{se } x_1 = 0, \\ 11\ldots(x_i = 0)x_{i+1}x_{i+2}\ldots, & \text{se } x_k = 1 \text{ para todo } k < i \text{ e } x_i = 0, \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Então, $\varphi(\Phi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Analogamente, $\Phi(\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Concluimos que φ é a inversa da função Φ . ■

Pelo Lema 2.2.5, Φ possui inversa e portanto é bijetiva. Com isso, resta provar que Φ e $\Phi^{-1} = \varphi$ são contínuas.

Dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in X$ tais que $[\mathbf{x}]_N = [\mathbf{y}]_N$, pelo Lema 2.2.3, temos que $[\Phi(\mathbf{x})]_N = [\Phi(\mathbf{y})]_N$. Então, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon$. Logo, se $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \delta$ então $d(\Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}')) < \epsilon$. Com isso Φ é contínua. Um argumento análogo mostra que Φ^{-1} também é contínua. Concluimos, então, que a função Φ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.2.6 (Relação orbital). *Seja Y um espaço métrico e $\varphi : Y \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Chamaremos de R_φ a relação de equivalência em Y dada por:*

$$x \sim_{R_\varphi} y \text{ se e só se existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = \varphi^n(x),$$

denominada relação orbital.

Proposição 2.2.7. *A relação orbital definida acima é uma relação de equivalência.*

Prova. Mostraremos que R_φ satisfaz as propriedades de relação de equivalência.

- Reflexiva: $x \sim_{R_\varphi} x$, basta tomar $n = 0$.
- Simétrica: Sejam $x, y \in X$. Se $x \sim_{R_\varphi} y$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^n(y) = x$, como φ é um homeomorfismo, $\varphi^{(-n)}(x) = y$ então $y \sim_{R_\varphi} x$.
- Transitiva: Sejam $x, y, z \in X$ tais que $x \sim_{R_\varphi} y$ e $y \sim_{R_\varphi} z$ então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi^n(y) = x$ e $\varphi^m(z) = y$. Portanto, $\varphi^{n+m}(z) = x$, com isso, $x \sim_{R_\varphi} z$.

Concluimos, então, que R_φ é uma relação de equivalência. ■

Para cada $x \in Y$, denotaremos sua classe de equivalência por $\langle x \rangle_{R_\varphi}$. Por definição da relação R_φ , temos que para cada $x \in Y$, $\langle x \rangle_{R_\varphi}$ é o conjunto $\mathcal{O}_\varphi(x)$.

Note que a relação R_φ é minimal se e somente se a função φ é desa.

Definição 2.2.8 (Minimalidade). *Uma relação de equivalência é dita minimal se toda classe de equivalência é densa.*

Teorema 2.2.9. *Seja Φ a função odômetro então a relação R_Φ é minimal.*

Prova. Precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 2.2.10. *Para todo $k \geq 0$ temos que $\Phi^{2^k}([0]_{k+1}) = [0^k 1]_{k+1}$ e que $\Phi^{2^k}([0^k 1]_{k+1}) = [0]_{k+1}$.*

Prova. Provaremos, primeiro, que para todo $k \geq 0$,

$$\Phi^{2^k}([0]_{k+1}) = [0^k 1]_{k+1}.$$

A demonstração será dada por indução em k . Segue diretamente da definição da função Φ que $\Phi([0]_1) = [1]_1$. Agora, suponha, por indução, que o lema vale para todo $0 \leq i \leq k$, isto é, para todo $0 \leq i \leq k$.

$$\Phi^{2^i}([0]_{i+1}) = [0^i 1]_{i+1}.$$

Provaremos que a afirmação é verdadeira para $k + 1$.

$$\begin{aligned}\Phi^{2^{k+1}}([0]_{k+2}) &= \Phi^{1+\sum_{j=0}^k 2^j}([0]_{k+2}) = \\ &= \Phi \circ \Phi \circ \Phi^2 \circ \dots \circ \Phi^{2^{k-1}} \circ \Phi^{2^k}([0]_{k+2}) = \\ &= \Phi \circ \Phi \circ \Phi^2 \circ \dots \circ \Phi^{2^{k-1}}([0^k 10]_{k+2}) = \Phi([1^{k+1} 0]_{k+2}) = [0^{k+1} 1]_{k+2}.\end{aligned}$$

Acima usamos a hipótese de indução para cada Φ^{2^j} , onde $0 \leq j \leq k$.

Mostraremos agora que $\Phi^{2^k}([0^k 1]_{k+1}) = [0]_{k+1}$ para todo $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Phi^{2^{k+1}}([0^{k+1} 1]_{k+2}) &= \Phi^{1+\sum_{j=0}^k 2^j}([0^{k+1} 1]_{k+2}) = \\ &= \Phi \circ \Phi \circ \Phi^2 \circ \dots \circ \Phi^{2^{k-1}} \circ \Phi^{2^k}([0^{k+1} 1]_{k+2}) = \\ &= \Phi \circ \Phi \circ \Phi^2 \circ \dots \circ \Phi^{2^{k-1}}([0^k 11]_{k+2}) = \Phi([1^{k+1} 1]_{k+2}) = [0]_{k+2}.\end{aligned}$$

Acima usamos que $\Phi^{2^k}([0]_{k+1}) = [0^k 1]_{k+1}$, para todo $k > 0$. Concluimos, então, a demonstração do lema. ■

Corolário 2.2.11. *Dado $[0]_k$, temos que $\Phi^{2^k}([0]_k) = [0]_k$.*

Prova. Note que $[0]_k = [0]_{k+1} \cup [0^k 1]_{k+1}$, assim:

$$\begin{aligned}\Phi^{2^k}[0]_k &= \Phi^{2^k}([0]_{k+1} \cup [0^k 1]_{k+1}) = \Phi^{2^k}([0]_{k+1}) \cup \Phi^{2^k}([0^k 1]_{k+1}) = \\ &= [0^k 1]_{k+1} \cup [0]_{k+1} = [0]_k.\end{aligned}$$

Finalizamos, assim, a demonstração do corolário. ■

Lema 2.2.12. *Seja $\mathbf{x} \in X$, os cilindros $\Phi^i([\mathbf{x}]_k)$, onde $0 \leq i \leq 2^k - 1$, são dois a dois disjuntos.*

Prova. Sem perda de generalidade, mostraremos a afirmação para o cilindro $[0]_k$. A demonstração será por indução em k :

- Para $k = 1$, os cilindros $[0]_1$ e $[1]_1$ são disjuntos, $\Phi([0]_1) = [1]_1$ e $\Phi([1]_1) = [0]_1$.
- Suponha que o lema é verdadeiro para k , isto é, que os cilindros $\Phi^i([0]_k)$ são dois a dois disjuntos, onde $0 \leq i \leq 2^k - 1$.
- Mostraremos que a afirmação é verdadeira pra $k + 1$:

Temos que $[0]_{k+1} \subset [0]_k$, então $\Phi^i([0]_{k+1}) \subset \Phi^i([0]_k)$, usando a hipótese de indução e que $\Phi^i([0]_{k+1}) \subset \Phi^i([0]_k)$, temos que os cilindros $\Phi^i([0]_{k+1})$

são dois a dois disjuntos para todo $0 \leq i \leq 2^k - 1$. Pelo Lema 2.2.10, temos que que:

$$\Phi^{2^i}([0]_{k+1}) = [0^k 1]_{k+1} \subset [0]_k,$$

então os cilindros $\Phi^j([0^k 1]_{k+1})$ são dois a dois disjuntos para todo $0 \leq j \leq 2^k - 1$, mas:

$$\Phi^j([0^k 1]_{k+1}) = \Phi^j(\Phi^{2^k}([0]_{k+1})) = \Phi^{2^k+j}([0]_{k+1}),$$

assim os cilindros $\Phi^i([0]_{k+1})$ são dois a dois disjuntos para todo $0 \leq i \leq 2^{k+1} - 1$.

Observação 2.2.13. Temos que $\Phi^i([0]_k)$, onde $0 \leq i \leq 2^k - 1$ não altera as entradas 0_ℓ para todo $\ell > k$, já que precisamos de $2^k - 1$ para alterar a entrada 0_k .

Continuaremos com a demonstração do Teorema 2.2.9:

Prova. Seja $\mathbf{x} \in X$, precisamos mostrar que $\langle \mathbf{x} \rangle_\varphi$ é um conjunto denso, isto é, temos que mostrar que dado $U \subset X$ aberto, $U \cap \langle \mathbf{x} \rangle_\varphi \neq \emptyset$. Como os cilindros são uma base da topologia de X , dado um aberto U em X , existe cilindro $[\mathbf{p}]_k \subset U$. Pelo Lema 2.2.12, todos os cilindros $\Phi^i([\mathbf{p}]_k)$ são disjuntos para todo $0 \leq i \leq 2^k - 1$. Assim, basta mostrar que $\Phi^{2^k}([\mathbf{p}]_k) = [\mathbf{p}]_k$. Desta forma, a função odômetro permuta todos os cilindros de tamanho k com período 2^k . Portanto, a órbita de todo cilindro de tamanho k contém qualquer outro cilindro de tamanho k e portanto, a órbita de qualquer ponto por Φ é densa.

É suficiente mostrar a afirmação para o cilindro $[0]_k$ isto é, mostrar que $\Phi^{2^k}([0]_k) = [0]_k$, o que já foi feito no Corolário 2.2.11. Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

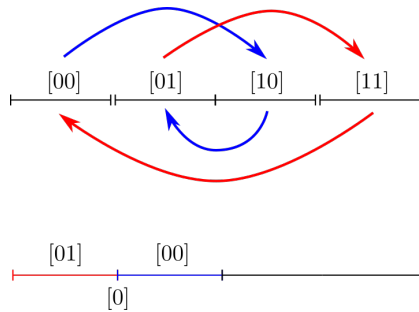


Figura 2.1: Ilustração da permutação dos cilindros de tamanho dois.

Provamos, então, que a relação de equivalência R_Φ é minimal. Então, o odômetro diádico é um homeomorfismo minimal.

2.3

Outra relação de equivalência

Nesta seção iremos definir outra relação de equivalência no espaço X com o objetivo de relacioná-la com R_Φ .

Definição 2.3.1 (Equivalência de caudas). *Chamaremos de R a relação em X dada por:*

$$\mathbf{x} \sim_R \mathbf{y} \text{ se e só se existe } N \geq 0, x_n = y_n \text{ para todo } n > N.$$

Isto é, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são equivalentes se diferem apenas em um número finito de entradas.

Proposição 2.3.2. *A relação R é uma relação de equivalência.*

- Reflexiva: $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{x}$, já que basta tomar $N = 0$;
- Simétrica: se $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{y}$ então existe $N \geq 0$, tal que $x_n = y_n$ para todo $n > N$, como a igualdade é simétrica, temos que $\mathbf{y} \sim_R \mathbf{x}$;
- Transitiva: sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, tais que $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \sim_R \mathbf{z}$. Então existem N_1, N_2 tal que para todo $n > N_1$, $x_n = y_n$ e para todo $n > N_2$, $y_n = z_n$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tem-se que $x_n = z_n$ para todo $n > N$, então $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{z}$.

Concluimos, portanto, que R é uma relação de equivalência. ■

Denotaremos a classe de equivalência de $\mathbf{x} \in X$ em relação a R por $\langle \mathbf{x} \rangle_R$.

Teorema 2.3.3. *Valem as seguintes afirmações:*

1. $\langle \mathbf{x} \rangle_R \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_\Phi}$.
2. R_Φ é a menor relação de equivalência que contém R , isto é, toda classe de equivalência de R , está contida em alguma classe de equivalência de R_Φ , e tal que $\mathbf{0} \sim \mathbf{1}$.

Prova. Precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.3.4. *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são iguais menos em um número finito de entradas, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$*

Prova. Como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são iguais menos em um número finito de entradas, temos que existe $N > 0$ tal que $x_n = y_n$ para todo $n > N$, consideramos que N é o primeiro número tal que isso ocorre. Tomemos os cilindros $[x_1 \dots x_N]$ e $[y_1 \dots y_N]$, que são disjuntos. Temos que existe $0 < k < 2^N$ tal que:

$$\Phi^k([x_1 \dots x_N]) = [y_1 \dots y_N].$$

Então $\Phi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}'$, onde $\mathbf{y}'$ está em $[y_1 \dots y_N]$. Temos que mostrar que $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$.

Consideramos o elemento $(0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots) \in [\mathbf{0}]_N$. Pela observação 2.2.13, a aplicação $\Phi^i([\mathbf{0}]_N)$, onde $0 \leq i \leq 2^N - 1$ não altera as entradas 0_ℓ para todo $\ell > N$. Temos que existe k_1 tal que $0 \leq k_1 \leq 2^N - 1$ e

$$\Phi^{k_1}((0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots)) \in [x_1 \dots x_N].$$

Então, temos que $\Phi^{k_1}((0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots)) = \mathbf{x}$. Analogamente, existe k_2 tal que $0 \leq k_2 \leq 2^N - 1$ e

$$\Phi^{k_2}((0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots)) \in [y_1 \dots y_N].$$

Assim,

$$\Phi^{k_2}((0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots)) = (y_1 \dots y_N x_{N+1} x_{N+2} \dots) = \mathbf{y}.$$

Definimos $k = k_2 - k_1$, então

$$\Phi^k(\mathbf{x}) = \Phi^{k_2 - k_1}(\mathbf{x}) = \Phi^{k_2}(\Phi^{-k_1}(\mathbf{x})) = \Phi^{k_2}((0^N x_{N+1} x_{N+2} \dots)) = \mathbf{y}$$

Dessa forma finalizamos a prova do lema. ■

Continuaremos com a demonstração do teorema. Seja $\mathbf{x} \in X$. Dado $\mathbf{y} \in \langle \mathbf{x} \rangle_R$, pelo Lema 2.3.4, obtemos que $\mathbf{y} \in \langle \mathbf{x} \rangle_\Phi$, portanto $\langle \mathbf{x} \rangle_R \subset \langle \mathbf{x} \rangle_\Phi$. Provamos, então o item (1) do teorema.

Falta mostrar o item (2). Como $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$, temos que $\mathbf{0} \sim_\Phi \mathbf{1}$. Agora, considere relação de equivalência S tal que $R \subset S \subset R_\Phi$ e $\mathbf{0} \sim_S \mathbf{1}$. Veremos que $R_\Phi \subset S$, isto é que se $\mathbf{x} \sim_{R_\Phi} \mathbf{y}$ então $\mathbf{x} \sim_S \mathbf{y}$. Considere dois elementos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tais que $\mathbf{x} \sim_{R_\Phi} \mathbf{y}$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbf{y} = \Phi^k(\mathbf{x})$. Mostraremos que $\mathbf{x} \sim_S \Phi^k(\mathbf{x})$. Suponha, primeiro, que $\mathbf{x}, \Phi(\mathbf{x}), \Phi^2(\mathbf{x}), \dots, \Phi^k(\mathbf{x})$ são todos diferentes de $\mathbf{1}$. Pela definição de odômetro, temos que cada $\Phi^i(\mathbf{x})$ difere de $\Phi^{(i+1)}(\mathbf{x})$ em um número finito de entradas para todo $0 \leq i \leq k$, assim temos que $\mathbf{x}$ e $\Phi^k(\mathbf{x})$ diferem em um número finito de entradas, então $\mathbf{x} \sim_R \Phi^k(\mathbf{x})$ e portanto, como $R \subset S$, $\mathbf{x} \sim_S \Phi^k(\mathbf{x})$.

Agora, suponha que existe $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ tal que $\Phi^i(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$, consideremos que esse i é o primeiro número que isso ocorre. Então $\mathbf{x}$ e $\Phi^i(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$ diferem em um número finito de entradas. Logo $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{1}$, então $\mathbf{x} \sim_S \mathbf{1}$. Como $\Phi(\mathbf{1}) = (\mathbf{0})$, temos que se j é tal que $i + 1 \leq j \leq k$, $\Phi^j(\mathbf{x})$ considerados dois a dois diferem em um número finito de entradas, assim $\Phi^k(\mathbf{x}) \sim_R \mathbf{0}$ então $\Phi^k(\mathbf{x}) \sim_S \mathbf{0}$, como $\mathbf{1} \sim_S \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \sim_S \mathbf{1}$ e S é relação de equivalência segue que

$\mathbf{x} \sim_S \Phi^k(\mathbf{x})$.

Em qualquer um dos casos, mostramos que se $\mathbf{x} \sim_{R_\Phi} \mathbf{y}$ então $\mathbf{x} \sim_S \mathbf{y}$. Portanto, $R_\Phi = S$. Assim, terminamos a demonstração do item (2), e, portanto, a demonstração do teorema. ■

3

Conjuntos de Cantor

O objetivo deste capítulo é definir o que é um conjunto de Cantor, que na maior parte do tempo será o nosso espaço de trabalho e mostrar que todos os conjuntos de Cantor são homeomorfos.

3.1

Conceitos preliminares

Nesta seção apresentaremos os conceitos necessários para definir um conjunto de Cantor e mostrar que quaisquer dois conjuntos de Cantor são homeomorfos.

Chamaremos de conjuntos *clopen*, os conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados.

Definição 3.1.1 (Conjunto conexo). *Um espaço métrico é conexo quando não pode ser decomposto como uma união disjunta de conjuntos abertos e não vazios. Se existe tal decomposição, o espaço métrico é desconexo.*

Definição 3.1.2 (Espaço totalmente desconexo). *Um espaço métrico é dito totalmente desconexo se seus únicos subconjuntos conexos são pontos ou o conjunto vazio.*

Lema 3.1.3. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto totalmente desconexo e seja $x \in X$:*

1. *A interseção de todos os conjuntos clopen que contém x é $\{x\}$;*
2. *Dado qualquer $r > 0$, existe um conjunto clopen U tal que $x \in U \subset B(x, r)$. Isto é, os conjuntos clopen formam uma base para a topologia de X .*

Prova. Definimos $\mathcal{C}$ como a coleção de todos os conjuntos clopen que contém x , $\mathcal{N}$ como a coleção de todos os conjuntos clopen que não contém x e o conjunto.

$$Y := \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Mostraremos, primeiro, que $Y = \{x\}$. Por definição, $\{x\} \in \mathcal{C}$, $\emptyset \in \mathcal{N}$. Seja um conjunto R que está em $\mathcal{C}$, então $X \setminus R$ não contém x e, portanto, está em $\mathcal{N}$.

Analogamente, se R está em $\mathcal{N}$, então $X \setminus R$ está em $\mathcal{C}$. Pela definição de Y , $x \in Y$ e portanto, $X \setminus Y$ está em $\mathcal{N}$. Como Y é interseção de fechados, então Y é fechado.

Suponha, por absurdo, que Y contém algum ponto além de x . Como, por hipótese, X é totalmente desconexo, Y será desconexo. Com isso, existem U e V abertos em X tal que $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são disjuntos, não vazios e a união dos dois cobre Y .

Suponha que $x \in U$. Como Y é fechado e X é compacto, Y também será compacto. Com isso, podemos tomar $\delta > 0$ tal que:

$$d(y, z) \geq \delta, \quad y \in U \cap Y, \quad z \in V \cap Y.$$

Definimos o conjunto:

$$W := V \cap \left(\bigcup_{y \in V \cap Y} B(y, \frac{\delta}{2}) \right),$$

O conjunto W é aberto, já que V e $\bigcup_{y \in V \cap Y} B(y, \frac{\delta}{2})$ são abertos.

Afirmção 3.1.4. $W \cap Y = V \cap Y$.

Prova. Seja $y \in W \cap Y$ então $y \in W \subset V$, assim $y \in V \cap Y$. Portanto $W \cap Y \subset V \cap Y$. Falta mostrar que $V \cap Y \subset W \cap Y$. Temos que

$$W \cap Y = V \cap \left(\bigcup_{y \in V \cap Y} B(y, \frac{\delta}{2}) \right) \cap Y \supset V \cap Y.$$

Portanto, $W \cap Y = V \cap Y$. Finalizamos, então, a demonstração da afirmação. ■

Afirmção 3.1.5. $\overline{W} \cap (U \cap Y) = \emptyset$.

Prova. Seja w_n uma sequência em W que converge para w . Pela definição do conjunto W , para cada n , existe $y_n \in V \cap Y$, tal que

$$d(y_n, w_n) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Dado $u \in U \cap Y$, temos, utilizando a desigualdade triangular, que

$$\begin{aligned} d(w, u) &\geq d(w_n, u) - d(w_n, w) \geq d(y_n, u) - d(y_n, w_n) - d(w_n, w) \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2} - d(w_n, w). \end{aligned}$$

Então, para todo n

$$d(w, u) \geq \frac{\delta}{2} - d(w_n, w) \tag{3.1.1}$$

Como w_n converge para w ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, w) = 0.$$

Como a equação 3.1.1 vale para todo n , temos que $d(w, u) \neq 0$. Então, w não está em $U \cap Y$. Portanto, $\overline{W} \cap (U \cap Y) = \emptyset$. ■

Usando a afirmação acima temos que

$$\overline{W} \setminus W \cap (U \cap Y) = \emptyset.$$

Como, pela Afirmação 3.1.4, $V \cap Y = W \cap Y$, o conjunto $\overline{W} \setminus W$ também é disjunto de $V \cap Y$.

Portanto, $\overline{W} \setminus W$ é um subconjunto fechado de $X \setminus Y$ e como X é compacto, $\overline{W} \setminus W$ também é compacto. Portanto, existe subcoleção finita de elementos de $\mathcal{N}$ que cobrem $\overline{W} \setminus W$, que denotaremos por $N_1, N_2, \dots, N_k$. Definimos agora o conjunto

$$Z := N_1 \cup \dots \cup N_k \cup W.$$

Como cada N_i é aberto e W também, Z é um conjunto aberto.

Agora, veremos que o conjunto Z também é fechado.

$$\begin{aligned} \overline{Z} &= \overline{N_1} \cup \dots \cup \overline{N_k} \cup \overline{W} = N_1 \cup \dots \cup N_k \cup \overline{W} \\ &= N_1 \cup \dots \cup N_k \cup (\overline{W} - W) \cup N_1 \cup \dots \cup N_k \cup W \subset N_1 \cup \dots \cup N_k \cup W \\ &\subset Z. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{Z} \subset Z$, assim Z é um conjunto clopen e não contém x . Então, Z é um elemento da coleção $\mathcal{N}$ e portanto deve ser disjunto de Y , o que é uma contradição, já que

$$Z \cap Y = N_1 \cup \dots \cup N_k \cup W \cap Y \subset W \cap Y \neq \emptyset.$$

Concluimos, então que $Y = \{x\}$.

Falta mostrar que os conjuntos clopen formam uma base para a topologia de X .

Para cada y tal que $d(x, y) \geq r$, existe um conjunto clopen V_y contendo y , mas não contendo x . A coleção $\{V_y\}_y$ é uma cobertura de $X \setminus B(x, r)$. Como $B(x, r)$ é aberto, o conjunto $X \setminus B(x, r)$ é fechado, como X é compacto, $X \setminus B(x, r)$ também é compacto. Por definição de compacidade, existe uma

subcobertura finita de $\{V_y\}$, digamos $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_k}\}$. Isto é,

$$X \setminus B(x, r) \subset \bigcup_{i=1}^k V_{y_i},$$

então,

$$U := \bigcap_{i=1}^k (X \setminus V_{y_i}) \subset B(x, r).$$

Cada V_{y_i} é clopen então seus complementos também são, como U é formado por uma interseção de conjuntos clopen, U também é clopen. Além disso, x não está em nenhum V_y então $x \in U$. Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

Um conceito que também será necessário é o de partição de um espaço métrico.

Definição 3.1.6 (Partição). *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma partição de X é uma coleção finita de conjuntos clopen que são dois a dois disjuntos e a união é igual a X . Dada uma partição $\mathcal{P}$, definimos o seu diâmetro como:*

$$\text{diam}(\mathcal{P}) = \max\{\text{diam}(U) | U \in \mathcal{P}\}.$$

Dadas duas partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de X . Diz-se que $\mathcal{P}_2$ é mais fina que $\mathcal{P}_1$, ($\mathcal{P}_1 \succeq \mathcal{P}_2$), se todo elemento de $\mathcal{P}_2$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_1$.

Definição 3.1.7 (Sequência de partições refinadoras). *Seja (X, d) espaço métrico compacto. Uma sequência de partições refinadoras é uma sequência $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$, tal que:*

1. para cada n , $\mathcal{P}_n$ é uma partição de X ;
2. para cada n , $\mathcal{P}_n \succeq \mathcal{P}_{n+1}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n) = 0$.

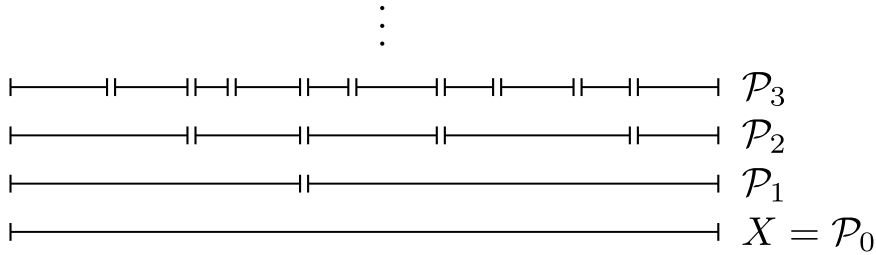


Figura 3.1: Ilustração de uma sequência de partições refinadoras.

Proposição 3.1.8. *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ sequência de partições refinadoras, Se U é um subconjunto clopen de X então existe n tal que*

$$U = \bigcup_{\{V \in \mathcal{P}_n \mid V \cap U \neq \emptyset\}} V.$$

Prova. Seja U subconjunto clopen de X . Como, por definição de sequência de partições refinadoras, $\text{diam}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$, existe n tal que $\text{diam}(\mathcal{P}_n) < d(U, X \setminus U)$. Assim, se $V \in \mathcal{P}_n$ e $V \cap U \neq \emptyset$, então $V \subset U$. Então

$$U = \bigcup_{\{V \in \mathcal{P}_n \mid V \cap U \neq \emptyset\}} V.$$

Concluimos a demonstração da proposição. ■

Definição 3.1.9 (Ultramétrica). *Seja X um conjunto. Uma função $\mathfrak{d} : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ é uma ultramétrica se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathfrak{d}(x, y) = 0$ se e só se $x = y$, para todos x, y em X ;
2. $\mathfrak{d}(x, y) = \mathfrak{d}(y, x)$, para todos x, y em X ;
3. $\mathfrak{d}(x, y) \leq \max\{\mathfrak{d}(x, z), \mathfrak{d}(z, y)\}$, para todos x, y, z em X .

O conjunto X munido com a ultramétrica $\mathfrak{d}$ será chamado de espaço ultramétrico $(X, \mathfrak{d})$.

Observação 3.1.10. *Toda ultramétrica é uma métrica.*

Prova. É necessário mostrar somente a desigualdade triangular. Dados $x, y, z \in X$ temos que

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Concluimos, assim, a demonstração da observação.

Definição 3.1.11. *Sejam $(X, \mathfrak{d})$ espaço ultramétrico, x em X e $r > 0$. Definimos a bola em $(X, \mathfrak{d})$ como:*

$$B_{\mathfrak{d}}(x, r) := \{y \in X \mid \mathfrak{d}(x, y) < r\}.$$

Proposição 3.1.12. *Para todo x em X e todo $r > 0$ o conjunto $B_{\mathfrak{d}}(x, r)$ é um conjunto aberto.*

Prova. Dados y em $B_\delta(x, r)$ e $\delta = \min\{\mathfrak{d}(x, y), r - \mathfrak{d}(x, y)\}$, mostraremos que $B_\delta(y, \delta) \subset B_\delta(x, r)$. Considere z em $B_\delta(y, \delta)$, temos que

$$\mathfrak{d}(x, z) \leq \max\{\mathfrak{d}(x, y), \mathfrak{d}(y, z)\} = \mathfrak{d}(x, y) < r.$$

Então $B_\delta(y, \delta) \subset B_\delta(x, r)$. Concluimos, então, que $B_\delta(x, r)$ é um conjunto aberto para todo $x \in X$ e todo $r > 0$. ■

Teorema 3.1.13. *Seja (X, d) espaço métrico compacto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. o espaço (X, d) é totalmente desconexo;
2. o espaço (X, d) tem uma sequência de partições refinadoras;
3. existe uma ultramétrica $\mathfrak{d}$ em X que gera a mesma topologia de d .

Lema 3.1.14. *Seja $(X, \mathfrak{d})$ um espaço ultramétrico, então quaisquer duas bolas de raio $r > 0$ são iguais ou disjuntas.*

Prova. Sejam $x, y \in X$ e $r > 0$, suponha que

$$B_\mathfrak{d}(x, r) \cap B_\mathfrak{d}(y, r) \neq \emptyset,$$

mas que as bolas não sejam iguais. Existem $p \in B_\mathfrak{d}(x, r) \cap B_\mathfrak{d}(y, r)$ e $q \in B_\mathfrak{d}(x, r)$ tal que q não está em $B_\mathfrak{d}(y, r)$. Pelo item (3) da definição 3.1.9, temos que

$$d(y, q) \leq \max\{d(y, p), d(p, q)\} \leq \max\{d(y, p), d(p, x), d(x, q)\} \leq r,$$

então $q \in B_\mathfrak{d}(y, r)$, o que é uma contradição. ■

Corolário 3.1.15. *Se X é espaço ultramétrico compacto, dado $r > 0$, a coleção $\{B_\mathfrak{d}(x, r)\}_{x \in X}$ é uma partição de X .*

Prova. Pelo lema acima, a coleção $\{B_\mathfrak{d}(x, r)\}_{x \in X}$ é formada por elementos disjuntos. Além disso, fixe $y \in X$, temos que

$$B_\mathfrak{d}(y, r) = X \setminus \bigcup_{x \in X, x \neq y} B_\mathfrak{d}(x, r).$$

Então, $B_\mathfrak{d}(y, r)$ é o complementar de um conjunto aberto e, portanto, fechado. Concluimos que a coleção $\{B_\mathfrak{d}(x, r)\}_{x \in X}$ é uma partição de X . ■

Continuaremos, neste momento, com a demonstração do Teorema 3.1.13:

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que (X, d) é totalmente desconexo, construiremos uma sequência de partições refinadoras em (X, d) . Definimos $\mathcal{P}_0 = \{X\}$, temos que $\mathcal{P}_0$ é uma partição de X , definimos também $r_0 = \text{diam}(X)$.

Considere uma sequência decrescente $(r_n)_{n \geq 1}$, tal que $r_n \rightarrow 0$. Suponha que já construímos, para algum $n \geq 0$, uma partição $\mathcal{P}_n$, tal que $\text{diam}(U) \leq r_n$ para todo U em $\mathcal{P}_n$, construiremos uma partição $\mathcal{P}_{n+1}$, tal que $\text{diam}(U) \leq r_{n+1}$ para todo U em $\mathcal{P}_{n+1}$ e todo elemento de $\mathcal{P}_{n+1}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_n$, isto é, uma partição mais fina que $\mathcal{P}_n$.

Para cada U em $\mathcal{P}_n$, U e $X \setminus U$ são conjuntos clopen em X compacto, portanto U e $X \setminus U$ são compactos. Existe $\delta_U > 0$, tal que, $d(x, y) \geq \delta_U$ para todo x em U e todo y em $X \setminus U$. Definimos:

$$\delta_n = \min\{\delta_U \mid U \in \mathcal{P}_n\}. \quad (3.1.2)$$

Assim, se x e y estão em elementos diferentes de $\mathcal{P}_n$, então $d(x, y) \geq \delta_n$.

Pelo Lema 3.1.3, existe um conjunto clopen U_x tal que:

$$x \in U_x \subset B(x, \min\{\delta_n, r_{n+1}\}).$$

A coleção $\{U_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura de X , como X é compacto, existe uma subcobertura finita, digamos $U_1, U_2, \dots, U_N$, consideraremos que tal subcobertura é minimal, isto é não admite subcobertura própria. Assim, para cada $1 \leq i \leq k$, temos que U_i é um conjunto clopen e $\text{diam}(U_i) < \min\{\delta_n, r_{n+1}\}$. Definimos $V_1 = U_1$ e indutivamente $V_k = U_k \setminus V_{k-1}$ para $k \geq 2$, temos que:

- Para cada k , V_k é clopen,
- Como a subcobertura $\{U_i\}_{i=1}^N$ é minimal, cada V_k é não vazio e está contido em um único elemento da partição $\mathcal{P}_n$.
- Assim para cada V_k , existe U_{x_k} em $\mathcal{P}_n$, tal que $V_k \subset U_{x_k}$ então $\text{diam}(V_k) \leq \text{diam}(U_{x_k}) \leq r_{n+1}$.

Portanto, definindo:

$$\mathcal{P}_{n+1} = \{V_1, \dots, V_N\}$$

Temos que $\mathcal{P}_{n+1}$ é partição de X mais fina que $\mathcal{P}_n$ e que $\text{diam}(V) \leq r_{n+1}$ para todo V de $\mathcal{P}_{n+1}$. Então $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ é sequência de partições refinadoras de (X, d) . Assim, terminamos a prova de (1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que o espaço (X, d) possui uma sequência de partições refinadoras $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$. Para cada partição $\mathcal{P}_n$, definimos δ_n como fizemos na

equação (3.1.2). Defina:

$$\mathfrak{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ e } y \text{ estão no mesmo elemento de } \mathcal{P}_n \text{ para todo } n, \\ \delta_n, & n \text{ mínimo tal que } x \text{ e } y \text{ estão em elementos diferentes de } \mathcal{P}_n. \end{cases}$$

Afirmção 3.1.16. *A função $\mathfrak{d}$ é uma ultramétrica.*

Prova. Mostraremos que $\mathfrak{d}$ satisfaz as condições da definição de ultramétrica.

- É claro que $\mathfrak{d}(x, x) = 0$. Agora, considere x, y em X tais que $\mathfrak{d}(x, y) = 0$. Por definição, x e y estão no mesmo elemento de $\mathcal{P}_n$ para todo $n \geq 0$, então

$$d(x, y) \leq \max\{\text{diam}(U) \mid U \in \mathcal{P}_n\} = \text{diam}(\mathcal{P}_n) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Mas $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ é sequência de partições refinadoras, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n) = 0,$$

assim $d(x, y) = 0$ e, portanto, $x = y$.

- Também é claro que $\mathfrak{d}(x, y) = \mathfrak{d}(y, x)$.
- Sejam x, y, z em X . Se $\mathfrak{d}(x, y) = 0$ é claro que

$$\mathfrak{d}(x, y) \leq \max\{\mathfrak{d}(x, z), \mathfrak{d}(z, y)\}.$$

Considere que $\mathfrak{d}(x, y) \neq 0$, então existe $n \geq 0$ tal que x e y estão em elementos diferentes de $\mathcal{P}_n$, consideremos esse n mínimo, então $\mathfrak{d}(x, y) = \delta_n$. Temos que x e z ou y e z estão em elementos diferentes de $\mathcal{P}_n$. Afirmamos que x e z estão em elementos de $\mathcal{P}_n$, então $\mathfrak{d}(x, z) \geq \delta_n$, já que x e z podem estar em elementos diferentes de $\mathcal{P}_i$, onde $i < n$, e como $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência decrescente, $\delta_i > \delta_n$. Se y e z não estão em elementos diferentes de $\mathcal{P}_n$ então $\max\{\mathfrak{d}(x, z), \mathfrak{d}(y, z)\} = \mathfrak{d}(x, z)$, portanto $\mathfrak{d}(x, y) \leq \max\{\mathfrak{d}(x, z), \mathfrak{d}(z, y)\}$.

Assim, de fato, $\mathfrak{d}$ é uma ultramétrica. ■

Falta mostrar que $\mathfrak{d}$ gera a mesma topologia de d . Sejam x em X e $r > 0$. Como $\delta_n \rightarrow 0$, existe δ_n , tal que $r > \delta_n$. Se $y \notin B(x, r)$ então $d(x, y) \geq r > \delta_n$, assim x e y estão em elementos diferentes de $\mathcal{P}_n$ e portanto $\mathfrak{d}(x, y) \geq \delta_n$. Logo $y \notin B_{\mathfrak{d}}(x, \delta_n)$. Concluimos que $B_{\mathfrak{d}}(x, \delta_n) \subset B(x, r)$.

Agora, dados x em X e $r > 0$, existe k tal que $\delta_k < r$. Mostraremos que $B(x, \delta_k) \subset B_{\mathfrak{d}}(x, r)$. Seja $y \in B(x, \delta_k)$, tal que $y \neq x$, então $d(x, y) < \delta_k$ e

portanto x e y estão no mesmo elemento de $\mathcal{P}_k$. Como, por hipótese, $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ é sequência de partições refinadoras, temos que x e y estão no mesmo elemento de $\mathcal{P}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, $\mathfrak{d}(x, y) = \delta_l$, onde $l > k$. Mas a sequência $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ é decrescente, então $\mathfrak{d}(x, y) = \delta_\ell < \delta_k$, portanto $y \in B_\mathfrak{d}(x, \delta_k)$, como $\delta_k < r$, temos que $B(x, \delta_k) \subset B_\mathfrak{d}(x, r)$. E assim terminamos a prova de $(2) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Seja $(X, \mathfrak{d})$ espaço ultramétrico compacto. Mostraremos que todo subconjunto de X com mais de dois pontos é desconexo. Seja $Y \subset X$, tal que Y contém dois pontos distintos, digamos x e y . Definimos $r = \frac{\mathfrak{d}(x, y)}{2}$, pelo Lema 3.1.14, temos que $B_\mathfrak{d}(x, r)$ e $B_\mathfrak{d}(y, r)$ são conjuntos clopen disjuntos em X e além disso são não vazios, portanto Y não é conexo.

Finalizamos, assim, a demonstração do Teorema 3.1.13. ■

3.2

Conjuntos de Cantor

O conjunto conhecido como conjunto ternário de Cantor, que é formado pelos números no intervalo $[0, 1]$ tais que quando expressados em base 3 o dígito 1 não aparece, é um espaço métrico compacto, totalmente desconexo e sem pontos isolados, assim como, o conjunto $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ apresentado no Capítulo 2. Existem mais conjuntos que possuem simultaneamente essas três propriedades e veremos que eles podem ser relacionados.

Definição 3.2.1 (Conjunto de Cantor). *Um conjunto de Cantor é qualquer espaço métrico (não vazio), compacto e totalmente desconexo sem pontos isolados.*

Dados um conjunto finito G e um espaço métrico (X, d) , dizemos que a função $g : G \rightarrow \mathcal{P}(X)$ é subordinada à partição $\mathcal{P}_n$ de X se para cada i em G , $g(i)$ é um elemento da partição $\mathcal{P}_n$. Para simplificar, usaremos a notação $g_{\mathcal{P}_n} : G \rightarrow \mathcal{P}_n$. A função $g_{\mathcal{P}_n} : U \rightarrow \mathcal{P}_n$ é sobrejetiva quando para cada elemento U de $\mathcal{P}_n$ existe i em G tal que $g(i) = U$.

Teorema 3.2.2. *Quaisquer dois conjuntos de Cantor são homeomorfos.*

Prova. Precisaremos de um resultado preliminar.

Lema 3.2.3. *Sejam (X, d) espaço métrico compacto sem pontos isolados e $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de partições refinadoras de (X, d) . Considere $n \geq 1$, G um conjunto finito e $g_{\mathcal{P}_n} : G \rightarrow \mathcal{P}_n$ uma sobrejeção subordinada à $\mathcal{P}_n$. Então existem $m > n$ e uma função sobrejetora $f : \mathcal{P}_m \rightarrow G$ tais que para todo V em $\mathcal{P}_m$ temos que $V \subset g_{\mathcal{P}_n} \circ f(V)$.*

Prova. Dado U em $\mathcal{P}_n$, como $g_{\mathcal{P}_n}^{-1}(U) \subset G$, $g_{\mathcal{P}_n}^{-1}(U)$ é um subconjunto finito de G . Agora, U é um conjunto infinito, caso fosse finito os elementos de U seriam pontos isolados de X . Definimos o conjunto F_U como um subconjunto finito de U com mais do que $\#g^{-1}(U)$ elementos. Note que como os elementos da partição são disjuntos, a coleção $\{F_U\}_{U \in \mathcal{P}_n}$ é formada por conjuntos dois a dois disjuntos. Definimos o conjunto

$$F := \bigcup_{U \in \mathcal{P}_n} F_U,$$

e δ como o mínimo da distância entre dois elementos de F . Como $\mathcal{P}_n$ é uma coleção finita e para cada $U \in \mathcal{P}_n$, F_U é um conjunto finito, o conjunto F é finito.

Como $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de partições refinadoras, podemos escolher $m > n$ tal que $\text{diam}(\mathcal{P}_m) < \delta$. Seja U em $\mathcal{P}_n$, se tomarmos quaisquer dois elementos de F_U , a distância entre eles é pelo menos $\delta > \text{diam}(\mathcal{P}_m) \geq \text{diam}(V)$ para todo V em $\mathcal{P}_m$. Então quaisquer dois elementos de F_U não podem estar no mesmo elemento de $\mathcal{P}_m$. Portanto:

$$\#\{V \in \mathcal{P}_m \mid V \subset U\} \geq \#g_{\mathcal{P}_n}^{-1}(U).$$

Então, qualquer função

$$f_U : \{V \in \mathcal{P}_m \mid V \subset U\} \rightarrow g_{\mathcal{P}_n}^{-1}(U).$$

é uma sobrejeção.

Definimos, a função $f : \mathcal{P}_m \rightarrow G$, tal que dado V em $\mathcal{P}_m$, $f(V) = f_U(V)$, onde U é o elemento de $\mathcal{P}_n$ que contém V . A função f é sobrejetora.

Agora, mostraremos que para todo V em $\mathcal{P}_m$, $V \subset g_{\mathcal{P}_n} \circ f(V)$. Seja V em $\mathcal{P}_m$, $f(V) = i$, tal que i está em $g_{\mathcal{P}_n}^{-1}(U)$ e U contém V , portanto:

$$g_{\mathcal{P}_n}(f(V)) = g_{\mathcal{P}_n}(i) = U \supset V.$$

Então f é a sobrejeção desejada entre $\mathcal{P}_m$ e G . Concluimos, assim, a demonstração do Lema 3.2.3. ■

Agora continuaremos a prova do Teorema 3.2.2. Sejam X e Y dois espaços métricos não vazios, compactos, totalmente desconexos e sem pontos isolados. Como os espaços são totalmente desconexos, pelo Teorema 3.1.13 temos que existe uma sequência de partições refinadoras para cada um dos espaços, digamos $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ para X e $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ para Y . Podemos assumir que $\mathcal{P}_1 = X$.

Definiremos indutivamente uma sequência de inteiros crescente $n_1 < n_2 < \dots$ e funções sobrejetoras:

$$f_k : \mathcal{P}_{n_k} \rightarrow \mathcal{Q}_{n_{k-1}} \quad k > 1, \quad k \text{ ímpar},$$

$$g_k : \mathcal{Q}_{n_k} \rightarrow \mathcal{P}_{n_{k-1}} \quad k > 1, \quad k \text{ par},$$

tais que

$$V \subset f_k \circ g_{k+1}(V), \quad k \text{ ímpar}, \quad V \in \mathcal{Q}_{n_{k+1}}, \quad (3.2.1)$$

$$U \subset g_k \circ f_{k+1}(U), \quad k \text{ par}, \quad U \in \mathcal{P}_{n_{k+1}}. \quad (3.2.2)$$

Começaremos definindo $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$. Como a partição $\mathcal{P}_1$ possui só um elemento, temos somente uma escolha para definir $g_2 : \mathcal{Q}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$, que será uma sobrejeção. Usando o Lema 3.2.3, existe $n_3 > 2$ e uma sobrejeção $f_3 : \mathcal{P}_{n_3} \rightarrow \mathcal{Q}_2$, tal que $U \subset g_2 \circ f_3(U)$ para todo U em $\mathcal{P}_{n_3}$. Agora usando o Lema 3.2.3 para f_3 , existe $n_4 > n_3$ e uma sobrejeção $g_4 : \mathcal{Q}_4 \rightarrow \mathcal{P}_3$, tal que $V \subset f_3 \circ g_4(V)$ para todo V em $\mathcal{Q}_{n_4}$.

Agora, suponha que já definimos as sobrejeções g_{i-1} , f_i e g_{i+1} para todo $3 \leq i \leq k$, tal que k é ímpar, onde $V \subset f_i \circ g_{i+1}(V)$ para todo V em $\mathcal{Q}_{n_{i+1}}$ e $U \subset g_{i-1} \circ f_i(U)$ para todo U em $\mathcal{P}_{n_i}$.

Pela hipótese de indução, $g_{k+1} : \mathcal{Q}_{n_{k+1}} \rightarrow \mathcal{P}_{n_k}$ é sobrejeção, pelo Lema 3.2.3, existe $n_{k+2} > n_{k+1}$ e sobrejeção $f_{k+2} : \mathcal{P}_{n_{k+2}} \rightarrow \mathcal{Q}_{n_{k+1}}$ tal que $U \subset g_{k+1} \circ f_{k+2}(U)$ para todo U em $\mathcal{P}_{n_{k+2}}$. Usando o Lema 3.2.3 para a função f_{k+2} , existe $n_{k+3} > n_{k+2}$ e sobrejeção $g_{k+3} : \mathcal{Q}_{n_{k+3}} \rightarrow \mathcal{P}_{n_{k+2}}$ tal que $V \subset f_{k+2} \circ g_{k+3}(V)$ para todo V em $\mathcal{Q}_{n_{k+3}}$. Se k é par, a hipótese de indução é que já foram definidas as funções f_{i-1} , g_i e f_{i+1} para todo $1 \leq i \leq k$. As funções g_{k+2} e f_{k+3} são definidas de forma análoga.

Definiremos, agora, a função $f : X \rightarrow Y$ ponto a ponto. Fixe x em X , explicaremos como iremos definir $f(x)$, para cada $k \geq 1$, denotaremos por U_x^k o único elemento de $\mathcal{P}_{n_k}$ que contém x . Como $\{\mathcal{P}_{n_k}\}$ é sequência de partições refinadoras e $\{n_k\}_{k \geq 1}$ é sequência crescente, $U_x^{k+2} \subset U_x^k$ para todo $k \geq 1$. Pela construção que fizemos acima, $g_{k+1} \circ f_{k+2}(U_x^{k+2})$ está em $\mathcal{P}_{n_k}$ e contém U_x^{k+2} . Mas, U_x^k é o único elemento de $\mathcal{P}_{n_k}$ que contém x , assim: $g_{k+1} \circ f_{k+2}(U_x^{k+2}) = U_x^k$. Aplicando f_k a ambos os lados obtemos:

$$f_k(U_x^k) = f_k \circ g_{k+1} \circ f_{k+2}(U_x^{k+2}) = f_k \circ [g_{k+1}(f_{k+2}(U_x^{k+2}))]. \quad (3.2.3)$$

Por (3.2.1), sabemos que $f_{k+2}(U_x^{k+2}) \subset f_k \circ [g_{k+1}(f_{k+2}(U_x^{k+2}))]$. Então, usando a equação (3.2.3), obtemos que

$$f_{k+2}(U_x^{k+2}) \subset f_k(U_x^k).$$

Portanto, a sequência $\{f_k(U_x^k)\}_{k \geq 3}$ de conjuntos clopen é decrescente e, pela definição de f_k , $f_k(U_x^k)$ está em $\mathcal{Q}_{n_{k-1}}$, como o diâmetro da sequência $\{\mathcal{Q}_{n_k}\}$ tende à zero, temos que:

$$\bigcap_{k \geq 3} f_k(U_x^k) := \{f(x)\}.$$

Analogamente, podemos definir $g : Y \rightarrow X$ como se segue, dado y em Y , para cada $k \geq 1$, denotaremos por V_y^k o único elemento de $\mathcal{Q}_{n_k}$ que contém y e definimos

$$\bigcap_{k \geq 2} g_k(V_y^k) := \{g(y)\}.$$

Afirmção 3.2.4. *Dados x em X e y em Y , temos que $g \circ f(x) = x$ e $f \circ g(y) = y$.*

Prova. Dado k par, existe U_x^{k+1} em $\mathcal{P}_{n_{k+1}}$ tal que,

$$\begin{aligned} f(x) \in f_{k+1}(U_x^{k+1}) = V_{f(x)}^k &\Rightarrow g(f(x)) \in g_k(V_{f(x)}^k) = U_x^{k-1} \\ &\Rightarrow g(f(x)) \in \bigcap_k U_x^{k-1} = \{x\}. \end{aligned}$$

Concluimos que $g(f(x)) = x$ para todo x em X . A demonstração de que para todo $y \in Y$, $f(g(y)) = y$ é análoga. ■

Podemos afirmar, então que f e g são sobrejeções, já que dados x em X e y em Y , y é a imagem de $g(y)$ por f e x é a imagem de $f(x)$ por g .

Afirmção 3.2.5. *As funções f e g são injetivas.*

Prova. Sejam x_1 e x_2 em X ,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Então f é injetiva. Mostra-se de forma análoga que g é injetiva. ■

Portanto, f e g são bijeções e inversas uma da outra.

Para que f e g sejam homeomorfismos falta verificar que as funções f e g são funções contínuas. É suficiente mostrar que f é contínua. Fixe x em X . Dados $\epsilon > 0$ e $\{U_x^k\}_k$, existe k ímpar tal que $\text{diam}(\mathcal{Q}_{n_{k-1}}) < \epsilon$. Então se z está em U_x^k , $f(z)$ está em $f_k(U_x^k)$, que contém $f(x)$ e é um está contido em um elemento da partição $\mathcal{Q}_{n_{k-1}}$, portanto, $d_Y(f(z), f(x)) < \epsilon$.

Concluimos, portanto, que f é um homeomorfismo entre X e Y . ■

4

Equivalência orbital

Neste capítulo, iremos definir o que uma relação de equivalência orbital. Quando for conveniente denotaremos uma relação de equivalência R em um espaço X como o subconjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim_R y\} \subset X \times X.$$

Definição 4.0.1 (Conjugação topológica). *Considere (X, d_X) e (Y, d_Y) como espaços métricos compactos e $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ dois homeomorfismos. Uma função $h : X \rightarrow Y$ é dita uma conjugação topológica se é um homeomorfismo e $h \circ \varphi = \psi \circ h$. Se existe tal função h , dizemos que (X, φ) e (Y, ψ) são conjugados.*

Definição 4.0.2. *Sejam R e Q relações de equivalência nos espaços métricos X e Y , respectivamente. Dizemos que um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência entre as relações R e Q se*

$$h(\langle x \rangle_R) = \langle h(x) \rangle_Q.$$

Se R e Q forem relações de equivalência orbitais associadas aos homeomorfismos $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$, respectivamente, dizemos que $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital entre (X, φ) e (Y, ψ)

Observação 4.0.3. *Se h é uma conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ) , então h é uma equivalência orbital.*

Prova. Seja $a \in X$ e $b = h(a) \in Y$. Como h é conjugação, temos que dado $n \in \mathbb{Z}$

$$h(\varphi^n(a)) = \psi^n(h(a)) = \psi^n(b).$$

Dado $x \in X$, suponha que $b \in h(\langle x \rangle_{R_\varphi})$. Então, $a \in \langle x \rangle_{R_\varphi}$ e portanto existe inteiro k tal que

$$\varphi^k(a) = x.$$

Então,

$$h(\varphi^k(a)) = h(x),$$

logo

$$h(x) = \psi^k(h(a)) = \psi^k(b).$$

Portanto, por definição de R_ψ , temos que $b \in \langle h(x) \rangle_{R_\psi}$. Analogamente, mostramos a inclusão contrária.

Teorema 4.0.4. *Sejam X e Y espaços métricos compactos e conexos. Considere $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ homeomorfismos sem pontos periódicos. Se $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital entre R_φ e R_ψ , então o h é uma conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ) ou é uma conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ^{-1}) .*

Prova. Seja $x \in X$, como $x \sim_{R_\varphi} \varphi(x)$ e h é uma equivalência orbital, temos que $h(x) \sim_{R_\psi} h(\varphi(x))$. Então, existe inteiro n tal que $h(\varphi(x)) = \psi^n(h(x))$. Suponha, por absurdo, que existe inteiro $m \neq n$, tal que $h(\varphi(x)) = \psi^m(h(x))$. Então, $\psi^m(h(x)) = \psi^n(h(x))$ e, portanto, $\psi^{m-n}(h(x)) = h(x)$. Como ψ não possui pontos periódicos, temos que $m = n$.

Para cada inteiro n , considere o conjunto

$$X_n := \{x \in X \mid h(\varphi(x)) = \psi^n(h(x))\}.$$

Logo a coleção $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é formada por conjuntos dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_n X_n = X.$$

Lema 4.0.5. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto X_n é fechado.*

Prova. Fixe $n \in \mathbb{Z}$ e considere uma sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ em X_n tal que x_k converge para um ponto x . Para cada $k > 0$, temos que

$$h(\varphi(x_k)) = \psi^n(h(x_k)).$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(\varphi(x_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi^n(h(x_k)).$$

Como as funções h, φ e ψ são contínuas, temos que

$$h(\varphi(x)) = \psi^n(h(x)),$$

e, portanto, $x \in X$. Concluimos, assim, que X_n é um conjunto fechado. ■

Usando o lema acima o conjunto X pode ser escrito como união enumerável de conjuntos fechados e dois a dois disjuntos. Como X é espaço métrico compacto e conexo temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X_n = X$. Assim,

$$h \circ \varphi(x) = \psi^n \circ h(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Analogamente, existe $m > 0$ tal que

$$h^{-1} \circ \psi(y) = \varphi^m \circ h^{-1}(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Mostraremos que $n = 1$ e $m = 1$ ou $n = -1$ e $m = -1$. Dado $x \in X$, temos que $h \circ \varphi(x) \in Y$, portanto

$$h^{-1} \circ \psi \circ (h \circ \varphi)(x) = \varphi^m \circ (h^{-1} \circ h) \circ \varphi(x).$$

Então,

$$h^{-1} \circ \psi^{n+1} \circ h(x) = \varphi^{m+1}.$$

Aplicando a função h , obtemos que

$$\psi^{n+1} \circ h(x) = h \circ \varphi^{m+1}.$$

Logo,

$$\psi^{n+1} \circ h(x) = \psi^{n(m+1)} \circ h(x).$$

Como, por hipótese, o homeomorfismo ψ não possui pontos periódicos, temos que $n(m+1) - (n+1) = 0$. Então, $nm = 1$. Já que $n, m \in \mathbb{Z}$, concluimos que

$$n = m = 1 \quad \text{ou} \quad n = m = -1.$$

Finalizamos, então, a demonstração do teorema. ■

5

Diagrama de Bratteli

O objetivo deste capítulo é generalizar a relação de equivalência de caudas R vista no Capítulo 2. Para isto, iremos definir um objeto combinatório representado por um grafo infinito que possui caminhos infinitos formados pelas suas arestas. O espaço de todos estes caminhos, munido de uma métrica apropriada, generaliza o espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ com a métrica considerada no Capítulo 2.

5.1

Diagrama de Bratteli: definição e compacidade do espaço $X_{\mathfrak{B}}$

Definição 5.1.1 (Diagrama de Bratteli). *Um diagrama de Bratteli, é uma 4-upla $\mathcal{B} = (V, E, r, s)$, onde $V = \{V_n\}_{n \geq 0}$ e $E = \{E_n\}_{n \geq 1}$ são seqüências infinitas de conjuntos finitos, não vazios e dois a dois disjuntos e $s = \{s_n\}_{n \geq 1}$ e $r = \{r_n\}_{n \geq 1}$ são seqüências de funções, tais que:*

- $V_0 = \{v_0\}$.
- $s_n : E_n \rightarrow V_{n-1}$ e $s^{-1}\{v\} \neq \emptyset$ para todo $v \in \cup_{n \geq 1} V_n$.
- $r_n : E_n \rightarrow V_n$ e $r^{-1}\{v\} \neq \emptyset$ para todo $v \in \cup_{n \geq 0} V_n$.

Os conjuntos V_n são chamados de vértices e os conjuntos E_n são chamados de arestas. As funções r_n e s_n são chamadas, respectivamente, de posto e fonte.

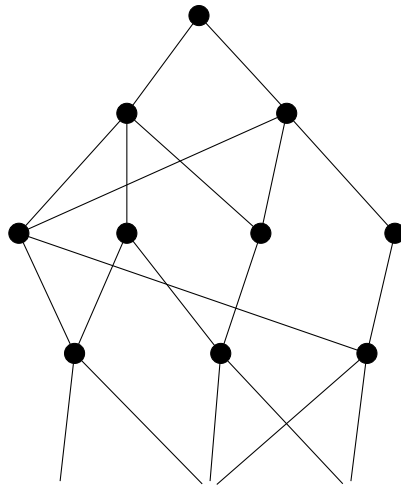


Figura 5.1: Exemplo de um diagrama de Bratteli

O nosso objetivo é dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ construir um espaço métrico $X_{\mathfrak{B}}$, compacto, totalmente desconexo e também uma relação de equivalência em $X_{\mathfrak{B}}$.

Definição 5.1.2. *Sejam $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli e $n, m \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq m < n$, o conjunto $E_{m,n}$ abaixo é o conjunto de todos os caminhos de V_m para V_n .*

$$E_{m,n} = \{(p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) \mid p_i \in E_i, r(p_i) = s(p_{i+1}), m < i \leq n\}.$$

Dados $v \in V_m$ e $w \in V_n$ denotamos por $E(v, w)$ o conjunto de todos os caminhos de v até w . Definimos o conjunto:

$$X_{\mathfrak{B}} := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in E_n, r(x_n) = s(x_{n+1}), n \geq 1\}.$$

Denotaremos o elemento $(x_1, x_2, \dots)$ de $X_{\mathfrak{B}}$ por $\mathbf{x}$. Quando for conveniente usaremos a notação compacta $\mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1}$.

Note que o conjunto $X_{\mathfrak{B}}$ é formado por todos os caminhos infinitos começando em v_0 .

Também definimos a função $d : X_{\mathfrak{B}} \times X_{\mathfrak{B}} \rightarrow [0, \infty)$ como:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 \neq y_1, \\ \inf\{2^{-n} \mid x_i = y_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}. \end{cases}$$

Proposição 5.1.3. *O espaço $(X_{\mathfrak{B}}, d)$ é ultramétrico.*

Prova. Mostraremos que a função d satisfaz as condições da definição de ultramétrica.

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \inf\{2^{-n} \mid x_i = y_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\} = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i$ para todo $i \geq 1 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- É claro que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em $X_{\mathfrak{B}}$, mostraremos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \max\{d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), d(\mathbf{z}, \mathbf{y})\}$. Se $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 1$ ou $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1$ não há o que fazer. Considere que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ e $d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ são ambos diferentes de 1. Então, há três casos. Ou existem $i \leq j$ positivos tais que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2^i}$ e $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^j}$, ou uma das distâncias é igual a zero, ou ambas são iguais a zero. Consideremos o caso em que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2^i}$ e $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^j}$. Neste caso $x_k = z_k$ para todo $1 \leq k \leq i$, $z_k = y_k$ para todo $1 \leq k \leq j$, $x_{i+1} \neq z_{i+1}$ e $y_{j+1} \neq z_{j+1}$, portanto $x_k = y_k$ para todo $1 \leq k \leq i$ e $x_{i+1} \neq y_{i+1}$. Portanto

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^i} \leq \max\{d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), d(\mathbf{y}, \mathbf{z})\}.$$

Agora, suponha que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$, então $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Se $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$, então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ e portanto $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Caso $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$, existe $i > 0$, tal que $y_k = z_k = x_k$ para todo $1 \leq k \leq i$ e $y_{i+1} \neq z_{i+1}$, logo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^i} \leq \max\{d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), d(\mathbf{z}, \mathbf{y})\}.$$

Concluimos a demonstração de que d é uma ultramétrica. ■

Dados $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$ e $r > 0$, denotaremos por $B(\mathbf{x}, r)$ a bola aberta centrada em $\mathbf{x}$ e de raio r .

Definição 5.1.4 (Cilindro). *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli, para qualquer $n \geq 1$ e $p \in E_{0,n}$, tais que $p = (p_1, \dots, p_n)$, definimos o cilindro:*

$$C(p) = \{\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}} \mid (x_1, \dots, x_n) = (p_1, \dots, p_n)\}.$$

Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Dado $n > 0$ e $p \in E_{0,n}$. Se $e \in E_{n+1}$, definimos

$$pe := (p_1, \dots, p_n, e).$$

Que chamaremos de concatenação do caminho p com a aresta e .

Proposição 5.1.5. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Para qualquer $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $n \geq 1$,

$$B(\mathbf{x}, 2^{-n+1}) = C(x_1, \dots, x_n).$$

2. Para qualquer $n \geq 1$ e quaisquer dois caminhos p e q em $E_{0,n}$, temos que $C(p) = C(q)$ se e só se $p = q$, caso contrário são disjuntos.

3. Para todo $n \geq 1$, a coleção $\{C(p)\}_{p \in E_{0,n}}$ é uma partição de $X_{\mathfrak{B}}$, que chamaremos de $\mathcal{P}_n$.

4. Dado $n \geq 1$. Para todo p em $E_{0,n}$, temos:

$$C(p) = \bigcup_{e \in E_{n+1}, s(e)=r(p)} C(pe),$$

e os conjuntos da união são dois a dois disjuntos.

5. A sequência $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de partições refinadoras para $X_{\mathfrak{B}}$.

Prova.

1. Dados $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $n \geq 1$. Primeiro, mostraremos, que

$$B(\mathbf{x}, 2^{-n+1}) \subset C(x_1, \dots, x_n).$$

Seja $\mathbf{y}$ em $B(\mathbf{x}, 2^{-n+1})$, temos que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{2^{-k} \mid x_i = y_i \text{ para todo } 0 \leq i \leq k\} < 2^{-n+1},$$

então $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, onde $k \geq n$, caso contrário $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 2^{-n+1}$, então $\mathbf{y}$ está em $C(x_1, \dots, x_n)$. Falta mostrar que

$$C(x_1, \dots, x_n) \subset B(\mathbf{x}, 2^{-n+1}).$$

Seja $\mathbf{z}$ em $C(x_1, \dots, x_n)$, por definição, $x_i = z_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, assim $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 2^{-n} < 2^{-n+1}$, portanto $\mathbf{z}$ está em $B(\mathbf{x}, 2^{-n+1})$.

2. Dados $n \geq 1$ e p, q em $E_{0,n}$. Suponha que $C(p) = C(q)$, então p está em $C(q)$, assim, $p = (p_1, \dots, p_n) = q$. Agora, se $p = q$, é direto que $C(p) = C(q)$. Se $p \neq q$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $p_i \neq q_i$, assim se $\mathbf{x}$ está em $C(p)$ então $\mathbf{x}$ não pode estar em $C(q)$. Da mesma forma, se $\mathbf{x}$ está em $C(q)$ então $\mathbf{x}$ não pode estar em $C(p)$. Portanto $C(p)$ e $C(q)$ são disjuntos.

3. É claro que para cada $n \geq 0$, $X_{\mathfrak{B}} = \cup_{p \in E_{0,n}} C(p)$.

Pelo item 2, a coleção $\{C(p)\}_{p \in E_{0,n}}$ é formada por elementos dois a dois disjuntos.

Pelo item 1, cada elemento de $\{C(p)\}_{p \in E_{0,n}}$ é aberto. Como

$$\cup_{p \in E_{0,n}} C(p) = X_{\mathfrak{B}},$$

cada $C(p)$ também será fechado, já que

$$X \setminus C(p) = \bigcup_{q \in E_{0,n}, q \neq p} C(q).$$

Portanto, $C(p)$ é conjunto clopen para todo p em $E_{0,n}$.

Concluimos que $\{C(p)\}_{p \in E_{0,n}}$ é partição de $X_{\mathfrak{B}}$ para todo $n \geq 1$.

4. Dados $n \geq 1$ e p em $E_{n,0}$.

Primeiro mostraremos que

$$C(p) \subset \bigcup_{e \in E_{n+1}, s(e)=r(p_n)} C(pe).$$

Seja $\mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1}$ em $C(p)$, então $\mathbf{x}$ está em $C(px_{n+1})$, já que $s(x_{n+1}) = r(p_n)$.

Agora, mostraremos que

$$\bigcup_{e \in E_{n+1}, s(e)=r(p_n)} C(pe) \subset C(p).$$

Seja $\mathbf{y}$ um elemento da união. Existe e em E_{n+1} , tal que $\mathbf{y}$ está em $C(pe)$, então $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = pe$, assim $(y_1, \dots, y_n) = p$ e portanto $\mathbf{y}$ está em $C(p)$.

Concluimos que

$$c(p) = \bigcup_{e \in E_{n+1}, s(e)=r(p_n)} C(pe).$$

5. Provaremos que $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as três condições da definição de sequência de partições refinadoras.

- Pelo item 3, temos que cada $\mathcal{P}_n$ é uma partição de $X_{\mathfrak{B}}$.
- Dados $n \geq 1$ e p em $E_{0,n}$, pelo item 4, cada $C(p)$ em $\mathcal{P}_n$ é a união de elementos em $\mathcal{P}_{n+1}$. Então $\mathcal{P}_{n+1}$ é mais fina que $\mathcal{P}_n$ para todo $n \geq 1$.
- Dado $n \geq 1$, temos pelo item 1 que $C(p) = B(\mathbf{p}, 2^{-n+1})$. Assim

$$\text{diam}(\mathcal{P}_n) = 2^{-n+1} \text{ para todo } n \geq 1,$$

$$\text{portanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Finalizamos, então, a demonstração da proposição. ■

Teorema 5.1.6. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli, o espaço métrico $(X_{\mathfrak{B}}, d)$ é compacto.*

Prova. O espaço $(X_{\mathfrak{B}}, d)$ é limitado, já que $X_{\mathfrak{B}} \subset B(\mathbf{x}, 1)$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$.

Seja $A \subset X_{\mathfrak{B}}$ um subconjunto infinito, mostraremos que A possui um ponto de acumulação. Temos que

$$A = \bigcup_{e \in E_1} A \cap C(e).$$

O conjunto E_1 é finito, como A é infinito, um dos elementos da união tem que ser infinito. Assim existe $e_1 \in E_1$, tal que $A \cap C(e_1)$ é infinito. Suponha, indutivamente, que para n , existe e_n em E_n , tal que $A \cap C(e_1, \dots, e_n)$ é um conjunto infinito. Sabemos pelo item (4) da Proposição 5.1.5 que:

$$A \cap C(e_1, \dots, e_n) = \bigcup_{e \in E_{n+1}, s(e)=r(e_{n-1})} A \cap C(e_1, \dots, e_n, e).$$

Como, $A \cap C(e_1, \dots, e_n)$ é um conjunto infinito pela hipótese de indução, existe e_{n+1} em E_{n+1} tal que $A \cap C(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ é infinito.

Definimos, indutivamente, $\mathbf{x} = (e_1, e_2, \dots)$, temos que $\mathbf{x}$ está em $X_{\mathfrak{B}}$. Dados $r > 0$ e $n \geq 1$, tais que $2^{-n+1} < r$, temos que:

$$B(x, r) \cap A \supset B(x, 2^{-n+1}).$$

Usando o item 1 da Proposição 5.1.5, temos:

$$B(x, 2^{-n+1}) \cap A = C(e_1, \dots, e_n) \cap A,$$

assim

$$C(e_1, \dots, e_n) \cap A \subset B(x, r) \cap A.$$

Como $A \cap C(e_1, \dots, e_n)$ é um conjunto infinito para todo $n \geq 1$, então $B(x, r) \cap A$ também é um conjunto infinito, portanto $B(x, r) \cap A \setminus \{x\}$ é um conjunto não vazio. Concluimos então que x é um ponto de acumulação de $A \subset X_{\mathfrak{B}}$, assim $(X_{\mathfrak{B}}, d)$ é espaço métrico compacto. ■

Lema 5.1.7. *Dados um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e $m, n \geq 0$, tais que $n > m$, temos que para todo w em V_n existe v em V_m ligado a w por um caminho em $E_{m,n}$.*

Prova. Como $r^{-1}\{w\} \neq \emptyset$ para todo w em V_n para todo $n \geq 1$, existe v_{n-1} em V_{n-1} ligado a w por algum caminho em $E_{n-1,n}$. Indutivamente e concatenando os caminhos, existe v em V_m ligado a w por algum caminho em $E_{m,n}$. ■

Teorema 5.1.8. *Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$. Suponha que F é um subconjunto infinito de E , tal que*

$$s(F) \subset r(F) \cup \{v_0\}. \quad (5.1.1)$$

Então F contém um caminho infinito.

Prova. Seja F um subconjunto infinito de E que satisfaça as hipóteses do teorema, isto é, para todo e em $F \setminus E_1$ existe aresta $u(e)$ em F tal que $s(e) = r(u(e))$. Observe que $s(E_1) = \{v_0\}$.

Lema 5.1.9. *Dado $n \geq 1$, definimos o conjunto*

$$F_{0,n} = \{(f_1, f_2, \dots, f_n) \in E_{0,n} \mid f_i \in F \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Temos que $F_{0,n}$ é não vazio.

Prova. Como cada E_i é um conjunto finito e, por hipótese, F é infinito, existe um elemento em F que não está em $E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}$, digamos que esteja em E_m . Denotaremos tal elemento por e_m . Temos que $m \geq n$.

Por hipótese, existe em F aresta em E_{m-1} , digamos e_{m-1} , tal que $s(e_m) = r(e_{m-1})$. Indutivamente, para cada $1 \leq k \leq n-1$, existe em F uma aresta e_{m-k} em E_{m-k} tal que $s(e_{m-k+1}) = r(e_{m-k})$. Então o caminho $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ está em F e como $m \geq n$, o caminho $(e_1, \dots, e_n)$ está em $F_{0,n}$. Provando o lema. ■

Voltamos, agora, para a demonstração do Teorema 5.1.8. Agora, para cada $n \geq 1$, definimos

$$X_n := \{\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}} \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_{0,n}\} = \bigcup_{p \in F_{0,n}} C(p).$$

Temos que, para cada $n \geq 1$

1. X_n é não vazio, já que $F_{0,n}$ é não vazio.
2. X_n é clopen, já que cada $C(p)$ é clopen e existe um número finito de elementos em $F_{0,n}$.
3. $X_{n+1} \subset X_n$.

Como $X_{\mathfrak{B}}$ é compacto, as condições (1), (2), (3), implicam que $\bigcap_{n \geq 1} X_n$ é não vazio. Pela definição do conjunto X_n , temos que qualquer elemento de $\bigcap_{n \geq 1} X_n$ é um caminho infinito e está em F . ■

5.2

Propriedade telescópica de um diagrama de Bratteli

Agora, apresentaremos a noção de passar a uma subsequência em um diagrama de Bratteli, que será chamada de propriedade telescópica de um diagrama de Bratteli.

Definição 5.2.1. Dados $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli e uma sequência estritamente crescente de inteiros $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \dots$. Definimos o diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através da subsequência $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, como se segue:

- $W_n = V_{m_n}$;
- $F_n = E_{m_{n-1}, m_n}$
- $\bar{s} = \{\bar{s}_n\}_{n \geq 1}$, onde $\bar{s} : F_n = E_{m_{n-1}, m_n} \rightarrow W_{n-1} = V_{m_{n-1}}$, para todo $n \geq 1$, tal que $\bar{s}^{-1}\{v\}$ é não vazio para todo v em $\cup_{n \geq 0} F_n$;
- $\bar{r} = \{\bar{r}_n\}_{n \geq 1}$, onde $\bar{r} : F_n = E_{m_{n-1}, m_n} \rightarrow W_n = V_{m_n}$, para todo $n \geq 1$, tal que $\bar{r}^{-1}\{v\}$ é não vazio para todo v em $\cup_{n \geq 1} F_n$.

Assim, dado

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$$

em $X_{\mathfrak{B}}$, o caminho

$$\bar{\mathbf{x}} = ((x_1, \dots, x_{m_1}), (x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}), \dots)$$

está em $X_{\mathfrak{T}}$. Definimos, então, a função de blocos

$$f = f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}},$$

tal que

$$f(x_1, x_2, \dots) = ((x_1, \dots, x_{m_1}), (x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}), \dots).$$

Proposição 5.2.2. Se $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ é obtido a partir de $\mathfrak{B} = (V, F, r, s)$ através de uma subsequência $\{m_k\}_{k \geq 1}$ então a função de blocos

$$f = f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$$

é um homeomorfismo.

Prova. Como $X_{\mathfrak{B}}$ e $X_{\mathfrak{T}}$ são espaços métricos compactos, basta mostrar que f é uma bijeção contínua. Claramente, a função f é injetiva e sobrejetiva. Agora,

iremos mostrar que f é contínua. Dado $\epsilon > 0$, existe r em $\mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^r} < \epsilon$. Seja i em $\mathbb{N}$, tal que

$$m_r < i \leq m_{r+1}.$$

Dado $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$. Se $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ é tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{1}{2^i}$ então $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \frac{1}{2^r} < \epsilon$. Então f é contínua. Concluimos que f é um homeomorfismo. ■

5.3

Relação de equivalência AF

Já mostramos que o espaço $(X_{\mathfrak{B}}, d)$ é um espaço ultramétrico e compacto. Agora, definiremos uma relação de equivalência neste espaço.

Definição 5.3.1 (Relação-AF). *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Chamaremos $R_{\mathfrak{B}}$ a relação em $X_{\mathfrak{B}}$ dada por:*

$\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{y}$ se e só se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são iguais menos em um número finito de entradas.

Em particular, existe i_0 tal que $x_i = y_i$ para todo $i > i_0$.

A sigla AF significa aproximadamente finita.

Proposição 5.3.2. *A relação-AF é uma relação de equivalência.*

Prova. Mostraremos que a relação-AF satisfaz as propriedades:

- Reflexiva: É claro que $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{x}$.
- Simétrica: Também é claro que se $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{y}$ então $\mathbf{y} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{x}$.
- Transitiva: Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tais que $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{z}$. Como $\mathbf{x}$ difere de $\mathbf{y}$ em um número finito de entradas e $\mathbf{y}$ difere em um número finito de entradas de $\mathbf{z}$ então $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ também diferem em um número finito de entradas, assim $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{z}$.

Denotaremos a classe de equivalência de um elemento $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ por $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$. A proposição abaixo apresenta o efeito de passar a uma subsequência na relação-AF.

Proposição 5.3.3. *Dado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli e o diagrama $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência $m_0 = 0 < m_1 < \dots$. Seja f o homeomorfismo da Proposição 5.2.2. Então $f(\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}) = \langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}}$.*

Prova. Primeiro mostraremos que dado $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$,

$$f(\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}) \subset \langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}}.$$

Seja $\mathbf{y}$ em $f(\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}})$, então existe $\mathbf{z}$ em $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$, tal que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$. Temos que $\mathbf{y}$ está em $\langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}}$. Suponha por absurdo que isso não aconteça. Como $f(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ iriam ter um número diferentes de entradas, o que é uma contradição.

Agora, provaremos que

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}} \subset f(\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}).$$

Seja $\mathbf{y}$ em $\langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}}$. Como f é sobrejeção, existe $\mathbf{z}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tal que

$$f(\mathbf{z}) = ((z_1, \dots, z_{m_1}), (z_{m_1+1}, \dots, z_{m_2}) \dots) = \mathbf{y}.$$

Como $\mathbf{y}$ está em $\langle f(\mathbf{x}) \rangle_{R_{\mathfrak{T}}}$, $\mathbf{y}$ e $f(\mathbf{x}) = ((x_1, \dots, x_{m_1}), (x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}) \dots)$ diferem em um número finito de entradas, então $\mathbf{z} \sim \mathbf{x}$, assim $\mathbf{y} = f(\mathbf{z}) \in f(\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}})$. Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Pela Proposição 5.3.3, as relações de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ e $R_{\mathfrak{T}}$ são equivalentes.

Definição 5.3.4. Dizemos que um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ possui todas as arestas conectadas quando para todo vértice v em V_{n-1} e todo w em V_n existe uma aresta e em E_n , tal que $s(e) = v$ e $r(e) = w$.

Teorema 5.3.5. Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para cada $m \geq 0$ e cada vértice v em V_m , existe $n(v) > m$ tal que para todo w em V_n existe um caminho de v para w .
2. Para cada $m \geq 0$, existe $n(m) > m$ tal que para todo v em V_m e para todo w em V_n existe um caminho de v para w .
3. Existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência, que possui todas as arestas conectadas.
4. A relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal.

Prova. Mostraremos que as afirmações são equivalentes.

(1) $\Rightarrow$ (2): Dados $m \geq 0$ e v em V_m , existe $n(v) > m$, tal que para todo w em $V_{n(v)}$, existe um caminho de v para w . Definimos

$$n := \max\{n(v) \mid v \in V_m\}.$$

Então, pelo Lema 5.1.7, para todo v em V_m e todo w em V_n , existe um caminho de v para w .

(2) $\Rightarrow$ (3): Seja $m_0 = 0$, existe $m_1 > 0$ tal que, para todo v em V_{m_1} existe um caminho entre v_0 e v . Indutivamente, para cada m_i , existe $m_{i+1} > m_i$, tal que para todo v em V_{m_i} e todo w em $V_{m_{i+1}}$, existe um caminho entre v e w .

Definimos então a sequência crescente $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ e obtemos o diagrama $\mathfrak{T}$ a partir de $\mathfrak{B}$ através da subsequência $\{m_k\}_{k \geq 0}$.

Falta mostrar que $\mathfrak{T}$ possui todas as arestas conectadas. Seja v em W_{n-1} , então v está em $V_{m_{n-1}}$. Por hipótese, existe um caminho $e(v, w)$ entre todo v em $V_{m_{n-1}} = W_{n-1}$ e todo w em $V_{m_n} = W_n$. Como $e(w, v)$ liga v a w , temos que $\bar{s}(e(v, w)) = v$ e $\bar{r}(e(v, w)) = w$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Seja $\mathfrak{T}$ o diagrama de Bratteli obtido a partir $\mathfrak{B}$ por uma subsequência $\{m_k\}_{k \geq 0}$. Dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ é suficiente mostrar que

$$C(y_1, \dots, y_{m_1}) \cap \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \neq \emptyset.$$

Definimos $v_y = r(y_{m_1})$. Dado $w = s^{-1}(x_{m_2+1})$ em $W_2 = V_{m_2}$, existe $e(v_y, w)$ aresta em $F_n = E_{m_1, m_2}$ ligando v_y a w , já que $\mathfrak{T}$ possui todas as arestas conectadas. Assim,

$$(y_1, \dots, y_n, e(v_y, w), x_{m_2+1}, \dots) \sim_{\mathfrak{B}} \mathbf{x}.$$

Além disso, $(y_1, \dots, y_n, e(v_y, w), x_{m_2+1}, \dots)$ está em $C(y_1, \dots, y_{m_1})$. Portanto,

$$C(y_1, \dots, y_{m_1}) \cap \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \neq \emptyset.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Suponha, por absurdo, que existam $m \geq 0$ e v em V_m tal que para todo $m + k > m$ existe w em V_{m+k} que não é ligado a v por nenhum caminho. Construiremos, indutivamente, um ponto $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e uma sequência $\{\bar{y}_k\}_{k \geq 1}$, onde cada elemento $\bar{y}_k$ está em $E_{m, m+k}$ e é disjunto do caminho $(x_{m+1}, \dots, x_{m+k})$. Faremos a prova por indução em k .

- **Caso $k = 1$:** Existe w_1 em W_{m+1} que não é ligado a v por nenhum caminho em $E_{m, m+1}$. Definimos, então x_{m+1} como algum elemento de $s^{-1}(v)$ e $\bar{y}_1$ como alguma aresta do conjunto $r^{-1}(w_1)$. Por hipótese, $s^{-1}(v)$ e $r^{-1}(w_1)$ são disjuntos, pois caso contrário haveria um caminho ligando v a w_1 , o que é uma contradição. Então x_{m+1} e $\bar{y}_1$ são disjuntos.
- Suponha que já construímos, para todo $1 \leq i \leq k$, as arestas $x_{m+i} \in E_{m+i}$ e a concatenação $(x_{m+1}, \dots, x_{m+i}) \in E_{m, m+i}$ e o caminho $\bar{y}_i$, de forma que $(x_{m+1}, \dots, x_{m+i})$ e $\bar{y}_i$ são disjuntos.

- Construiremos o elemento $x_{m+k+1} \in E_{m+k+1}$ e $\bar{y}_{k+1}$. Temos que existe w_{k+1} em V_{m+k+1} que não é ligado a v por nenhum caminho. Definimos então x_{m+k+1} como algum elemento de $s^{-1}(r(x_{m+k}))$.

Definimos $\bar{y}_{k+1}$ como algum caminho em $E_{m,m+k+1}$, tal que $y_{m+k+1} \in r^{-1}(w_{m+k+1})$. Os caminhos $(x_{m+1}, \dots, x_{m+k+1})$ e $\bar{y}_{k+1}$ são disjuntos, já que w_{m+k+1} não é ligado a v por nenhum caminho.

Seja $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ algum caminho entre v_0 e v , definimos

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}, \dots)$$

e a sequência $\{\mathbf{y}_k\}_{k \geq 1}$, tal que para cada k , $\mathbf{y}_k$ é um elemento de $X_{\mathfrak{B}}$ que contém o caminho $\bar{y}_k$ definido acima. Como, pelo Teorema 5.1.6, $X_{\mathfrak{B}}$ é compacto, temos que a sequência $\{\mathbf{y}_k\}_{k \geq 1}$ possui subsequência convergente, digamos que para o ponto $\mathbf{y}$. Repare que $\mathbf{y}$ não está em $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$, o que é uma contradição, já que $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal. ■

Definição 5.3.6 (Diagrama de Bratteli simples). *Se um diagrama de Bratteli satisfaz quaisquer uma das três primeiras condições do Teorema 5.3.5, dizemos que ele é simples.*

5.4

Exemplos

Considere o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ apresentado na Figura 5.2. O conjunto $X_{\mathfrak{B}}$ representa o espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Neste caso a relação $R_{\mathfrak{B}}$ é a relação de equivalência de caudas apresentada na Definição 2.3.1.

Temos que $\mathcal{B}$ satisfaz a condição 1 do Teorema 5.3.5, portanto a relação de equivalência $R_{\mathcal{B}}$ é minimal.

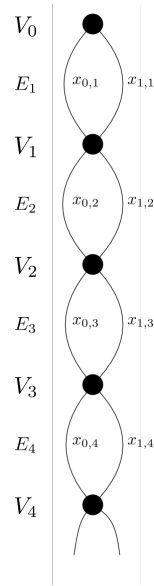


Figura 5.2: Diagrama de Bratteli que representa $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

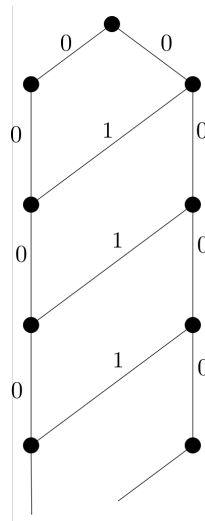


Figura 5.3: Diagrama $\mathfrak{T}$, onde $X_{\mathfrak{T}}$ é um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Agora, considere o diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$ da Figura 5.3. Note que o espaço $X_{\mathfrak{T}}$ é formado pelas sequências infinitas $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$, tais que $x_n = 0$ para todo $n \geq 1$ ou existe $i \geq 1$ tal que $x_i = 1$ e $x_j = 0$ para todo $i \neq j$. Considere o conjunto

$$X = \left\{ \frac{1}{2^i} \mid i \geq 0 \right\}.$$

Existe um homeomorfismo natural entre $X_{\mathfrak{T}}$ e X .

Seja o vértice $v_{1,1}$. Para todo $i > 1$, não há caminho que ligue $v_{1,1}$ ao vértice $v_{2,i}$. Logo, o diagrama $\mathfrak{T}$ não satisfaz a condição 1 do Teorema 5.3.5 e, portanto, a relação $R_{\mathfrak{T}}$ não é minimal.

No capítulo anterior, definimos um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e a este diagrama associamos o espaço $X_{\mathfrak{B}}$. Definimos a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ que é uma generalização da relação R definida no Capítulo 2. No Capítulo 2 também definimos a relação R_{φ} . Agora, o objetivo é definir uma relação de equivalência no espaço $X_{\mathfrak{B}}$ que generalize a relação R_{φ} .

6.1

Diagrama de Bratteli ordenado

Definição 6.1.1 (Ordem parcial). *Dado um conjunto X , uma relação $\geq$ é dita uma ordem parcial se satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Reflexiva: dado $x \in X$, $x \geq x$.*
- *Antissimétrica: Dados $x, y \in X$, se $x \geq y$ e $y \geq x$, então $x = y$.*
- *Transitiva: Sejam $x, y, z \in X$. Se $x \geq y$ e $y \geq z$ então $x \geq z$.*

Definição 6.1.2 (Diagrama de Bratteli ordenado). *Um diagrama de Bratteli ordenado é formado por um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e uma ordem parcial $\geq$ em E , tal que duas arestas e_1 e e_2 podem ser comparadas se e só se $r(e_1) = r(e_2)$. Denotaremos tal diagrama por $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$.*

Os conjuntos de arestas máximas e mínimas serão denotados por $E_{\max}$ e $E_{\min}$, respectivamente.

Definição 6.1.3 (Árvore geradora). *Dado um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$. Um subconjunto de arestas A é chamado de árvore geradora se para qualquer v em V existe um único caminho formado por arestas de A de v_0 para v .*

Proposição 6.1.4. *Os conjuntos $E_{\max}$ e $E_{\min}$ são árvores geradoras.*

Prova. Dado v em V_n , consideramos v' como o primeiro vértice tal que existem pelo menos duas arestas distintas e_1 e e_2 tais que $r(e_1) = r(e_2) = v'$. Só uma destas arestas pode ser máxima, já que elas tem extremidade no mesmo vértice. Portanto, existe somente um caminho em $E_{\max}$ ligando v a v_0 . A situação é análoga para $E_{\min}$. ■

Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e um subconjunto F de E , denotaremos o conjunto dos caminhos infinitos de F por X_F .

Dado um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$, definimos os conjuntos $X_{E_{\max}}$ e $X_{E_{\min}}$ como os conjuntos dos caminhos infinitos formados pelas arestas de $E_{\max}$ e $E_{\min}$, respectivamente. Definiremos uma função $\phi_{\mathfrak{B}}$ associada a $\mathfrak{B}$, que será um homeomorfismo entre $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$ e $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}}$.

Dado $\mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$, existe n tal que x_n é a primeira aresta que não está em $E_{\max}$, então existe aresta y_n , tal que $r(x_n) = r(y_n)$ e y_n é o elemento seguinte a x_n , que está unicamente determinado. Como $E_{\min}$ é árvore geradora existe um único caminho em $E_{\min}$ ligando v_0 a $s(y_n)$, denotemos tal caminho por $(y_1, \dots, y_{n-1})$. Assim, definimos a função

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}} &\rightarrow X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}} \\ \phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) &= (y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

Proposição 6.1.5. *Dado um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$, a função $\phi_{\mathfrak{B}}$ é um homeomorfismo.*

Prova. Dado $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}}$, tal que y_n é a primeira entrada que não está em $E_{\min}$. Existe aresta x_n , tal que $r(y_n) = r(x_n)$ e x_n é o elemento seguinte a y_n . Como $E_{\max}$ é uma árvore geradora, existe um único caminho em $E_{\max}$ ligando v_0 a $s(x_n)$, denotemos tal caminho por $(x_1, \dots, x_{n-1})$. Definimos a função

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}} &\rightarrow X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}} \\ \psi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{y}) &= (x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

Mostraremos que $\psi_{\mathfrak{B}}$ é a inversa de $\phi_{\mathfrak{B}}$.

Dado $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$, seja x_n a primeira entrada que não está em $E_{\max}$ e y_n a aresta seguinte a x_n . Seja $(y_1, \dots, y_{n-1})$ o único caminho em $E_{\min}$ ligando v_0 a $s(x_n)$, temos que:

$$\psi_{\mathfrak{B}} \circ \phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) = \psi_{\mathfrak{B}}((y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, \dots)) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = \mathbf{x}.$$

Agora, dado $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}}$, seja y_n a primeira entrada que não está em $E_{\min}$ e x_n a aresta seguinte a y_n . Seja $(x_1, \dots, x_{n-1})$ o único caminho em $E_{\max}$ ligando v_0 a $s(y_n)$, temos que:

$$\phi_{\mathfrak{B}} \circ \psi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{y}) = \phi_{\mathfrak{B}}((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, y_{n+1}, \dots)) = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots) = \mathbf{y}.$$

Portanto, $\psi_{\mathfrak{B}}$ é a inversa de $\phi_{\mathfrak{B}}$. Logo $\phi_{\mathfrak{B}}$ é bijeção.

Falta mostrar que $\phi_{\mathfrak{B}}$ e $\psi_{\mathfrak{B}}$ são contínuas. Provaremos a continuidade de $\phi_{\mathfrak{B}}$. A continuidade de $\psi_{\mathfrak{B}}$ se prova de forma análoga. Dados $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$ e $\epsilon > 0$, existem $\ell > 0$ tal que x_{ℓ} é a primeira entrada que não é máxima n em $\mathbb{N}$, tal que $2^{-n} = \epsilon$. Considere $\delta = \epsilon$, mostraremos que se $\mathbf{z}$ está em $B(\mathbf{x}, \delta)$, então $\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{z})$ está em $B(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \epsilon)$.

Digamos que $\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_{\ell}, x_{\ell+1}, \dots)$. Temos dois casos. O primeiro é quando $\ell \leq k$. Neste caso, temos que $x_i = z_i$ e que x_i e z_i estão em $E_{\max}$ para todo $0 \leq i \leq \ell - 1$, portanto $(x_1, \dots, x_{\ell-1})$ e $(z_1, \dots, z_{\ell-1})$ serão levados por $\varphi_{\mathfrak{B}}$ no mesmo caminho mínimo $(y_1, \dots, y_{\ell-1})$. Além disso, $x_{\ell} = z_{\ell}$, assim y_{ℓ} também é o elemento seguinte para z_{ℓ} . Então, temos que

$$\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{z}) = (y_1, \dots, y_{\ell}, z_{\ell+1}, \dots) = (y_1, \dots, y_{\ell}, x_{\ell+1}, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots).$$

Assim, $(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}))_i = (\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{z}))_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, logo $\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{z}) \in B(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), 2^{-k}) \subset B(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \epsilon)$.

Agora considere que $\ell > k$. Temos que $x_i = z_i$ e que x_i e z_i estão em $E_{\max}$ para todo $1 \leq i \leq \ell - 1$, portanto $(x_1, \dots, x_{\ell-1})$ e $(z_1, \dots, z_{\ell-1})$ são levados por $\phi_{\mathfrak{B}}$ no mesmo caminho mínimo $(y_1, \dots, y_{\ell-1})$. Assim, $(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}))_i = (\varphi_{\mathfrak{B}})(\mathbf{z})_i$ para todo $1 \leq i \leq \ell - 1$. Então $\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{z}) \in B(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), 2^{-(\ell-1)}) \subset B(\phi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \epsilon)$.

Concluimos, assim, a demonstração da proposição. $\blacksquare$

Definição 6.1.6 (Diagrama de Bratteli próprio). *Dado um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$, dizemos que $\mathfrak{B}$ é próprio se $E_{\max}$ e $E_{\min}$ possuem, cada um, exatamente um caminho infinito. Também dizemos que $\geq$ é uma ordem própria em (V, E, r, s) .*

Em um diagrama de Bratteli ordenado próprio, denotamos por $\mathbf{x}_{\max}$ e $\mathbf{x}_{\min}$ os únicos caminhos infinitos de $E_{\max}$ e $E_{\min}$, respectivamente. Neste caso, podemos estender o domínio da função $\phi_{\mathfrak{B}}$ para $X_{\mathfrak{B}}$. Definimos a extensão de $\phi_{\mathfrak{B}}$ por

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} &\rightarrow X_{\mathfrak{B}} \\ \varphi_{\mathfrak{B}}|_{X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}} &= \phi_{\mathfrak{B}} \text{ e} \\ \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) &= \mathbf{x}_{\min}. \end{aligned}$$

Teorema 6.1.7. *Dado um diagrama de Bratteli ordenado próprio $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$, a função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é um homeomorfismo.*

Prova. Por hipótese, $\mathfrak{B}$ é próprio, logo $X_{E_{\max}} = \{\mathbf{x}_{\max}\}$, assim

$$X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}} = X_{\mathfrak{B}} \setminus \{\mathbf{x}_{\max}\}.$$

Além disso, $\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) = \mathbf{x}_{\min}$, então

$$X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\min}} = X_{\mathfrak{B}} \setminus \{\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max})\}.$$

Pela Proposição 6.1.5, $\varphi_{\mathfrak{B}}|_{X_{E_{\max}} \setminus \{\mathbf{x}_{\max}\}}$ é um homeomorfismo. Então é suficiente mostrar que $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é contínua em $\mathbf{x}_{\max}$. Se $\mathbf{x}_{\max}$ é ponto isolado não há o que fazer. Agora, considere que $\mathbf{x}_{\max}$ não é um ponto isolado. Definimos a sequência $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 1}$, onde para cada $n \geq 1$, $\mathbf{x}_n = (x_{n,i})_{i \geq 1}$ está em $X_{\mathfrak{B}}$ e $x_{n,i}$ está em $E_{\max}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Para cada $n \geq 1$, $f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$, onde $y_{n,i}$ está em $E_{\min}$ para todo $1 \leq i \leq n$, assim $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_{\min} = f(\mathbf{x}_{\max})$. Concluimos que $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é contínua em $\mathbf{x}_{\max}$ e portanto é um homeomorfismo. ■

Chamaremos a função $\varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ de aplicação de Bratteli-Vershik associada ao diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$.

Teorema 6.1.8. *Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$. Se $\mathfrak{B}$ possui todas as arestas conectadas, então $\mathfrak{B}$ possui uma ordem própria.*

Prova. Para cada $n \geq 1$, denotamos os vértices em V_n por v_i^n , onde $1 \leq i \leq \#V_n := m(n)$. Dado v_j^n em V_n , como $\mathfrak{B}$ possui todas as arestas conectadas, temos que $r^{-1}(v) = V_{n-1}$. Definimos, então $e_{n,i,j}$ a aresta em E_n que liga v_i^{n-1} em V_{n-1} a v_j^n em V_n . Escolhemos como aresta mínima $e_{(n,1,j)}$ e como aresta máxima $e_{(n,m(n-1),j)}$. Temos que $r(e_{(n-1,1,1)}) = s(e_{(n,1,1)})$ e $s(e_{(n-1,m(n-2),m(n-1))}) = r(e_{(n,m(n-1),m(n))})$ para todo n , assim definimos:

$$\mathbf{x}_{\min} = (e_{(1,1,1)}, e_{(2,1,1)} \cdots e_{(n,1,1)}, \dots) \text{ e}$$

$$\mathbf{x}_{\max} = (e_{(1,m(0),m(1))}, e_{(1,m(1),m(2))}, \dots, e_{(1,m(n-1),m(n))}, \dots).$$

Mostraremos que $\mathbf{x}_{\min}$ é o único caminho mínimo. Suponha que existe outro caminho mínimo $\mathbf{y}$ diferente de $\mathbf{x}_{\min}$, então existe para algum n vértice v_i^n , onde i é diferente de 1 e v_i^n é a imagem por r de alguma aresta mínima em E_n , mas, por definição, nenhuma aresta em $s(v_i^n)$ é mínima. Portanto $\mathbf{y}$ não pode ser um caminho mínimo. Analogamente mostramos que $\mathbf{x}_{\max}$ é o único caminho máximo.

Então construímos uma ordem própria para o diagrama $\mathfrak{B}$ e portanto terminamos a demonstração. ■

Exemplo 6.1.9. *O diagrama de Bratteli da Figura 6.1 é próprio.*

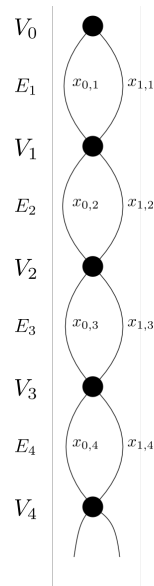
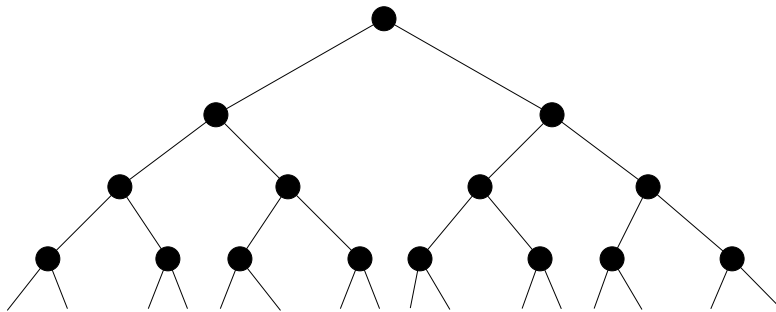
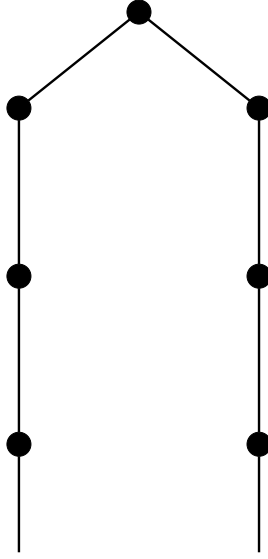


Figura 6.1: Diagrama de Bratteli próprio.

Definimos que $x_{\min,n} = x_{0,1}$ e que $x_{\max,n} = x_{1,1}$. Assim, só há um caminho infinito formado somente por arestas máximas e somente um formado por arestas mínimas

Exemplo 6.1.10. Os diagramas $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{Q}$ apresentados, respectivamente, nas figuras 6.2 e 6.3 não são próprios, já que cada vértice só recebe uma aresta. Portanto, toda aresta é máxima e também mínima.

Figura 6.2: Diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$

Figura 6.3: Diagrama de Bratteli Ω

6.2

As relações $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ e $R_{\mathfrak{B}}$

Seja $\mathfrak{B}$ um diagrama de Bratteli. O objetivo desta seção é estudar a relação entre $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ e $R_{\mathfrak{B}}$. Lembre que dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ definimos:

- $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \mathbf{y}$ se e só se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ diferem em um número finito de entradas. Em particular, existe $n \geq 1$ tal que $x_i = y_i$ para todo $i > n$. Representamos a classe de equivalência de $\mathbf{x}$ por $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$.
- $\mathbf{x} \sim_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}} \mathbf{y}$ se e só se existe inteiro k tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Representamos a classe de equivalência de $\mathbf{x}$ por $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$.

Para cada $n \geq 0$, consideramos a sub-relação de equivalência $R_{\mathfrak{B},n}$ de $R_{\mathfrak{B}}$ em $X_{\mathfrak{B}}$, tal que $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B},n}} \mathbf{y}$ se e só se $x_i = y_i$ para todo $i > n$. Denotaremos a classe de equivalência de $\mathbf{x}$ por $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B},n}}$. Note que para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$, $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B},n}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$.

Agora iremos analisar o comportamento da relação orbital $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ quando $\mathfrak{B}$ é um diagrama de Bratteli ordenado próprio.

Teorema 6.2.1. *Dado um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Se $\mathbf{x} \notin X_{E_{\max}}$ então $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$.
2. $R_{\mathfrak{B}}$ é a menor relação de equivalência na qual $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$.

3. Se $\mathfrak{B}$ é próprio então $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}}$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $\mathbf{x}_{\max} \sim_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}} \mathbf{x}_{\min}$.

4. Se $\mathfrak{B}$ é próprio, então $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ é a menor relação de equivalência tal que para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$, $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}}$ e $\mathbf{x}_{\max} \sim_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}} \mathbf{x}_{\min}$.

Prova. Precisaremos do seguinte lema:

Lema 6.2.2. *Considere um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $n \geq 1$. Se $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B},n}} \mathbf{y}$ e $x_n < y_n$ então existe $k > 0$ tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^i(\mathbf{x})$ não está em $X_{E_{\max}}$ para todo $0 \leq i < k$ e $\varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.*

Prova. A prova será por indução em n . Há uma pequena diferença para o caso $n = 1$ e portanto ele será feito separadamente.

Dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tais que $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B},1}} \mathbf{y}$ e $x_1 < y_1$. Se m é a quantidade de arestas entre x_1 e y_1 , segue, pela definição de $\varphi_{\mathfrak{B}}$, que $\varphi_{\mathfrak{B}}^{m+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

O caso $n = 2$ será importante para entender o caso geral e portanto ele também será feito.

- Caso $n=2$: por hipótese $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B},2}} \mathbf{y}$ e $x_2 < y_2$. Temos que $r(x_2) = r(y_2) = v$. Listamos na ordem $\geq$ todas as arestas entre x_2 e y_2 levadas por r em v :

$$x_2 = e_{2,1} < e_{2,2} < \cdots < e_{2,m} = y_2,$$

onde $m \geq 2$.

Agora ordenamos as arestas em E_1 :

$$e_{1,1} < e_{1,2} < \cdots < e_{1,r}.$$

Então, temos dois casos. Se $x_1 = e_{1,r}$:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^1(\mathbf{x}) = (e_{1,1}, e_{2,2}, x_3, \dots)$$

Agora, se $x_1 = e_{1,j}$, onde $j \neq r$, temos:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{r-j}(\mathbf{x}) = (e_{1,r}, e_{2,1} = x_2, x_3, \dots).$$

Definimos $j - r = \ell$. Então

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1}(\mathbf{x}) = (e_{1,1}, e_{2,2}, x_3, \dots)$$

Agora, temos que:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1+r}(\mathbf{x}) = (e_{1,1}, e_{2,3}, x_3, \dots)$$

Seguindo indutivamente, obtemos:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1+r(m-2)}(\mathbf{x}) = (e_{1,1}, e_{2,m} = y_2, x_3, \dots)$$

para $m \geq 2$. Temos que $y_1 = e_{1,j'}$, então

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1+r(m-2)+j'-1}(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, x_3, \dots).$$

Como, por hipótese $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}_{R_{\mathfrak{B},2}}$ temos que $x_i = y_i$ para todo $i > 2$, então

$$\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1+r(m-2)+j'-1}(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, x_3, \dots) = \mathbf{y}.$$

- Suponha que $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B},i}} \mathbf{y}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e que existe k tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^j(\mathbf{x})$ não está em $X_{E_{\max}}$ para todo $0 \leq j < k$ e $\varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
- Dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$, tais que $\mathbf{x} \sim_{R_{E,n}} \mathbf{y}$ e $x_n < y_n$. Listaremos em ordem todas as arestas levadas por r em $r(x_n) = r(y_n)$:

$$x_n = e_{n,1} < e_{n,2} < \dots < e_{n,m} = y_n.$$

Como $E_{\max}$ e $E_{\min}$ são árvores geradoras, podemos definir para cada $i \geq 1$, os caminhos p_i e q_i como os únicos caminhos mínimo e máximo, respectivamente, que ligam v_0 a $s(e_i)$. Consideremos a lista de pontos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \quad , \quad x_n = e_1 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{z}_1 &= (q_1 \quad , \quad e_1 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{w}_2 &= (p_2 \quad , \quad e_2 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{z}_2 &= (q_2 \quad , \quad e_2 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{w}_3 &= (p_3 \quad , \quad e_3 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{z}_3 &= (q_3 \quad , \quad e_3 \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ &\dots \\ \mathbf{z}_{m-1} &= (q_{m-1} \quad , \quad e_{m-1} \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{w}_m &= (p_m \quad , \quad e_m \quad , \quad x_{n+1}, \dots) \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \quad , \quad y_n = e_m \quad , \quad x_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

Denotaremos o segundo ponto da lista por $\mathbf{z}$, temos que $\mathbf{x} \sim_{R_{E,n-1}} \mathbf{y}$. Se $q_1 = x_1, \dots, x_{n-1}$ então $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ são iguais. Suponha que são diferentes então existe t tal que x_t é a primeira aresta que não está em $E_{\max}$ e $1 \leq t \leq n-1$. Usando a hipótese de indução temos que existe $k_1 \geq 0$, tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^{k_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. Temos, pela definição de $\varphi_{\mathfrak{B}}$, que $\varphi_{\mathfrak{B}}$ aplicada ao segundo ponto é o terceiro ponto.

Usando os argumentos acima alternadamente, obtemos que cada ponto da lista é alguma potência inteira de $\varphi_{\mathfrak{B}}$ aplicada ao ponto anterior. Assim, existe $K > 0$, tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^K(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Finalizamos, então, a demonstração do lema. $\blacksquare$

Agora voltaremos à demonstração do Teorema 6.2.1.

1. Se $\mathbf{x} \notin X_{E_{\max}}$, a função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ altera apenas um número finito de entradas e após a primeira entrada que é igual a $\mathbf{x}_{\min}$ não há alterações. Então existe $n > 0$ tal que $x_i = (\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}))_i$ para todo $i > n$. Portanto $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$.
2. Suponha que existe relação de equivalência R tal que $\langle \mathbf{x} \rangle_R \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $\mathbf{x} \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$.

Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos em $X_{\mathfrak{B}} \setminus E_{\max}$ tais que $\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \mathbf{y}$. Pelo Lema 6.2.2, temos que existe $m > 0$ tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e nenhum dos pontos $\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{\mathfrak{B}}^{m-1}(\mathbf{x})$ está em $X_{E_{\max}}$. Então, por hipótese, para cada $0 \leq i < m$, $\varphi_{\mathfrak{B}}^i(\mathbf{x}) \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}^{i+1}(\mathbf{x})$. Por transitividade, $\mathbf{x} \sim_R \mathbf{y}$. Assim, $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_R$ e, portanto, $R = R_{\mathfrak{B}}$.

3. Por hipótese, $\mathfrak{B}$ é próprio. Pela definição de $\varphi_{\mathfrak{B}}$ temos que, $\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) = \mathbf{x}_{\min}$, então $\mathbf{x}_{\max} \sim_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}} \mathbf{x}_{\min}$. Além disso, temos que $\mathbf{x} \sim_{\varphi_{\mathfrak{B}}} \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{B}} \setminus X_{E_{\max}}$. Pelo item anterior, concluímos que $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}}$.
4. Seja relação de equivalência R , tal que $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_R \subset \langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}}$ e que $\mathbf{x}_{\max} \sim_R \mathbf{x}_{\min}$. Então $\mathbf{x} \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$. Pela transitividade da relação de equivalência R , temos que $\mathbf{x} \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$ e $m \geq 0$. Como R é simétrica, também temos que $\varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x}) \sim_R \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$ e $m \geq 0$. Agora, considere $m < 0$, temos que $\varphi_{\mathfrak{B}}^{-m}(\varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x})) \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x})$. Portanto, $\mathbf{x} \sim_R \varphi_{\mathfrak{B}}^m(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$ e todo $m < 0$. Concluímos, então que $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}} \subset \langle \mathbf{x} \rangle_R$, logo $R = R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$.

Concluímos, então, a demonstração do teorema. $\blacksquare$

Agora iremos apresentar um resultado sobre a minimalidade de $R_{\mathfrak{B}}$.

Teorema 6.2.3. *Dado um diagrama de Bratteli próprio $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. a relação de equivalência $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ é minimal;
2. a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal;

3. o diagrama $\mathfrak{B}$ é simples.

Prova. Pelo Teorema 5.3.5, temos que (2) e (3) são equivalentes e pelo Teorema 6.2.1 temos que (2) $\Rightarrow$ (1), então falta mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha que $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ é minimal. Pelo Teorema 6.2.1, temos que para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}} \setminus \{\mathbf{x}_{\max}\}$, $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}} = \langle \mathbf{x} \rangle_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$. Como $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ é minimal, para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}} \setminus \{\mathbf{x}_{\max}\}$ a classe de equivalência $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$. Portanto, só falta mostrar que $\langle \mathbf{x}_{\max} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$ é densa. Sejam $\mathbf{z} \in X_{\mathfrak{B}}$ e $r < 0$. Existe $n > 0$ tal que $2^{-n} < r$. Definimos o elemento

$$\mathbf{y} = (z_1, \dots, z_n x_{\max_{n+1}}, x_{\max_{n+2}}, \dots).$$

Por definição,

$$\mathbf{y} \in B(z, r) \cap \langle \mathbf{x}_{\max} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}.$$

Concluimos, então que $\langle \mathbf{x}_{\max} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$ é densa e, portanto, finalizamos a demonstração do teorema. ■

No Capítulo 2 definimos a soma no espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Considere, agora, o espaço de sequências infinitas $\mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1}$, onde para cada $i \geq 1$, existe um número natural $a_n > 1$, tal que $x_i \in \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Podemos representar este espaço por

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, a_n - 1\}.$$

Dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em X , definimos $z_1 = (x_1 + y_1) \bmod a_1$,

$$w_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 + y_1 \geq a_1, \\ 0, & \text{se } x_1 + y_1 < a_1. \end{cases}$$

Para $i \geq 1$, definimos

$$w_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i + y_i \geq a_i, \\ 0, & \text{se } x_i + y_i < a_i. \end{cases}$$

Definimos, também, $z_{i+1} = (w_i + x_{i+1} + y_{i+1}) \bmod a_{i+1}$. Por fim,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \mathbf{z} = (z_i)_{i \geq 1}.$$

Considere o diagrama de Bratteli tal que $V_n = \{v_n\}$ para todo $n \geq 0$ e que para cada $n \geq 1$, $E_n = \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Como para cada $n \geq 0$, o conjunto V_n é unitário, as funções r e s estão unicamente determinadas. Ademais, se denotamos um elemento de E_n por $e_{i,n}$, onde $1 \leq i \leq a_n - 1$, temos que $r(e_{i,n}) = r(e_{j,n})$ para todo $1 \leq i, j \leq a_n - 1$. Então todas as arestas em E_n

podem ser comparadas. Para cada $n \geq 1$, definimos a ordem natural: $e_{i,n} \geq e_{j,n}$ se e somente se $i \geq j$. Portanto, formamos um diagrama de Bratteli ordenado e próprio $\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E = \{E_n\}_{n \geq 0}, r, s, \geq)$. Temos que

$$X_{\mathfrak{B}} = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, a_n - 1\}.$$

A transformação de Bratteli-Vershik associada ao diagrama $\mathfrak{B}$, $\varphi_{\mathfrak{B}}$, é igual, neste caso, a adição do elemento $(1000\dots)$ a um elemento do espaço $X_{\mathfrak{B}}$. Chamamos o sistema $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ de odômetro.

Como o diagrama $\mathfrak{B}$ possui somente um vértice em cada nível, temos que $\mathfrak{B}$ é simples. Então, pelo Teorema 6.2.3, a relação de equivalência $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ é minimal, e, portanto, o sistema dinâmico $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ é minimal.

7

Partições de Kakutani-Rokhlin

O objetivo deste capítulo é mostrar que dados um conjunto de Cantor X , um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$ e $y \in X$, existem um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ ordenado, simples e próprio e uma conjugação $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X$ e $h(\mathbf{x}_{\max}) = y$. Para isto precisaremos definir alguns conceitos.

7.1

Castelos

Nesta seção dados um conjunto de Cantor, um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$ e um subconjunto clopen não vazio de X , produziremos uma partição do espaço X associada à função φ e ao subconjunto Y .

Lema 7.1.1. *Sejam X um espaço métrico compacto e $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo minimal. Se Y é um subconjunto fechado de X , tal que $\varphi(Y) \subset Y$ então ou $Y = X$ ou $Y = \emptyset$.*

Prova. Suponha que $Y \neq \emptyset$. Então existe y em Y . Como φ é minimal, temos que

$$\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^i(y)} = X.$$

Mas, $\varphi(Y) \subset Y$, então

$$\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^i(y)} \subset Y.$$

Então $X \subset Y$ e portanto $Y = X$. ■

Lema 7.1.2. *Sejam X um conjunto de Cantor, $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo minimal e Y um subconjunto de X clopen e não vazio. Então:*

1. Para cada y em Y , o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \mid \varphi^n(y) \in Y\}$$

é não vazio.

2. A função $\lambda_Y : Y \rightarrow \mathbb{N}$

$$\lambda_Y(y) = \inf\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \mid \varphi^n(y) \in Y\},$$

está bem definida e para cada y em Y é contínua.

3. O conjunto $\lambda_Y(Y)$ é finito.

Prova. Veremos que as afirmações são verdadeiras.

1. Dado y em Y , como Y é aberto existe vizinhança V_y de Y , tal que $V_y \subset Y$. Como φ é minimal, $\mathcal{O}_\varphi(y) \cap V_y \neq \emptyset$. Portanto o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1 \mid \varphi^n(y) \in Y\}$$

é não vazio.

2. Pelo item anterior, temos que a função está bem definida. Dado y em Y , considere sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \rightarrow y.$$

Definimos $\lambda_Y(y) = n$. Como φ é homeomorfismo, temos que φ^n é função contínua. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^n(x_k) = \varphi^n(y) \in Y.$$

Então $\lambda_Y(x_k) \leq n$. Provaremos que $\lambda_Y(x_k) \rightarrow n$. Suponha que $\lambda_Y(x_k) \rightarrow n' \neq n$. Se $n' < n$, temos que $\varphi^{n'}(x_k)$ está em Y para todo k . Como φ é contínua e Y é fechado, temos que $\varphi^{n'}(y)$ está em Y , o que é uma contradição.

3. Suponha que $\lambda_Y(Y)$ seja infinito, então existe sequência $\{y_k\}_{k \geq 1}$ de elementos de Y , tal que $\lambda_Y(y_k) \rightarrow \infty$. Como Y é fechado e X é compacto, temos que Y é compacto. Portanto, $\{y_k\}_{k \geq 1}$ converge, a menos de uma subsequência, para um ponto y_∞ em Y . Como λ_Y é contínua

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_Y(y_k) = \lambda(y_\infty) = \infty,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\lambda_Y(Y)$ é um conjunto finito.

Nesta seção consideraremos que X é um conjunto de Cantor, $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo minimal. Seja Y um subconjunto não-vazio e clopen de X . Suponha que $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_K\}$ seja uma partição de Y formada por conjuntos não-vazios e clopen tais que para cada $i \geq 1$, a função λ_Y é constante em Y_i . Denotamos $\lambda_Y(Y_i) = J_i$.

Agora, para cada $1 \leq i \leq K$ e $1 \leq j \leq J_i$, definimos o conjunto

$$Y(i, j) = \varphi^j(Y_i).$$

Lema 7.1.3. *Os conjuntos*

$$\{Y(i, j) \mid 1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq J_i\}$$

formam uma partição de X .

Prova. Como para cada $1 \leq i \leq K$, o conjunto Y_i é não vazio, temos que $\varphi^j(Y_i)$ é não vazio para cada $1 \leq i, 1 \leq j \leq J_i$.

A função φ é um homeomorfismo então φ^n é um homeomorfismo para todo n em $\mathbb{Z}$. Assim, como para cada $1 \leq i \leq K$, Y_i é clopen, temos que $\varphi^j(Y_i) = Y(i, j)$ é clopen para cada $1 \leq i \leq I$ e $1 \leq j \leq J_i$.

Agora, mostraremos que os conjuntos $Y(i, j)$ são dois a dois disjuntos. Isto é, que,

$$Y(i_1, j_1) \cap Y(i_2, j_2) = \emptyset, \text{ para cada } 1 \leq i_1, i_2 \leq I \text{ e } 1 \leq j_1, j_2 \leq J_{i_1},$$

a não ser que $i_1 = i_2$ e $j_1 = j_2$.

É claro que se $j_1 \neq j_2$ e $i_1 = i_1$, temos que

$$Y(i_1, j_2) \cap Y(i_2, j_2) = \emptyset.$$

Agora, suponha que $i_1 \neq i_2$. Dados $1 \leq j_1, j_2 \leq J_{i_1}$,

$$Y(i_1, j_1) = \varphi^{j_1}(Y_{i_1}) \text{ e } Y(i_2, j_2) = \varphi^{j_2}(Y_{i_2}).$$

Se $j_1 = j_2$, claramente temos que $Y(i_1, j_1) \cap Y(i_1, j_2) = \emptyset$. Agora, se $j_1 \neq j_2$, suponha que existem elementos y_{i_1} e y_{i_2} em Y_{i_1} e Y_{i_2} , respectivamente, tais que $\varphi^{j_1}(y_{i_1}) = \varphi^{j_2}(y_{i_2})$. Podemos supor que $j_2 > j_1$, então

$$\varphi^{j_2-j_1}(y_{i_2}) = y_{i_1} \in Y_{i_1},$$

o que é uma contradição, já que $\lambda_Y(Y_{i_1}) = J_{i_1} > j_2 - j_1$.

Portanto, só falta mostrar que

$$\bigcup_{i=1}^K \bigcup_{j=1}^{J_i} Y(i, j) = X.$$

Temos, por definição que

$$\mathcal{O}_\varphi(y) \subset \bigcup_{i=1}^K \bigcup_{j=1}^{J_i} Y(i, j)$$

para todo y em Y . O conjunto $\bigcup_{i=1}^K \bigcup_{j=1}^{J_i} Y(i, j)$ é fechado, já que é união finita de conjuntos fechados. Como φ é minimal, temos que $\mathcal{O}_\varphi(y)$ é densa para todo y em Y , assim

$$X = \overline{\mathcal{O}_\varphi(y)} = \overline{\bigcup_{i=1}^K \bigcup_{j=1}^{J_i} Y(i, j)} = \bigcup_{i=1}^K \bigcup_{j=1}^{J_i} Y(i, j).$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Definição 7.1.4 (Castelo). *Sejam X um conjunto de Cantor, φ um homeomorfismo minimal e Y subconjunto clopen não vazio de X . Qualquer partição da forma*

$$\{Y(i, j) \mid 1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq J_i\}$$

de X é chamada de uma partição Kakutani-Rokhlin centrada em Y ou de castelo.

Quando a partição $\{Y_1, \dots, Y_K\}$ de Y for tal que os números J_i são dois a dois distintos para todo $1 \leq i \leq K$, o castelo é canônico e será denotado por $\mathcal{K}_\varphi(Y, Y_1, \dots, Y_k)$.

Para $1 \leq i \leq K$ fixo, chamamos os conjuntos $\{Y(i, j) \mid 1 \leq j \leq J_i\}$ de torre.

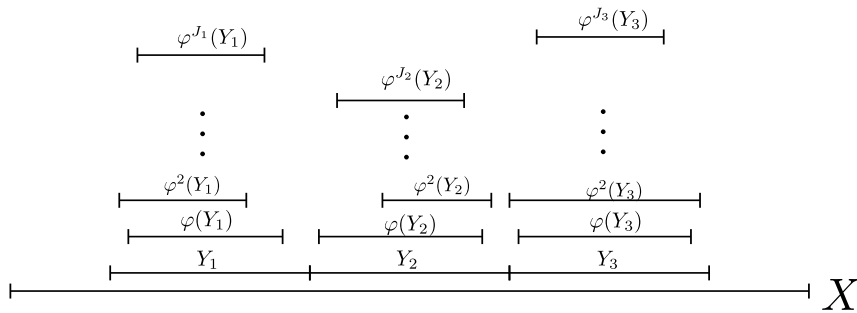


Figura 7.1: Ilustração de um castelo.

Lema 7.1.5. *Sejam X espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ função contínua. Para qualquer $\epsilon > 0$ e $J \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{diam}(f^j(B(x, \delta))) < \epsilon.$$

para todo x em X e $1 \leq j \leq J$.

Prova. Temos que f é contínua em um compacto, portanto f é uniformemente contínua. Assim, dado $J \geq 1$, temos que f^j é uniformemente contínua para todo $1 \leq j \leq J$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f^j(B(x, \delta)) \subset B\left(f^j(x), \frac{\epsilon}{2}\right),$$

para todo x em X e todo $1 \leq j \leq J$. Então, dados $\epsilon > 0$ e $J \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{diam}(f^j(B(x, \delta))) < \epsilon,$$

para todo x em X e todo $1 \leq j \leq J$. ■

Lema 7.1.6. *Seja X um conjunto de Cantor, φ um homeomorfismo minimal e Y um subconjunto clopen e não vazio de X . Dada uma partição $\mathcal{P}$ de X existe um castelo centrado em Y que é mais fino que $\mathcal{P}$.*

Prova. Sejam uma partição $\mathcal{P} = \{X_n\}_{n \geq 1}$ de X e Y subconjunto clopen não vazio de X . Definimos

$$\epsilon = \min_n \text{diam}(X_n) \quad \text{e} \quad J = \max\{\lambda_Y(Y)\}.$$

Pelo Lema 7.1.5 existe δ tal que

$$\text{diam}(\varphi^j(B(x, \delta))) < \epsilon$$

para todo x em X e $1 \leq j \leq J$. Consideramos uma partição $\{Y_1, \dots, Y_K\}$ de Y formada por conjuntos clopen não vazios tal que para cada $1 \leq i \leq K$, Y_i , $\text{diam}(Y_i) < \delta$. Então, temos que

$$\{Y(i, j) \mid 1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq J_i\}$$

é partição de X e que

$$\text{diam}(Y(i, j)) < \epsilon$$

para todo $1 \leq i \leq K$ e $1 \leq j \leq J_i$.

Agora, definimos o castelo

$$\mathcal{Q} = \{Y(i, j) \cap X_N \mid 1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq N \leq \#(\mathcal{P})\}.$$

Temos que $\mathcal{Q}$ é centrado em Y e é mais fino que $\mathcal{P}$. ■

Com isso mostramos que qualquer partição $\mathcal{P}$ de um conjunto de Cantor admite um castelo como partição mais fina que $\mathcal{P}$. Mas, pelo Teorema 3.1.13 que todo espaço totalmente desconexo admite uma sequência de partições refinadoras. Isso nos leva a seguinte definição:

Definição 7.1.7 (Sequência de castelos refinadores). *Se para cada $n \geq 1$, $\mathcal{Q}_n = \{Y_n(i, j) \mid 1 \leq I_n, 1 \leq j \leq J_{n,i}\}$ é um castelo centrado em um conjunto clopen Y_n , dizemos que $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de castelos refinadores se:*

1. a sequência $\{\mathcal{Q}_n\}$ é uma sequência refinadora de partições;
2. para cada $n \geq 2$, os conjuntos Y_n e $\varphi(Y_n)$ estão contidos em apenas um elemento de $\mathcal{Q}_{n-1}$.

3. Os conjuntos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n \text{ e } \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(Y_n)$$

são unitários.

Teorema 7.1.8. *Sejam X um conjunto de Cantor, φ um homeomorfismo minimal em X e y um elemento de X . Existe uma sequência de castelos refinadores centrados em conjuntos clopen $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, tais que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \{y\} \text{ e } \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(Y_n) = \{\varphi(y)\}.$$

Prova. Considere a sequência de conjuntos clopen

$$Y_0 = X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots,$$

tais que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \{y\},$$

e uma sequência de partições refinadoras $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ de X . Construiremos indutivamente uma sequência de castelos $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$, onde para cada $n \geq 1$, $\mathcal{Q}_n$ é centrado em Y_n mais fino que $\mathcal{P}_n$.

- Etapa $n = 1$: Pelo Lema 7.1.6, existe um castelo $\mathcal{Q}_1$ centrado em Y_1 e mais fino que $\mathcal{P}_1$. Podemos escrever

$$\mathcal{Q}_1 = \{Y_1(i, j) \mid 1 \leq K_1, 1 \leq j \leq J_{1,i}\}.$$

- Etapa $n = 2$: Caso Y_2 não esteja contido somente em um elemento de $\mathcal{Q}_1$, escolhemos um conjunto clopen contido em Y_2 que contenha y tal que

isso aconteça. Agora, pelo lema 7.1.6, existe um castelo $\mathcal{Q}_2$ centrado em Y_2 e mais fino que a partição $\mathcal{P}_2$.

- Suponha que construímos castelo $\mathcal{Q}_\ell$ centrado em Y_ℓ e mais fino que $\mathcal{Q}_{\ell-1}$, tal que Y_ℓ está contido em apenas um elemento de $\mathcal{Q}_{\ell-1}$ para todo $2 \leq \ell \leq n$.
- Caso Y_{n+1} não esteja contido em apenas um elemento de $\mathcal{Q}_n$, escolhemos um conjunto clopen contido em Y_{n+1} tal que isso aconteça. Agora, pelo Lema 7.1.6, existe castelo $\mathcal{Q}_{n+1}$ centrado em Y_{n+1} e mais fino que $\mathcal{P}_{n+1}$.

Temos, portanto, que a sequência $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as condições 1 e 2 da Definição 7.1.7. Mostraremos que também satisfaz a condição 3.

Como para cada $n \geq 1$, Y_n é um conjunto fechado, contém y e

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \dots,$$

temos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \{y\}.$$

Além disso, temos que para cada $n \geq 1$, $\varphi(Y_n)$ é um conjunto clopen que contém $\varphi(y)$ e

$$\varphi(Y_1) \supset \varphi(Y_2) \supset \dots,$$

assim

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(Y_n) = \{\varphi(y)\}.$$

Então $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ também satisfaz a condição 3 e portanto é uma sequência de castelos refinadores. ■

7.1.1

Construção de $\mathfrak{B}$

Seja $\mathfrak{B}$ um diagrama de Bratteli, lembremos que na Definição 5.1.2 definimos o conjunto $X_{\mathfrak{B}}$ como o conjunto dos caminhos infinitos de $\mathfrak{B}$.

Agora, dados um conjunto de Cantor X e $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo minimal construiremos um diagrama de Bratteli simples e próprio $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ tal que $X_{\mathfrak{B}}$ é topologicamente conjugado a X .

Dada uma sequência de subconjuntos clopen $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ de X , onde para cada $n \geq 1$, $\{Y_{n,1}, \dots, Y_{n,I_n}\}$ é partição de Y_n . Pelo Teorema 7.1.8, existe uma sequência $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ de castelos refinadores de X , onde

$$\mathcal{Q}_n = \{Y_n(i, j) \mid 1 \leq i \leq I_n, 1 \leq j \leq J_{n,i}\}$$

e está centrado no conjunto Y_n .

À sequência de castelos refinadores acrescentamos o castelo trivial

$$Q_0 = \{Y_0(1, 1) = X \mid I_0 = 1, J_{0,1} = 1\}.$$

Estamos prontos para definir o diagrama de Bratteli

$$\mathfrak{B} = (V = (V_n)_{n \geq 1}, E = (E_n)_{n \geq 1}, r, s, \geq).$$

Para cada $n \geq 1$, definimos:

$$V_n = \{1, 2, \dots, I_n\}$$

e

$$E_n = \{(\delta, i, j) \mid 1 \leq \delta \leq I_{n-1}, 1 \leq i \leq I_n, 1 \leq j \leq J_{n,i}, \\ \text{onde } Y_n(i, j) \subset Y_{n-1}(\delta, 1)\}.$$

E definimos as funções $s : E_n \rightarrow V_{n-1}$ e $r : E_n \rightarrow V_n$:

$$s(\delta, i, j) = \delta \quad \text{e} \quad r(\delta, i, j) = i.$$

Dado $n \geq 1$, denotemos por (δ_n, i_n, j_n) um elemento de E_n e um elemento de $X_{\mathfrak{B}}$ por $\mathbf{x} = (\delta_n, i_n, j_n)_{n \geq 1}$. Assim, $r(\delta_n, i_n, j_n) = s(\delta_{n+1}, i_{n+1}, j_{n+1})$ para todo $n \geq 1$, ou seja $i_n = \delta_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 7.1.9. *O diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ é simples e próprio.*

Prova. Mostraremos que $\mathfrak{B}$ possui todas as arestas conectadas e portanto será simples e próprio. Sejam $n \geq 1$ e i_{n-1} em V_{n-1} . Como $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ é sequência de castelos refinadores, dado i_n em V_n , existe j_n tal que

$$Y_n(i_n, j_n) \subset Y_{n-1}(i_{n-1}, 1).$$

Então (i_{n-1}, i_n, j_n) é aresta entre i_{n-1} e i_n . Então $\mathfrak{B}$ possui todas as arestas conectadas. ■

7.1.2

Construção da conjugação entre $X_{\mathfrak{B}}$ e X

Construiremos uma conjugação entre as funções $\varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ e $\varphi : X \rightarrow X$. Para isso precisaremos de algumas etapas preliminares.

Lema 7.1.10. Dado $\mathbf{x} = (\delta_n, i_n, j_n)_{n \geq 1}$ em $X_{\mathfrak{g}}$. Considere a sequência $k_n = k_n(\mathbf{x})$ onde

$$k_1 = j_1 \quad k_n = k_{n-1} + j_n - 1 \pmod{J_{n,i_n}}.$$

Então para todo $n \geq 1$, temos que

$$Y_{n+1}(i_{n+1}, k_{n+1}) \subset Y_n(i_n, k_n).$$

Observação 7.1.11. Considere $n > 1$, se $k_{n-1} + j_n - 1 > J_{n,i_n}$ adotaremos $k_n = k_{n-1} + j_n - 1 \pmod{J_{n,i_n}}$, já que dado $1 \leq \ell \leq J_{n,i_n}$,

$$Y_n(i_n, J_{n,i_n} + \ell) = Y_n(i_n, \ell).$$

Voltaremos, agora, a demonstração do Lema 7.1.10.

Prova. Dado $n \geq 1$, temos, por definição do conjunto E_n , que

$$Y_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1}) \subset Y_n(\delta_{n+1}, 1).$$

Mas, $r(\delta_n, i_n, j_n) = s(\delta_{n+1}, i_{n+1}, j_{n+1})$, portanto $\delta_{n+1} = i_n$ e

$$Y_{n+1}(i_{n+1}, j_{n+1}) \subset Y_n(i_n, 1).$$

Então, de acordo com a definição dos conjuntos $Y(i, j)$, temos

$$\varphi^{j_{n+1}}(Y_{n+1,i_{n+1}}) \subset \varphi(Y_{n,i_n}) \Rightarrow \varphi^{j_{n+1}-1}(Y_{n+1,i_{n+1}}) \subset Y_{n,i_n}.$$

Portanto, para todo k :

$$\varphi^{k+j_{n+1}-1}(Y_{n+1,i_{n+1}}) \subset \varphi^k(Y_{n,i_n}).$$

Definimos $k_n = k$. Assim

$$\varphi^{k_n+j_{n+1}-1}(Y_{n+1,i_{n+1}}) \subset \varphi^{k_n}(Y_{n,i_n}).$$

mas, $k_n + j_{n+1} - 1 = k_{n+1}$, então

$$Y_{n+1}(i_{n+1}, k_{n+1}) \subset Y_n(i_n, k_n),$$

provando assim o Lema. ■

Pelo Lema 7.1.10, $\{Y_n(i_n, k_n)\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de conjuntos encai-

xados e fechados. Além disso, $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ é sequência de partições refinadoras, então

$$\text{diam}(Y_n((i_n, k_n))) \rightarrow 0.$$

Portanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n(i_n, k_n) = \{x\}. \quad (7.1.1)$$

Podemos, então, definir a função

$$\begin{aligned} h : X_{\mathfrak{Y}} &\rightarrow X \\ h((\delta_n, i_n, j_n)_{n \geq 1}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n(i_n, k_n) \\ h(\mathbf{x}_{\max}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_{n, i_n}. \end{aligned}$$

Lema 7.1.12. *A função $h : X_{\mathfrak{Y}} \rightarrow X$ é um homeomorfismo.*

Prova. Como X é compacto, basta mostrar que h é uma bijeção contínua. É claro que h é injetiva.

Agora, mostraremos que h é sobrejetiva. Seja x em X . Construiremos $\mathbf{x}$ em $X_{\mathfrak{Y}}$, tal que $h(\mathbf{x}) = x$.

Dado $n \geq 1$, como

$$\{Y_n(i, j) \mid 1 \leq i \leq I_n, 1 \leq j \leq J_{n,i}\}$$

é partição de X , temos que existem i_n e j_n , tais que x está em $Y_n(i_n, j_n)$. Como $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ é sequência de partições refinadoras, temos que para cada $n \geq 1$, $Y_n(i_n, j_n)$ está contido somente em um elemento de $\mathcal{Q}_{n-1}$. Além disso x está em $Y_n(i_n, j_n)$ e em $Y_{n-1}(i_{n-1}, j_{n-1})$, então

$$Y_n(i_n, j_n) \subset Y_{n-1}(i_{n-1}, j_{n-1}). \quad (7.1.2)$$

Como $\text{diam}(\mathcal{Q}_n) \rightarrow 0$, temos que

$$\bigcap Y_n(i_n, j_n) = \{x\}. \quad (7.1.3)$$

Reescrevendo (7.1.2), temos que para todo $n \geq 1$,

$$\varphi^{j_n}(Y_{n, i_n}) \subset \varphi^{j_{n-1}}(Y_{n-1, i_{n-1}}).$$

Então

$$\varphi^{j_n - j_{n-1} + 1}(Y_{n, i_n}) \subset \varphi(Y_{n-1, i_{n-1}}).$$

Definimos

$$\mathbf{x} = (i_{n-1}, i_n, \ell_n)_{n \geq 1}$$

onde

$$\ell_1 = j_1 \quad \text{e} \quad \ell_n = j_n - j_{n-1} + 1 \text{ se } n > 1.$$

Temos que

$$h(\mathbf{x}) = \bigcap Y_n(i_n, k_n) = \bigcap Y_n(i_n, j_n) = \{x\}.$$

Falta mostrar que h é contínua. Seja $\mathbf{x} = (\delta_n, i_n, j_n)$ em X . Dado $\epsilon > 0$, como $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 1}$ é sequência de partições refinadoras, existe $n_0 > 0$, tal que $\text{diam}(\mathcal{Q}_n) < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Existe r em $\mathbb{N}$, tal que $2^{-r} < \epsilon$. Definimos

$$\delta = \min\{2^{-r}, 2^{-n_0}\}$$

e seja $\mathbf{y} = (\lambda_n, \ell_n, p_n)$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tal que

$$d_{X_{\mathfrak{B}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta.$$

Então, para todo $N > r$,

$$(\delta_N, i_N, j_N) = (\lambda_N, \ell_N, p_N).$$

Portanto, para todo $N > r$ temos que $h(\mathbf{x})$ está em $Y_N(i_N, j_N)$ e em $Y_N(\ell_N, p_N)$ e além disso, temos que $\text{diam}(Y_N(i_N, j_N)) < \epsilon$ e $\text{diam}(Y_N(\ell_N, p_N)) < \epsilon$, então

$$Y_N(i_N, j_N) = Y_N(\ell_N, p_N)$$

Assim, $d_X(h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) < \epsilon$. ■

Teorema 7.1.13. *A função h é uma conjugação entre $\varphi_{\mathfrak{B}}$ e φ .*

Prova. Como pelo Lema 7.1.12, h é um homeomorfismo só falta mostrar que $h \circ \varphi_{\mathfrak{B}} = \varphi \circ h$. Para isto, mostraremos que $h^{-1} \circ \varphi = \varphi_{\mathfrak{B}} \circ h^{-1}$.

Dado $x \in X$, escrevemos

$$\bigcap Y_n(i_n, j_n) = \{x\}.$$

Suponha que N é a primeira entrada em que $j_N \neq j_{N, i_N}$. Iremos, então, identificar cada J_{n, i_n} com o número 0, já que

$$Y_n(i_n, J_{n, i_n}) = Y_{n, i_n}.$$

Como apresentado na demonstração do Lema 7.1.12, temos que

$$h^{-1}(x) = (i_{n-1}, i_n, \ell_n)_{n \geq 1} = \mathbf{x},$$

onde

$$\ell_1 = j_1 \quad \text{e} \quad \ell_n = j_n - j_{n-1} + 1 \text{ se } n > 1.$$

Assim,

$$h^{-1}(\varphi(x)) = h^{-1}\varphi\left(\bigcap Y_n(i_n, j_n)\right) \subset h^{-1}\left(\bigcap Y_n(i_n, j_n + 1)\right) = (i_{n-1}, i_n, \bar{\ell}_n)_{n \geq 1}.$$

Como identificamos, para todo n , J_{n, i_n} com 0, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_n &= 1 \quad \text{se } 1 \leq n \leq N - 1, \\ \bar{\ell}_N &= j_N + 1 \quad \text{e} \\ \bar{\ell}_n &= j_n - j_{n-1} + 1 \quad \text{se } n > N. \end{aligned}$$

Assim,

$$h^{-1}(\varphi(x)) = \varphi_{\mathfrak{B}}((i_{n-1}, i_n, \ell_n)_{n \geq 1}) = \varphi_{\mathfrak{B}}(h^{-1}(x))$$

.

■

8

Relações de equivalência étale

Nas seções anteriores, dados um conjunto de Cantor X , um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$ e um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$, estudamos dois tipos de relações de equivalência: $R_{\mathfrak{B}}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e R_{φ} em X . Apesar delas serem relacionadas, vimos que são diferentes. O objetivo desta seção é estudar uma classe mais geral de relações de equivalência em um conjunto de Cantor X , onde $R_{\mathfrak{B}}$ e R_{φ} são casos específicos.

8.1

Ações locais e relações de equivalência Étale

Agora, trabalharemos com espaços topológicos $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$. Por motivo de conveniência denotaremos as funções $f : X \rightarrow X$ como conjuntos de pares ordenados:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Precisamos estabelecer algumas notações. Primeiro a de composição de duas funções $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$:

$$f \circ g = \{(x, z) \mid \text{existe } y, (x, y) \in f, (y, z) \in g\}.$$

Definição 8.1.1 (Homeomorfismo parcial). *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços topológicos. Dados $U \subset \mathcal{X}$ e $V \subset \mathcal{Y}$ subconjuntos abertos e $\gamma : U \rightarrow V$ um homeomorfismo, dizemos que γ é um homeomorfismo parcial. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem totalmente desconexos, os subconjuntos U e V devem ser clopen.*

Denotaremos por $\pi_1 : X \times X \rightarrow X$ a projeção canônica sobre a primeira coordenada e por $\pi_2 : X \times X \rightarrow X$ a projeção canônica sobre a segunda coordenada. Dado um conjunto aberto U de $\mathcal{X}$, seja id_U a identidade definida em U :

$$\text{id}_U = \{(x, x) \mid x \in U\}.$$

Definimos $f \cap g$, como a função f , definida no conjunto de pontos onde f e g assumem o mesmo valor.

Consideremos o espaço topológico $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ e os subconjuntos A, B, C, D de X . Dadas duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, vistas como conjuntos

podemos considerar a interseção $f \cap g$.

Seja $\mathcal{B} = \{U_\alpha\}_\alpha$ uma coleção de subconjuntos de um espaço X . Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia de X quando:

- $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.
- Dado qualquer subconjunto finito I de índices, $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{B}$.

Definição 8.1.2 (Ação local). *Seja $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ espaço topológico e Γ uma coleção de homeomorfismos parciais de $\mathcal{X}$. A coleção Γ é uma ação local em $\mathcal{X}$ se*

1. *A coleção de conjuntos $\{U \in \mathcal{T} \mid \text{id}_U \in \Gamma\}$ forma uma base para a topologia de X .*
2. *Se γ está em Γ então γ^{-1} também está.*
3. *Se γ_1, γ_2 estão em Γ então $\gamma_1 \circ \gamma_2$ também está.*
4. *Se γ_1, γ_2 estão em Γ então $\gamma_1 \cap \gamma_2$ também está.*

Quando for conveniente denotaremos os elementos de Γ por $(\gamma, U, V = \gamma(U))$, onde U é o domínio de definição de γ .

Observação 8.1.3 (Interseção de funções). *Se os elementos de Γ fossem simplesmente homeomorfismos, as condições (1) (2) e (3) diriam que os elementos de Γ formam um grupo.*

Já a condição (4) nos diz que se dois homeomorfismo parciais são iguais em um ponto, então devem ser iguais em um vizinhança deste ponto. Já que $\gamma_1 \cap \gamma_2$ é a função γ_1 definida no conjunto de pontos onde as funções γ_1 e γ_2 possuem a mesma imagem. Mas o conjunto de pontos onde duas funções são iguais é um conjunto fechado. Para $\gamma_1 \cap \gamma_2$ ser um homeomorfismo parcial, este conjunto deve ser também aberto.

Seja γ em Γ , associamos a γ o aberto U_γ em $\mathcal{X}$, onde γ está definida. Assim, também associamos a γ o aberto do produto

$$\{(x, \gamma(x)) \mid x \in U_\gamma\} \subset X \times X.$$

Definimos

$$R_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{(x, \gamma(x)) \mid x \in U_\gamma\}. \quad (8.1.1)$$

Que é uma coleção de abertos em $X \times X$. Assim, dados dois pontos x e y em X , dizemos que

$$x \sim y \text{ se e somente se } (x, y) \in R_\Gamma.$$

Isto é, se e somente se existe γ em Γ tal que $y = \gamma(x)$.

Proposição 8.1.4. *Se Γ é uma ação local no espaço $\mathcal{X}$, então R_Γ é uma relação de equivalência em X .*

Prova. Mostraremos que R_Γ satisfaz as propriedades:

- Simétrica: Seja x em X , temos que $id : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo parcial, assim $(x, x) \in R_\Gamma$, logo $x \sim x$.
- Reflexiva: Dados x e y tais que $x \sim y$, então existe $\gamma \in \Gamma$, tal que $y = \gamma(x)$. Pela condição (2) da Definição 8.1.2, temos que $\gamma^{-1} \in \Gamma$. Dessa forma, $x = \gamma^{-1}(y)$ e portanto $y \sim x$.
- Transitiva: Dados x, y e $z \in X$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existe γ_1 e γ_2 tais que

$$y = \gamma_1(x) \text{ e } z = \gamma_2(y).$$

Temos que

$$z = \gamma_2(\gamma_1(x)) = \gamma_2 \circ \gamma_1(x).$$

Pela condição (3) da Definição 8.1.2, temos que $\gamma_2 \circ \gamma_1$ está em Γ . Portanto, $x \sim z$.

Concluimos, assim, que R_Γ é uma relação de equivalência. ■

Repare que dado $x \in X$, $\langle x \rangle_\Gamma = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Teorema 8.1.5. *Se Γ é uma ação local no espaço $\mathcal{X}$ totalmente desconexo, então Γ é base de uma topologia em R_Γ , que será denotada por $\mathcal{E}_\Gamma$. Com a topologia $\mathcal{E}_\Gamma$, as funções $\pi_1, \pi_2 : R_\Gamma \rightarrow \mathcal{X}$ são homeomorfismos locais. Neste, caso chamamos R_Γ de relação de equivalência étale e $\mathcal{E}_\Gamma$ de topologia étale.*

Prova. Pela definição de R_Γ em 8.1.1, temos que os elementos de Γ formam uma cobertura de R_Γ . Além, pela condição (4) da Definição 8.1.2, temos que Γ é fechado para a interseção. Assim Γ é base para a topologia de R_Γ .

O conjunto R_Γ é uma coleção de abertos de $X \times X$ que podem ser escritos da forma $\gamma = (V, \gamma(V))$, onde γ é um homeomorfismo parcial em Γ . Assim, podemos considerar a restrição de $\pi_1 : R_\Gamma \rightarrow X$, ao conjunto γ :

$$\pi_{1|_\gamma} : \gamma = (V, \gamma(V)) \rightarrow V, \quad (x, \gamma(x)) \rightarrow x,$$

que iremos denotar por π_{1_γ} .

Agora, mostraremos que π_{1_γ} é um homeomorfismo local, portanto π_1 é um homeomorfismo parcial.

Como γ é homeomorfismo local e $\mathcal{X}$ é totalmente desconexo, temos que $\pi_1(\gamma) = V$ é um conjunto clopen e que π_{1_γ} é uma bijeção.

Seja U subconjunto clopen de X , tal que id_U está em Γ . Temos que $U \cap \pi_1(\gamma) \subset \pi_1(\gamma)$ é aberto em $\pi_1(\gamma)$ e usando que π_{1_γ} é bijeção obtemos que $\pi_1^{-1}(U \cap s(\gamma)) \subset \gamma$ e

$$\pi_1^{-1}(U \cap s(\gamma)) = \text{id}_U \circ \gamma.$$

Mas, id_U e γ estão em Γ , logo pela condição (3) da Definição 8.1.2, temos que $\pi_1^{-1}(U \cap s(\gamma)) \subset X \times X$ está em Γ , portanto $\pi_1^{-1}(U \cap s(\gamma))$ é aberto em γ . Pela condição (1) da Definição 8.1.2, podemos concluir que π_{1_γ} é contínua.

Falta mostrar que $\pi_{1_\gamma}^{-1}$ é contínua. Dado β em Γ , temos que $\gamma \cap \beta$ está em Γ e que os conjuntos $\{\beta \cap \gamma \mid \beta \in \Gamma\}$ formam uma base para a topologia relativa de γ em $\cup \Gamma$. Temos, portanto que $\beta \cap \gamma$ é homeomorfismo local e então $(\pi_1^{-1})^{-1}(\beta \cap \gamma) = \pi_1(\beta \cap \gamma)$ é subconjunto aberto de $\pi_1(\gamma)$. Concluimos que $\pi_{1_\gamma}^{-1}$ é contínua. A demonstração de que π_2 é um homeomorfismo parcial é análoga e por isso será omitida. ■

Corolário 8.1.6. *Sejam X espaço métrico compacto e totalmente desconexo, Γ uma ação local em X e R_Γ a relação de equivalência étale associada a Γ . Se γ é aberto em R_Γ e um homeomorfismo parcial, então γ é compacto em R_Γ . Em particular, cada elemento de Γ é compacto e aberto.*

Prova. Como X é totalmente desconexo temos que $\pi_1(\gamma)$ e $\pi_2(\gamma)$ são conjuntos clopen, em particular fechados. Como X é compacto os conjuntos $\pi_1(\gamma)$ e $\pi_2(\gamma)$ são compactos. Mas, pelo Teorema 8.1.5 as funções π_1 e π_2 são homeomorfismo locais então $\gamma = (U, \gamma(U))$ é homeomorfo a $\pi_1(\gamma)$ e $\pi_2(\gamma)$. Portanto γ é compacto. ■

Definição 8.1.7 (Conjunto R -invariante). *Seja R uma relação de equivalência no espaço $\mathcal{X}$. Dizemos que $A \subset X$ é R -invariante se para qualquer x em A temos que $\langle x \rangle_R \subset A$.*

Lembre que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é minimal se e somente se os únicos fechados invariantes são X e o conjunto vazio. Temos um resultado similar para relações de equivalência:

Proposição 8.1.8. *Uma relação de equivalência étale R associada a ação local Γ em um conjunto de Cantor X é minimal se e somente se os únicos fechados R -invariantes são X e o conjunto vazio.*

Prova. Suponha que R é minimal e que existe subconjunto $A \subset X$ tal que A é fechado R -invariante. Dado x em A temos $\langle x \rangle_R \subset A$. Assim $\overline{\langle x \rangle_R} \subset \overline{A}$. Como R é minimal e A é fechado temos que $X = A$. Provamos, assim, a ida.

Agora, suponha que os únicos fechados R -invariantes são X e o vazio. Dado x em X mostraremos que $\langle x \rangle_R$ é densa.

Lema 8.1.9. *Seja y em $\overline{\langle x \rangle_R}$ e (y, z) em R então z está em $\overline{\langle x \rangle_R}$.*

Seja y em $\overline{\langle x \rangle_R}$ e (y, z) em R . Provaremos que z está em $\overline{\langle x \rangle_R}$. Como R é relação de equivalência Étale, temos que existe homeomorfismo parcial γ em R , tal que (y, z) está em γ . Seja $(y_k)_{k \geq 1}$ sequência em $\overline{\langle x \rangle_R}$, tal que $y_k \rightarrow y$. Assim, existe k_0 , tal que para todo $k > k_0$, y_k está em $\pi_1(\gamma)$. Assim, podemos encontrar sequência (y_k, z_k) , tal que para todo $k > k_0$, (y_k, z_k) está em γ . Como $y_k \rightarrow y$ e γ é contínua, temos que $z_k \rightarrow z$. Além disso, temos que y_k está em $\langle x \rangle_R$ e (y_k, z_k) está em R para todo k , então z_k está em $\langle x \rangle_R$ para todo k . Concluimos que z está em $\overline{\langle x \rangle_R}$. ■

Pelo Lema 8.1.9, temos que $\overline{\langle x \rangle_R}$ é um conjunto invariante. Mas, $\overline{\langle x \rangle_R}$ é um conjunto fechado, como os únicos conjuntos fechados R -invariantes são X e $\emptyset$ e como $\overline{\langle x \rangle_R} \neq \emptyset$, temos que $\overline{\langle x \rangle_R} = X$. Portanto a relação de equivalência R é minimal. ■

Definição 8.1.10. *Sejam $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ e $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e Γ e Υ ações locais em $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente. Dadas R_Γ a relação de equivalência em $\mathcal{X}$ com topologia étale induzida por Γ e Q_Υ a relação de equivalência em $\mathcal{Y}$ com topologia étale induzida por Υ . Um isomorfismo entre $(\mathcal{X}, R_\Gamma, \Gamma)$ e $(\mathcal{Y}, Q_\Upsilon, \Upsilon)$ é um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que*

$$h \times h : R_\Gamma \rightarrow Q_\Upsilon$$

é um homeomorfismo entre (R, Γ) e (Q, Υ) .

8.2

$R_{\mathfrak{B}}$ como uma relação de equivalência étale

Neste capítulo, mostraremos que dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ é uma relação de equivalência étale. Para isto, lembre a Definição 5.1.4.

Definição 8.2.1. *Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e p e $q \in E_{0,N}$ com $r(p) = r(q)$, definimos*

$$\gamma(p, q) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_{\mathfrak{B}} \times X_{\mathfrak{B}} \mid \mathbf{x} \in C(p), \mathbf{y} \in C(q), x_n = y_n, \forall n > N\}. \quad (8.2.1)$$

Podemos pensar em $\gamma(p, q)$ como uma função que vai de $C(p)$ em $C(q)$ definida como segue:

$$\gamma_{(p,q)} : C(p) \rightarrow C(q), \quad \gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}) = (q_1, \dots, q_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots).$$

Proposição 8.2.2. *Sejam um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, $n \geq 1$ e p e q em $E_{0,N}$ com $r(p) = r(q)$. Então se verifica*

1. $\gamma(p, q)^{-1} = \gamma(q, p)$.
2. $\gamma(p, q)$ é um homeomorfismo parcial entre $C(p)$ e $C(q)$.
3. $\gamma(p, p) = id_{C(p)}$.
4. Seja b tal que $r(b) = r(q)$, então $\gamma(q, b) \circ \gamma(p, q) = \gamma(p, b)$, caso contrário é vazio.
5. Sejam a e b tais que $r(a) = r(b)$ então $\gamma(p, q) \cap \gamma(a, b) = \gamma(p, q)$ se $p = a$ e $q = b$, caso contrário é vazio.
6. $\gamma(p, q) = \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \gamma(pe, qe)$.

Prova.

1. Seja $\mathbf{x}$ em $C(p)$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{(q,p)} \circ \gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}) &= \gamma_{(q,p)}((q_1, \dots, q_N, x_{N+1}, \dots)) \\ &= (p_1, \dots, p_N, x_{N+1}, \dots) = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que dado $\mathbf{y}$ em $C(q)$ temos que

$$\gamma_{(p,q)} \circ \gamma_{(q,p)}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Portanto, $\gamma(p, q)^{-1} = \gamma(q, p)$.

2. Pelo item anterior temos que $\gamma(p, q)$ é bijeção. Falta mostrar que $\gamma(p, q)^{-1}$ e $\gamma(q, p)$ são contínuas. Seja $\mathbf{x} \in C(p)$, $\epsilon > 0$ e $r > N$. Definimos $\delta = 2^{-r}$ e consideremos $\mathbf{y}$ em $C(p)$ tal que $\mathbf{y}$ está em $B(\mathbf{x}, \delta)$, assim $x_i = y_i$ para todo $i \leq r$. Temos que

$$\gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}) = (p_1, \dots, p_N, x_{N+1}, \dots) \quad e$$

$$\gamma_{(p,q)}(\mathbf{y}) = (p_1, \dots, p_N, y_{N+1}, \dots).$$

Mas, $x_i = y_i$ para todo $i \leq r$, então

$$\gamma_{(p,q)}(\mathbf{y}) \in B(\gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}), 2^{-r}) \subset B(\gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}), \epsilon).$$

A demonstração de que $\gamma(p, q)^{-1}$ é contínua é análoga. Concluimos que $\gamma(p, q)$ é um homeomorfismo.

3. Segue direto da definição.
4. Reescrevendo de acordo com a notação de funções, mostraremos que

$$\gamma_{(q,b)} \circ \gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}) = \gamma_{(p,b)}(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$ em $C(p)$. Dado $\mathbf{x}$ em $C(p)$, temos que

$$\gamma_{(q,b)} \circ \gamma_{(p,q)}(\mathbf{x}) = \gamma_{(q,b)}\left((q_1, \dots, q_N, x_{N+1}, \dots)\right) = (b_1, \dots, b_N, x_{N+1}, \dots).$$

Por outro lado,

$$\gamma_{(p,b)}(\mathbf{x}) = (b_1, \dots, b_N, x_{N+1}, \dots).$$

Se $a \neq q$, temos que existe N tal que $C(a) \neq C(q)$, mas já mostramos que quando dois cilindros são diferentes eles são disjuntos. Assim não podemos tomar a composição das funções.

5. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \gamma(p, q) \cap \gamma(a, b) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in C(p) \cap C(a), \\ &\quad \mathbf{y} \in C(q) \cap C(b), x_n = y_n, n > N\}. \end{aligned}$$

Se $p = a$ e $q = b$, temos que

$$C(p) \cap C(a) = C(p) \quad \text{e} \quad C(q) \cap C(b) = C(q),$$

portanto $\gamma(p, q) \cap \gamma(a, b) = \gamma(p, q)$. Agora se $p \neq a$ ou $q \neq b$, temos que

$$C(p) \cap C(a) = \emptyset \quad \text{ou} \quad C(q) \cap C(b) = \emptyset,$$

então $\gamma(p, q) \cap \gamma(a, b) = \emptyset$.

6. Provaremos, primeiro, que

$$\gamma(p, q) \subset \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \gamma(pe, qe).$$

Dado $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \gamma(p, q)$, temos que $x \in C(px_{n+1})$, $y \in C(qy_{n+1})$ e que $x_n = y_n$ para todo $n > N + 1$. Mas $x_{N+1} = y_{N+1}$, então $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ está em $\gamma(px_{N+1}, qx_{N+1})$, note que $r(px_{N+1}) = r(qx_{N+1})$. Assim

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \gamma(pe, qe),$$

Portanto

$$\gamma(p, q) \subset \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \gamma(pe, qe).$$

Agora mostraremos a inclusão contrária. Seja

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \gamma(pe, qe).$$

Temos que existe e em E_{N+1} tal que $\mathbf{x}$ está em $C(pe)$, $\mathbf{y}$ está em $C(qe)$ e $x_n = y_n$ para todo $n > N + 1$. Então $x_{N+1} = y_{N+1} = e$, portanto $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ está em $\gamma(p, q)$.

Concluimos assim a demonstração da proposição. ■

Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, denotemos por $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ a coleção formada pelo conjunto vazio e por todos os homeomorfismos parciais $\gamma(p, q)$, onde p, q estão em $E_{0,N}$ e $N \geq 1$. Para adequação com a notação do capítulo reescrevemos $R_{\mathfrak{B}}$ da Definição 5.3.1, como:

$$R_{\mathfrak{B}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_{\mathfrak{B}} \times X_{\mathfrak{B}} \mid \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ diferem em um número finito de entradas}\}.$$

Estamos prontos para provar o seguinte teorema:

Teorema 8.2.3. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. A coleção $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ é uma ação local e a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ é gerada por $\Gamma_{\mathfrak{B}}$.*

Prova. Primeiro, veremos que $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ é uma ação local. Para isso, precisamos mostrar que Γ satisfaz as condições da Definição 8.1.2.

1. Os cilindros $C(p)$ são uma base para $X_{\mathfrak{B}}$. Além disso, temos que $id_{C(p)} = \gamma(p, p)$ está em $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ para todo p .
2. Dados $n \geq 1$ e p, q em $E_{0,N}$, seja $\gamma(p, q)$ em $\Gamma_{\mathfrak{B}}$, temos pelos itens (1) e (2) da Proposição 8.2.2 que $\gamma(p, q)^{-1}$ está em $\Gamma_{\mathfrak{B}}$.
3. Seja $n \geq 1$ e p, q, a, b em $E_{0,N}$. Pelo item (4) da Proposição 8.2.2, temos que $\gamma(p, q) \circ \gamma(a, b) = \gamma(p, b)$ ou é igual ao conjunto vazio. Em qualquer um dos casos $\gamma(p, q) \circ \gamma(a, b)$ está em $\Gamma_{\mathfrak{B}}$.

4. Seja $n \geq 1$ e p, q, a, b em $E_{0,N}$. Pelo item (5), temos que $\gamma(p, q) \cap \gamma(a, b) = \gamma(p, q)$ ou é igual ao conjunto vazio. Em qualquer um dos casos $\gamma(p, q) \cap \gamma(a, b)$ está em $\Gamma_{\mathfrak{B}}$.

Portanto, $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ é uma ação local. Podemos, então, usar o Teorema 8.1.5 para afirmar que $R_{\Gamma_{\mathfrak{B}}}$ é uma relação de equivalência étale. Segue direto da definição que $R_{\Gamma_{\mathfrak{B}}} = R_{\mathfrak{B}}$. ■

Podemos concluir que dado diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, $R_{\mathfrak{B}}$ é uma relação de equivalência étale com topologia gerada pela ação local $\Gamma_{\mathfrak{B}}$, que iremos denotar por $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$.

Agora veremos um exemplo onde $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ difere da topologia produto. Considere o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ apresentado na Figura 6.2 e os elementos de $X_{\mathfrak{B}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ \mathbf{z}_k &= (0, \dots, 0, z_k = 1, 0, \dots).\end{aligned}$$

Temos que $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}_k$ estão em $\langle \mathbf{x} \rangle_{R_{\mathfrak{B}}}$ para todo $k \geq 1$. Além disso,

$$d(x, \mathbf{z}_k) = 2^{1-k} \rightarrow 0.$$

Então $\mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{x}$, e portanto

$$(\mathbf{z}_k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

na topologia produto. Veremos que $(\mathbf{z}_k, \mathbf{y})$ não converge para $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na topologia étale.

Sejam $p = (0, 0, 0)$ e $q = (1, 0, 1)$ em $E_{0,3}$, temos que $(\mathbf{z}_k, \mathbf{y}) \in \gamma(p, q)$ para todo $k \leq 3$. Entretanto, se $k \geq 4$, temos que $x_k \neq y_k$, portanto $(\mathbf{z}_k, \mathbf{y})$ não está em $\gamma(p, q)$ para $k \geq 4$. Então $(\mathbf{z}_k, \mathbf{y})$ não converge para $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na topologia étale.

8.2.1

Relação AF em um conjunto de Cantor

Nesta seção definiremos o que é uma relação AF em um conjunto de Cantor.

Teorema 8.2.4. *Considere $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Na topologia étale $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ em $R_{\mathfrak{B}}$ temos que para cada $N \geq 1$, a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B},N}$ é aberta e compacta.*

Prova. Dado $N \geq 1$, temos que $R_{\mathfrak{B},N}$ é a união finita de elementos de $R_{\mathfrak{B}}$. Mas cada elemento de $R_{\mathfrak{B}}$ é aberto e compacto, portanto $R_{\mathfrak{B},N}$ também é aberto e compacto. ■

Definição 8.2.5 (Relação de equivalência AF). *Sejam X espaço topológico e R uma relação de equivalência em X . Dizemos que R é relação de equivalência AF se existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ tal que (X, R) é isomorfo a $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$.*

Teorema 8.2.6. *Sejam X um conjunto de Cantor e R uma relação de equivalência étale em X . Se existe uma sequência de relações de equivalência*

$$R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R,$$

tal que

1. R_N é aberto e compacto em R para cada $N \geq 0$,
2. $\bigcup_{N=1}^{\infty} R_N = R$,

então R é relação de equivalência AF.

Prova. Construiremos o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, tal que $X_{\mathfrak{B}}$ será homeomorfo a X . Como X é um conjunto de Cantor, existe uma sequência de partições refinadoras $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ de X , onde para cada $n \geq 0$, $\mathcal{P}_n = \{U_{n,i}\}_{i=1}^{k(n)}$. Veja o Teorema 3.1.13.

Por hipótese, para cada $n \geq 0$, R_n é compacta, então cada R_n possui um número finito de classes de equivalência. Assim,

$$X = \bigcup_{j=1}^{l(n)} \langle x_{n,j} \rangle_{R_n}.$$

Definimos a família de conjuntos clopen $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 0}$, tal que para cada $n \geq 0$

$$\mathcal{Q}_n = \{A_{n,i,j} \mid 1 \leq i \leq k(n), 1 \leq j \leq l(n)\},$$

onde $A_{n,i,j} = U_{n,i} \cap \langle x_{n,j} \rangle_{R_n}$. Repare que algumas dessas interseções podem ser vazias, consideraremos somente as não vazias. Assim, para cada $n \geq 0$, $\mathcal{Q}_n$ possui um número finito de elementos.

Como $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ é sequência de partições refinadoras de X , $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \geq 0}$ também é. Então dado x em X , para cada $n > 0$ existem únicos $i(x)_n$ e $j(x)_n$, tais que $x \in A_{n,i(x)_n,j(x)_n}$. Além disso a sequência $\{A_{n,i(x)_n,j(x)_n}\}_{n \geq 0}$ é

uma sequência de compactos encaixados. Portanto

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,i(x)_n,j(x)_n}.$$

Agora estamos aptos a definir os vértices e as arestas. Para cada $n \geq 0$, definimos:

$$\begin{aligned} V_n &= \{v = (n, i, j) \mid 1 \leq i \leq k(n), 1 \leq j \leq l(n) \text{ e } A_v = A_{n,i,j} \neq \emptyset\}, \\ E_n &= \{(v, w) \mid v \in V_n, w \in V_{n+1} \text{ tais que } A_{v,n} \cap A_{w,n+1} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Repare que $\#(V_n) = \#(\mathcal{Q}_n)$ e se $A_{v,n} \cap A_{w,n+1} \neq \emptyset$ então $A_{w,n+1} \subset A_{v,n}$.

Por último, definimos as funções $s : E_n \rightarrow V_{n-1}$ e $r : E_n \rightarrow V_n$:

$$s(v, w) = v \quad \text{e} \quad r(v, w) = w.$$

Considere $v = (n, i, j) \in V_n$, temos que existem $i(v)_{n-1}$ e $j(v)_{n-1}$ tal que

$$A_{n,i,j} \subset A_{n-1,i(v)_{n-1},j(v)_{n-1}}.$$

Portanto $r^{-1}(v) \neq \emptyset$. Analogamente, conclui-se que $s^{-1}(v) \neq \emptyset$. Portanto $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ é um diagrama de Bratteli.

Temos que $\mathbf{x} = (v_n, w_n)_{n \geq 0}$ está em $X_{\mathfrak{B}}$ se e somente se para todo $n \geq 0$, $s(v_{n+1}, w_{n+1}) = r(v_n, w_n)$, então $v_{n+1} = w_n$. Portanto, podemos escrever $\mathbf{x} = (v_n, v_{n+1})_{n \geq 0}$, onde cada $v_n \in V_n$.

Agora definimos a função $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X$ tal que

$$h(\mathbf{x}) = h((v_n, v_{n+1})_{n \geq 0}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{v_n} = \{x\}.$$

Observação 8.2.7. A função h está bem definida já que $\{A_{v_n}\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de compactos encaixados.

Proposição 8.2.8. A função $h \times h$ é um homeomorfismo entre $(R_{\mathfrak{B}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{B}})$ e $(R, \mathcal{E})$.

Lema 8.2.9. A função h é um homeomorfismo.

Prova. Pela discussão feita acima temos que h é uma bijeção. Como $X_{\mathfrak{B}}$ e X são compactos, veja o Teorema 5.1.6, basta mostrar que h é contínua.

Sejam $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1} = (v_n, v_{n+1})_{n \geq 0}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ e $\epsilon > 0$. Existe r tal que $2^{-r} < \epsilon$. Como $\{\mathcal{Q}_n\}$ é sequência de partições refinadoras, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $\text{diam}(\mathcal{Q}_n) < \epsilon$. Definimos $\delta = \min\{2^{-r}, 2^{-n_0}\}$. Dado $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1} = (w_n, w_{n+1})_{n \geq 0}$ tal que $d_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, temos que $x_i = y_i$ para todo

$i \leq \max\{r, n_0\}$, assim $h(\mathbf{x})$ e $h(\mathbf{y})$ estão no mesmo elemento de $\mathcal{Q}_n$ para todo $n < \max\{r, n_0\}$, logo $d_X(h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) < \epsilon$. ■

Lema 8.2.10. *Para cada $N > 0$, $h \times h(R_{\mathfrak{B}, N}) = R_N$.*

Prova. Fixemos $N \geq 0$.

Mostraremos, primeiro, que $h \times h(R_{\mathfrak{B}, N}) \subset R_N$. Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}, N}$, temos, por definição, que $x_i = y_i$ para todo $i \geq N$. Assim, $h(\mathbf{x})$ e $h(\mathbf{y})$ estão no mesmo elemento de $\mathcal{Q}_i$ para todo $i \geq N$, em particular estão no mesmo elemento de $\mathcal{Q}_N$ e como os elementos de $\mathcal{Q}_N$ estão contidos em classes de equivalência, concluímos que $(h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) \in R_N$.

Agora, provaremos que $R_N \subset h \times h(R_{\mathfrak{B}, N})$. Seja $(x, y) \in R_N$. Existem $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tais que $h(\mathbf{x}) = x$ e $h(\mathbf{y}) = y$. Existe q tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}, q}$. Veremos que $q \leq N$. Suponha que $q > n$. Temos que $x_i = y_i$ para todo $i \geq q$. Assim x, y estão em $A_{q, i(x)_q, j(y)_q}$, como $\mathcal{Q}_n$ é sequência de partições refinadoras, temos que existem i_n e j_n tais que

$$A_{q, i(x)_q, j(y)_q} \subset A_{N, i_N, j_N} = U_{N, i} \bigcap \langle x_{N, j} \rangle_{R_N}.$$

Então $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A_{n, i_n, j_n}$ para todo $n \geq N$. Portanto, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}, N}$.

Concluimos assim a demonstração do lema. ■

Usando o lema acima temos

$$h \times h(R_{\mathfrak{B}}) = h \times h\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_{\mathfrak{B}, n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (h \times h(R_{\mathfrak{B}, n})) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Portanto $h \times h$ é uma bijeção entre $R_{\mathfrak{B}}$ e R .

Para finalizar a demonstração do teorema falta mostrar que $h \times h(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}) = \mathcal{E}$.

Seja U um aberto de R , temos que para cada $N \geq 0$, $U \cap R_N$ é um aberto em R_N . Pelo Lema 8.2.10

$$(h \times h)^{-1}(U \cap R_N) \subset R_{\mathfrak{B}, N}.$$

Como $R_{\mathfrak{B}, N}$ é aberto em $R_{\mathfrak{B}}$, temos que $(h \times h)^{-1}(U \cap R_N)$ também é. Assim $\mathcal{E} \subset h \times h(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}})$.

Agora, dados $n \geq 0$ e p, q em $E_{0, n}$, considere $\gamma(p, q)$ um aberto de $R_{\mathfrak{B}}$. ■

Lembre que dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e uma sequência de inteiros $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, podemos obter um novo diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}_{m_k} = \mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$. Veja Definição 5.2.1. Lembre também da função de

blocos $f_{m_k} = f : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$, associada à sequência $\{m_k\}$, definida por

$$f(x_1, x_2, \dots) = ((x_1, \dots, x_{m_1}), (x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}), \dots).$$

Lembre que denotamos $f(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Pela Proposição 5.2.2, a função f é um homeomorfismo.

Teorema 8.2.11. *Sejam um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ o diagrama obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. A função de blocos é um isomorfismo entre $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$.*

Prova. Como f é um homeomorfismo só falta mostrar que $f \times f(R_{\mathfrak{B}}) = R_{\mathfrak{T}}$ e que, $f \times f(\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}) = \mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$.

Para a primeira igualdade precisamos mostrar que dado $k \geq 0$,

$$R_{\mathfrak{T},k} \subset f \times f(R_{\mathfrak{B},m}) \subset R_{\mathfrak{T},k+1}, \quad \text{para todo } m_k \leq m \leq m_{k+1}. \quad (8.2.2)$$

Assim,

$$\bigcup_k R_{\mathfrak{T},k} \subset \bigcup_m f \times f(R_{\mathfrak{B},m}) \subset \bigcup_k R_{\mathfrak{T},k}.$$

Então $f \times f(R_{\mathfrak{B}}) = R_{\mathfrak{T}}$.

Agora provaremos a equação 8.2.2.

Seja $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in R_{\mathfrak{T},k}$. Como f é homeomorfismo existem $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$ tais que $f \times f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$. Como $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ está em $R_{\mathfrak{T},k}$ temos que $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ para todo $i > k$, mas $\bar{x}_i = (x_{m_{i-1}}, \dots, x_{m_i})$ e $\bar{y}_i = (y_{m_{i-1}}, \dots, y_{m_i})$. Então $x_\ell = y_\ell$ para todo $\ell > m_k$ e portanto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B},m}$ para $m_k \leq m \leq m_{k+1}$.

Agora, seja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B},m}$, onde m é tal que $m_k \leq m \leq m_{k+1}$. Temos que $x_i = y_i$ para todo $i > m$, em particular para todo $i > m_{k+1}$. Então $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ para todo $i > k + 1$ então $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in R_{\mathfrak{T},k+1}$.

Provaremos que $f \times f(\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}) = \mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$. Observe que os conjuntos

$$\{\gamma(\bar{p}, \bar{q}) \mid \bar{p}, \bar{q} \in F_{0,m} \text{ e } r(\bar{p}) = r(\bar{q})\}$$

formam uma base para $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$, mas se $\bar{p}, \bar{q}$ estão em $F_{0,m}$, podemos escrever

$$\bar{p} = (\bar{p}_i)_{i=1}^m \quad \text{e} \quad \bar{q} = (\bar{q}_i)_{i=1}^m,$$

onde para cada $i \geq 1$,

$$\bar{p}_i = (p_j)_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \quad \text{e} \quad \bar{q}_i = (q_j)_{j=n_{i-1}+1}^{n_i}.$$

Definimos os elementos

$$p = (p_i)_{i=1}^{n_m} \quad \text{e} \quad q = (q_i)_{i=1}^{n_m}.$$

Então p e q estão em E_{0,n_m} , assim $\gamma(\bar{p}, \bar{q}) \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ é a imagem de $\gamma(p, q) \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ por $f \times f$. Portanto $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \subset f \times f(\mathcal{T}_{\mathfrak{B}})$.

Por fim, considere $f \times f(\gamma(p, q))$ em $f \times f(\mathcal{T}_{\mathfrak{B}})$, pela condição 6 da Proposição 8.2.2, podemos escrever

$$\gamma(p, q) = \bigcup_{\bar{p}, \bar{q} \in E_{m_k}} \gamma(\bar{p}, \bar{q}).$$

Assim, $f \times f(\gamma(p, q))$ pode ser escrito como a união de elementos que estão em $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$. ■

8.3

R_φ como uma relação de equivalência étale

Nesta seção consideraremos um espaço métrico, compacto e totalmente desconexo X e um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$ sem pontos fixos. Iremos estudar a relação de equivalência R_φ sob o ponto de vista topológico. Para o caso particular em que X é um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ veremos a relação entre R_φ e $R_{\mathfrak{B}}$.

Definimos o conjunto

$$\Gamma_\varphi := \{\varphi|_U^n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } U \subset X \text{ é clopen}\}.$$

Lembre que dados $x, y \in X$, $(x, y) \in R_\varphi$ se e só se existe n em $\mathbb{Z}$, tal que $y = \varphi^n(x)$.

Teorema 8.3.1. *A relação de equivalência R_φ é uma relação de equivalência étale associada a ação local Γ_φ .*

Lema 8.3.2. *A coleção Γ_φ é uma ação local em X .*

Prova. Veremos primeiro que Γ_φ satisfaz as condições da Definição 8.1.2.

1. Para todo aberto U em X , temos que $id_U \in \Gamma_\varphi$. Basta tomar $n = 0$.
2. Dados $n \in \mathbb{Z}$, seja $\varphi|_U^n$ em Γ_φ , temos que $(\varphi|_U^n)^{-1} = \varphi|_{\varphi^n(U)}^{-n}$, que por sua vez está em Γ_φ .
3. Sejam n_1, n_2 em $\mathbb{Z}$ e U_1, U_2 subconjuntos clopen de X , tais que $\varphi^{n_1}(U_1) \subset U_2$, temos que

$$\varphi|_{U_1}^{n_1} \circ \varphi|_{U_2}^{n_2} = \varphi|_{U_1}^{n_1+n_2} \in \Gamma_\varphi.$$

4. Sejam n_1, n_2 em $\mathbb{Z}$ e U_1, U_2 subconjuntos clopen de X , temos

$$\varphi_{|U_1}^{n_1} \cap \varphi_{|U_2}^{n_2} = \varphi_{|U_1 \cap U_2}^{n_1} \mid \varphi^{n_1}(x) = \varphi^{n_2}(x) \}.$$

O conjunto $\{U_1 \cap U_2 \mid \varphi^{n_1}(x) = \varphi^{n_2}(x)\} \subset U_1$ é clopen e como $\varphi_{|U_1}^{n_1}$ é homeomorfismo parcial, temos que $\varphi_{|U_1}^{n_1} \cap \varphi_{|U_2}^{n_2}$ está em Γ_φ .

Falta ver que Γ_φ é uma base para alguma topologia de R_φ . Por definição, temos que os elementos de Γ_φ cobrem R_φ e pelo item 4 concluímos que Γ_φ é base para alguma topologia de R_φ . Então a relação de equivalência R_φ é étale com topologia étale associada a Γ_φ . ■

Teorema 8.3.3. *Seja φ um homeomorfismo sem pontos fixos no espaço métrico X . Considere $X \times \mathbb{Z}$ com a topologia produto e R_φ com topologia étale associada a ação local Γ_φ . A função*

$$h : X \times \mathbb{Z} \rightarrow R_\varphi, \quad h((x, n)) = (x, \varphi^n(x))$$

é um homeomorfismo.

Prova. Seja (x, y) em R_φ , existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = \varphi^n(x)$, então $h(x, n) = (x, y)$ e portanto h é sobrejetora. Como φ é injetora, temos que h também é. Definimos, então $h^{-1}((x, \varphi^n(x))) = (x, n)$. Precisamos mostrar que h e h^{-1} são contínuas.

Seja $(x, n) \in X \times \mathbb{Z}$. Considere $\epsilon > 0$, como φ^n é contínua existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $\varphi^n(B(x, \delta)) \subset B(\varphi^n(x), \epsilon)$. Então $h(B((x, n), \delta)) \subset B(h((x, n)), \epsilon)$. Portanto h é contínua.

A demonstração de que h^{-1} é contínua é análoga e por isso será omitida.

Concluímos que h é um homeomorfismo. ■

Definição 8.3.4. *Uma relação de equivalência étale R é compactamente gerada se existe um conjunto compacto $K \subset R$ tal que se Q é uma relação de equivalência e $K \subset Q \subset R$ então $Q = R$.*

Proposição 8.3.5. *Sejam duas relações de equivalência (X, R) e (Y, Q) isomorfas. Se R é compactamente gerada então Q também é compactamente gerada.*

Prova. Como (X, R) e (Y, Q) são isomorfas existe homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \times h : R \rightarrow Q$ é homeomorfismo.

Seja $K \subset Q$ compacto e Q_1 outra relação de equivalência tal que $K \subset Q_1 \subset Q$. Definimos $M \subset R_1 \subset R$ tais que

$$(h \times h)^{-1}(K) = M \quad \text{e} \quad (h \times h)^{-1}(Q_1) = R_1,$$

onde M é compacto e R_1 é relação de equivalência. Mas, R é compactamente gerada, então $R_1 = R$, assim $Q_1 = h \times h(R_1) = h \times h(R) = Q$ e portanto Q é compactamente gerada. ■

Teorema 8.3.6. *Sejam X um conjunto de Cantor e $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo minimal. Não existe nenhum diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ tal que $(X, R_\varphi, \mathcal{E}_\varphi)$ e $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{B}})$ são isomorfos.*

Prova. Precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 8.3.7. *A relação de equivalência R_φ é compactamente gerada.*

Prova. Considere a função $h(x, n) = (x, \varphi^{-n}(x))$ do Teorema 8.3.3. Como h é um homeomorfismo e X é compacto, temos que $\varphi = h(X \times n)$ é compacto em R_φ , onde interpretamos φ como um conjunto.

Suponha que existe relação de equivalência Q tal que $\varphi \subset Q \subset R_\varphi$. Dado $(x, y) \in R_\varphi$, temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = \varphi^k(x)$. Temos que $(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) \in \varphi$ para todo $n \geq 0$, portanto $(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) \in Q$ para todo $n \geq 0$. Como Q é relação de equivalência temos que $(x, y) \in Q$. Então $Q = R_\varphi$ e R_φ é compactamente gerada. ■

Lema 8.3.8. *A relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ não é compactamente gerada.*

Prova. Suponha por absurdo, que $R_{\mathfrak{B}}$ é compactamente gerada. Então existe um compacto K tal que se Q é relação de equivalência e $K \subset Q \subset R_{\mathfrak{B}}$ então $Q = R_{\mathfrak{B}}$. Temos que a sequência

$$R_{\mathfrak{B},0} \subset R_{\mathfrak{B},1} \subset \dots$$

é uma cobertura aberta de $R_{\mathfrak{B}}$. Como $K \subset R_{\mathfrak{B}}$ também é de K . Assim, existe N tal que $K \subset R_{\mathfrak{B},N} \subset R_{\mathfrak{B}}$. Como, por hipótese $R_{\mathfrak{B}}$ é compactamente gerada, temos que $R_{\mathfrak{B},N} = R_{\mathfrak{B}}$, o que é uma contradição. Concluimos que $R_{\mathfrak{B}}$ não é compactamente gerada. ■

Pela Proposição 8.3.5 e pelos Lemas 8.3.7 e 8.3.8 não existe isomorfismo entre (X, R_φ) e $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$. ■

Repare que pelo Teorema 7.1.13, dado um conjunto de Cantor X e um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$, sempre existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ tal que X é homeomorfo a $X_{\mathfrak{B}}$. Então existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$. Pelo Teorema 8.3.6, a função $h \times h$ não é um homeomorfismo entre $(R_\varphi, \mathcal{E}_\varphi)$ e $(R_{\mathfrak{B}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{B}})$, ao contrário do que ocorreria se considerássemos a topologia produto.

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados de álgebra que serão importantes para os próximos capítulos.

9.1

Grupos

Definição 9.1.1 (Grupo, subgrupo, grupo abeliano). *Um grupo é um par $(G, +)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação binária em G que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Associativa: Dados $a, b, c \in G$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
2. *Elemento neutro: existe um elemento e em G tal que $a + e = e + a = a$ para todo a em G .*
3. *Inverso: para cada elemento a em G existe um elemento b , que chamamos de elemento inverso, tal que $a + b = b + a = e$.*

Um subconjunto H de G é um subgrupo se é um grupo com a operação de G .

Um grupo é dito abeliano quando sua operação é comutativa

Quando não houver confusão denotaremos o grupo $(G, +)$ por G .

Em um grupo seu elemento neutro e seu elemento inverso são únicos.

Denotamos o elemento inverso de a em G por a^{-1} .

Os grupos que iremos trabalhar são abelianos.

Definição 9.1.2 (Semigrupo, subsemigrupo). *Um conjunto G é um semigrupo se é dotado de uma operação binária associativa e possui um elemento neutro.*

Um subconjunto H de G é dito um subsemigrupo do semigrupo G se é fechado para a operação de G .

Observação 9.1.3. *Todo grupo é um semigrupo.*

Teorema 9.1.4. *Sejam G e H grupos. Se $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo. Então $\text{Im}(f) \cong G/\text{Ker}(f)$.*

9.2

Grupos abelianos ordenados

Definição 9.2.1 (Cone positivo). *Seja $(G, +)$ um grupo abeliano e H um subconjunto de G . Dizemos que H é o cone positivo de G se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. H é um subsemigrupo de G .
2. $H - H = \{g = a - b \mid a, b \in H\} = G$,
3. $H \cap (-H) = \{g \in G \mid g \in H \text{ e } -g \in H\} = \{0\}$.

Um elemento u de H é chamado de uma ordem unitária se para todo a em G existe um inteiro n positivo tal que $nu - a \in H$.

Definição 9.2.2 (Grupo abeliano ordenado). *Seja $(G, +)$ um grupo abeliano. Se existe cone positivo H de G , dizemos que $(G, H, +)$ é um grupo abeliano ordenado.*

Se $(G, H, +)$ é um grupo abeliano ordenado, definimos

$$a \leq b \text{ se e somente se } b - a \in H. \quad (9.2.1)$$

Proposição 9.2.3. *Seja $(G, H, +)$ um grupo abeliano ordenado. A relação $\leq$ em (9.2.1) é uma ordem parcial em G .*

Prova. Vamos mostrar que $\leq$ satisfaz as propriedades:

- Reflexiva: Seja $g \in G$, temos que $g - g = 0 \in H$ então $g \leq g$.
- Antissimétrica: Sejam a e b em G tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $b - a \in H$ e $a - b \in H$, em particular $b - a$ e $a - b \in H \cap (-H)$. Pela condição (1) da Definição 9.2.1, temos que $a - b = 0$ e portanto $a = b$.
- Transitividade: Sejam a, b, c em G tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então $b - a \in H$ e $c - b \in H$. Como H é semigrupo, temos que

$$(b - a) + (c - b) \in H.$$

Como G é grupo abeliano,

$$(b - a) + (c - b) = (b - b) + (c - a) = 0 + (c - a) = c - a.$$

Então $c - a \in H$ e portanto $a \leq c$.

Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Corolário 9.2.4. *Sejam a, b, c em G , $a \leq b$ se e somente se $a + c \leq b + c$.*

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow b - a \in H \Leftrightarrow (b - a) + (c - c) \in H \Leftrightarrow \\ &(b + c) - (a + c) \in H \Leftrightarrow a + c \leq b + c \end{aligned}$$

Concluimos, assim a demonstração do corolário. ■

A partir de agora, iremos denotar o cone positivo de um grupo G por G^+ .

Um exemplo de grupo abeliano parcialmente ordenado é o grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ com cone positivo $\mathbb{Z}^+$

Seja $(G, +)$ um grupo e considere que A é um subconjunto finito de G . Dado $a \in A$, definimos

$$na = a + a + \cdots + a, \text{ onde } a \text{ aparece } n \text{ vezes.}$$

Definição 9.2.5 (Grupo abeliano livre). *Sejam $(G, +)$ um grupo e A qualquer subconjunto finito de G . Definimos*

$$\mathbb{Z}A := \left\{ \sum_{a \in A} n_a a \mid n_a \in \mathbb{Z}, a \in A \right\}.$$

O conjunto $\mathbb{Z}A$ é chamado de grupo abeliano livre gerado por A . Para $\mathbb{Z}A$ consideramos a operação:

$$\sum_{a \in A} m_a a + \sum_{a \in A} n_a a = \sum_{a \in A} (m_a + n_a) a. \quad (9.2.2)$$

Observamos que $(\mathbb{Z}A, +)$ é um grupo abeliano.

Proposição 9.2.6. *O conjunto*

$$\mathbb{Z}A^+ = \left\{ \sum_{a \in A} n_a a \mid n_a \in \mathbb{Z}^+ \text{ para todo } a \in A \right\}.$$

é um cone positivo de $\mathbb{Z}A$.

Prova. Mostraremos que $\mathbb{Z}A^+$ satisfaz as condições da Definição 9.2.1.

1. Segue direto da equação 9.2.2 que $\mathbb{Z}A^+$ é subsemigrupo de $\mathbb{Z}A$.
2. Seja $g \in \mathbb{Z}A^+ - \mathbb{Z}A^+$, então $g = h_1 - h_2$, onde h_1 e h_2 estão em $\mathbb{Z}A^+$.
Então

$$h_1 - h_2 = \sum_{a \in A} n_a a - \sum_{a \in A} m_a a = \sum_{a \in A} (n_a - m_a) a.$$

Temos que $n_a - m_a$ está em $\mathbb{Z}$, portanto $h_1 - h_2 \in G$.

Agora, considere $g \in \mathbb{Z}A$, então $g = \sum_{a \in A} n_a a$, onde $n_a \in \mathbb{Z}$. Temos que para cada $a \in A$, podemos escrever $n_a = m_a - p_a$, onde m_a e p_a estão em $\mathbb{Z}^+$. Assim,

$$g = \sum_{a \in A} m_a a - \sum_{a \in A} p_a a \in \mathbb{Z}A^+ - \mathbb{Z}A^+.$$

3. Seja $g \in \mathbb{Z}A \cap (-\mathbb{Z}A)$, então $g = \sum_{a \in A} n_a a$, onde $n_a \in \mathbb{Z}^+$ e $n_a \in -\mathbb{Z}^+$, então $n_a = 0$ e portanto $g = 0$.

Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Definição 9.2.7 (Isomorfismo ordenado). *Sejam (G, G^+) e (H, H^+) grupos abelianos ordenados. Um isomorfismo ordenado entre (G, G^+) e (H, H^+) é um isomorfismo $\alpha : G \rightarrow H$, tal que $\alpha(G^+) = H^+$.*

Se u é uma ordem unitária de (G, G^+) , v é uma ordem unitária de (H, H^+) , o isomorfismo α é dito ordenado que preserva ordem unitária se $\alpha(u) = v$.

10

O invariante D

Neste capítulo, associada a uma relação de equivalência étale (X, R) definiremos um grupo denotado por $D(X, R)$ e mostraremos que $D(X, R)$ é um invariante algébrico. Isto é, se (X, R) e (Y, Q) são relações de equivalência étale isomorfas, então $D(X, R)$ e $D(Y, Q)$ também são.

10.1

O grupo $C(X, \mathbb{Z})$

Seja X um espaço topológico compacto. Definimos o conjunto

$$C(X, \mathbb{Z}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ é contínua}\}.$$

Dadas f e g em $C(X, \mathbb{Z})$, definimos:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X.$$

Proposição 10.1.1. *O par $(C(X, \mathbb{Z}), +)$ é um grupo abeliano.*

Prova. Como $f(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in X$, a operação $+$ comuta.

Agora, mostraremos que $(C(X, \mathbb{Z}), +)$ satisfaz as propriedades da definição de grupo.

1. Sejam f, g e h em $C(X, \mathbb{Z})$, temos que

$$[(f + g) + h](x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x).$$

Como $f(x), g(x)$ e $h(x)$ estão em $\mathbb{Z}$, temos que

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = [f + (g + h)](x).$$

2. Considere a função $\mathbf{0}(x) = 0$. Mostraremos que $\mathbf{0}$ é o elemento neutro. Seja $f \in C(X, \mathbb{Z})$

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = (f + \mathbf{0})(x).$$

3. Dada $f \in C(X, \mathbb{Z})$ provaremos que o inverso de f é $-f$:

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = 0.$$

Então $C(X, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano. ■

Suponha que X é conexo. Dada f em $C(X, \mathbb{Z})$, como f é contínua, o conjunto $f(X) \subset \mathbb{Z}$ é conexo. Como os únicos conjuntos conexos de $\mathbb{Z}$ são conjuntos unitários a função f é uma função constante, o que não é nosso interesse. De fato, f é constante em cada componente conexa.

A partir de agora consideraremos que X é um espaço topológico compacto e totalmente desconexo.

Dado $E \subset X$ clopen, definimos $\mathcal{X}_E : X \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

Observação 10.1.2. A função $\mathcal{X}_E$ está em $C(X, \mathbb{Z})$ para todo $E \subset X$ clopen.

Seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Ou $x \in E$ ou $x \in X \setminus E$. Como E é clopen e, E e $X \setminus E$ são abertos, portanto existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset E$ ou $B(x, \delta) \subset X \setminus E$. Em qualquer um dos dois casos

$$\mathcal{X}_E(B(x, \delta)) \subset B(x, \epsilon).$$

Portanto, $\mathcal{X}_E$ é contínua.

Observação 10.1.3. Se $f \in C(X, \mathbb{Z})$ então $f(X)$ é um conjunto finito.

Seja $n \in f(X)$, o conjunto $f^{-1}(\{n\})$ é clopen, em particular aberto. Temos que

$$X = \bigcup_{n \in f(X)} f^{-1}(\{n\}).$$

Como X é compacto conjunto $f(X)$ tem que ser finito.

Segue direto da observação anterior que dada $f \in C(X, \mathbb{Z})$, a coleção $\{f^{-1}(\{n\})\}_{n \in f(X)}$ é uma partição de X . Assim, dado $x \in X$

$$f(x) \in f\left(\bigcup_{n \in f(X)} f^{-1}(\{n\})\right) = \bigcup_{n \in f(X)} \{n\}.$$

Como os conjuntos $\{n\}$ são dois a dois disjuntos, existe um único $N(x) = N \in f(X)$ tal que $f(x) = N$. Então, temos que

$$f = \sum_{n \in f(X)} n \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})}.$$

Pelo Teorema 3.1.13, X admite uma sequência de partições refinadoras $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$, onde para cada $n \geq 1$ $\mathcal{P}_n = \{U_j\}_{j=1}^{k_n}$. Definimos, para cada $n \geq 1$, o conjunto

$$C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}) = \{f \in C(X, \mathbb{Z}) \mid f \text{ é constante em cada elemento de } \mathcal{P}_n\}.$$

Temos que $C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$ é um subgrupo de $C(X, \mathbb{Z})$ para todo $n \geq 1$.

Proposição 10.1.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Para todo $n \geq 1$, $C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}) \subset C(\mathcal{P}_{n+1}, \mathbb{Z})$.
2. Para todo $n \geq 1$, $C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$ é isomorfo a $(\mathbb{Z}^{k_n}, +)$.
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}) = C(X, \mathbb{Z})$.

Prova.

1. Como $\mathcal{P}_{n+1}$ refina $\mathcal{P}_n$, temos que cada elemento de $\mathcal{P}_{n+1}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_n$. Assim se f é constante em cada elemento de $\mathcal{P}_n$ também será constante em cada elemento de $\mathcal{P}_{n+1}$.
2. Fixe $n \geq 1$, seja $\mathcal{P}_n = \{U_k\}_{k=1}^{k_n}$. Definimos a função

$$h : \mathbb{Z}^{k_n} \rightarrow C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}), \quad h(i_1, \dots, i_{k_n}) := \sum_{j=1}^{k_n} i_j \mathcal{X}_{U_j}.$$

Claramente h é uma bijeção. Agora, considere $(i_1, \dots, i_{k_n})$ e $(l_1, \dots, l_{k_n}) \in \mathbb{Z}^{k_n}$, temos que

$$\begin{aligned} h((i_1, \dots, i_{k_n}) + (l_1, \dots, l_{k_n})) &= h((i_1 + l_1, \dots, i_{k_n} + l_{k_n})) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} (i_j + l_j) \mathcal{X}_{U_j} \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} [i_j \mathcal{X}_{U_j} + l_j \mathcal{X}_{U_j}] \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} i_j \mathcal{X}_{U_j} + \sum_{j=1}^{k_n} l_j \mathcal{X}_{U_j} \\ &= h((i_1, \dots, i_{k_n})) + h((l_1, \dots, l_{k_n})). \end{aligned}$$

Portanto, h é um isomorfismo entre $C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z}^{k_n}$.

3. Como para cada $n \geq 1$, $C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$ é um subgrupo de $C(X, \mathbb{Z})$, temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}) \subset C(X, \mathbb{Z})$.

Falta provar que $C(X, \mathbb{Z}) \subset \bigcup C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$. Par isso, precisamos mostrar que dada $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ em $C(X, \mathbb{Z})$, existe $n \geq 1$, tal que f é constante em cada elemento de $\mathcal{P}_n$.

Como para cada $n \geq 1$ o conjunto $f^{-1}(\{n\})$ é clopen, podemos usar a Proposição 3.1.8, para afirmar que existe $m(n)$ tal que $f^{-1}(\{n\})$ é a união de elementos de $\mathcal{P}_{m(n)}$. Então $\mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})}$ está em $C(\mathcal{P}_m, \mathbb{Z})$. Mas,

$$f = \sum_{n \in f(X)} n \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})},$$

então $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z})$.

Concluimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C(\mathcal{P}_n, \mathbb{Z}) \subset C(X, \mathbb{Z})$.

Finalizamos, assim, a demonstração do teorema. ■

10.2

O invariante

Nesta seção consideraremos um espaço métrico X compacto e totalmente desconexo. Agora que as ferramentas foram apresentadas, definiremos o invariante para uma relação de equivalência étale de X .

Seja R uma relação de equivalência étale de X . Definimos o subgrupo $B(X, R)$ de $C(X, \mathbb{Z})$ como o subgrupo gerado por todas as funções da forma $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$, onde $\gamma \subset R$ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto. Podemos, então, definir o grupo quociente

$$D(X, R) = C(X, \mathbb{Z}) / B(X, R).$$

Dada $f \in C(X, \mathbb{Z})$, denotamos sua classe em $D(X, R)$ por $\langle f \rangle$. Por último definimos

$$D(X, R)^+ = \{\langle f \rangle \mid f \geq 0\}.$$

Lema 10.2.1. *Seja Γ uma ação local em X e R_Γ a relação de equivalência étale gerada por Γ . Então $B(X, R_\Gamma)$ é um grupo gerado por*

$$\{\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Prova. Precisamos mostrar que dado γ homeomorfismo parcial γ compacto e aberto em R , $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$ está no subgrupo de $B(X, R_\Gamma)$ gerado por $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma$, que denotaremos por H .

Pelo Corolário 8.1.6, γ é compacto em R . Como Γ forma uma base para a topologia étale de R , para cada (x, y) em R existe uma vizinhança $\gamma_{(x,y)}$ tal que $(x, y) \in \gamma_{(x,y)} \subset \gamma$ e $\gamma = \bigcup_{(x,y) \in \gamma} \gamma_{(x,y)}$. Tais vizinhanças são apenas restrições de γ cujos domínios podem ter interseção não vazia.

Como γ é compacto, existe subcobertura finita, digamos $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} &= \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^k \pi_2(\gamma_i)} - \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^k \pi_1(\gamma_i)} = \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^k \pi_2(\gamma_k)} - \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^k \pi_1(\gamma_k)} \\ &= \sum_{1 \leq L \leq k} (-1)^L \sum_{i_1 < \dots < i_L} \mathcal{X}_{\pi_2(\gamma_{i_1} \cap \dots \cap \pi_1(\gamma_{i_L}))} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma_{i_1} \cap \dots \cap \pi_1(\gamma_{i_L}))} \\ &= \sum_{1 \leq L \leq k} (-1)^L \sum_{i_1 < \dots < i_L} \mathcal{X}_{\pi_2(\gamma_{i_1} \cap \dots \cap \gamma_{i_L})} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma_{i_1} \cap \dots \cap \gamma_{i_L})} \in H \end{aligned}$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema. $\blacksquare$

Teorema 10.2.2. *Sejam (X, R) e (Y, Q) relações de equivalência étale em espaços compactos e totalmente desconexos. Se $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo que define um isomorfismo entre R e Q então existe um isomorfismo, $\bar{g}$, entre $D(Y, Q)$ e $D(X, R)$, tal que:*

1. $\bar{g}(D(Y, Q)^+) = D(X, R)^+.$
2. $\bar{g}(\langle \mathbf{1}_Y \rangle) = \langle \mathbf{1}_X \rangle.$

Lema 10.2.3. *Se $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então a função*

$$g : C(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow C(X, \mathbb{Z}), \quad g(f) = f \circ h$$

é um isomorfismo entre os grupos abelianos ordenados que preserva ordem unitária.

Prova. Primeiro mostraremos que g é um isomorfismo. Para isto precisamos mostrar que g é um homomorfismo bijetivo.

Sejam duas funções f_1 e f_2 em $C(Y, \mathbb{Z})$ tais que $f_1 \neq f_2$. Temos que

$$g(f_1) = f_1 \circ h \neq f_2 \circ h = g(f_2).$$

Portanto g é uma função injetora. Agora, seja f em $C(X, \mathbb{Z})$, temos que

$$g(f \circ h^{-1}) = (f \circ h^{-1}) \circ h = f \circ (h^{-1} \circ h) = f. \quad (10.2.1)$$

Concluimos que g também é uma função sobrejetora e portanto é uma bijeção.

Provaremos que g é um homomorfismo, sejam duas funções f_1 e f_2 em $C(Y, \mathbb{Z})$,

$$g(f_1 + f_2) = [f_1 + f_2] \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h = g(f_1) + g(f_2).$$

Então g é um isomorfismo.

Por último, mostraremos que g preserva ordem unitária. Seja ℓ uma ordem unitária em $C(Y, \mathbb{Z})^+$, então para todo $f \in C(Y, \mathbb{Z})$, existe n tal que $n\ell - f \in C(Y, \mathbb{Z})^+$, isto é, $n\ell \leq f$. Como h é homeomorfismo, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Assim

$$n\ell(y) \leq f(y) \Rightarrow n\ell(h(x)) \leq f(h(x)) \Rightarrow n(\ell \circ h)(x) \leq (f \circ h)(x).$$

Como x é arbitrário, temos que $n(\ell \circ h) \leq f \circ h$, portanto $ng(\ell) \leq g(f)$ e $ng(\ell) - f \in C(X, \mathbb{Z})^+$. Concluimos que g preserva ordem unitária. Finalizamos, então, a prova do lema. ■

Lema 10.2.4. *Se h define um isomorfismo entre R e Q , então*

$$g(B(Y, Q)) = B(X, R).$$

Prova. Como R e Q são relações de equivalência étale, existem ações locais Γ e Δ que geram, respectivamente, R e Q .

Provaremos primeiro que $g(B(Y, Q)) \subset B(X, R)$. Seja $f \in B(Y, Q)$, pelo Lema 10.2.1

$$f = \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)(\mathcal{X}_{r(\delta)} - \mathcal{X}_{s(\delta)}).$$

Então,

$$\begin{aligned} g(f) &= \left[\sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)(\mathcal{X}_{r(\delta)} - \mathcal{X}_{s(\delta)}) \right] \circ g \\ &= \left[\sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{r(\delta)} - \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{s(\delta)} \right] \circ g \\ &= \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{r(\delta)} \circ g - \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{s(\delta)} \circ g \\ &= \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{h^{-1}(r(\delta))} - \sum_{\delta \in \Delta} n(\delta)\mathcal{X}_{h^{-1}(s(\delta))} \end{aligned}$$

Definimos $\gamma := (h^{-1}(r(\delta)), h^{-1}(s(\delta)))$, então $\gamma = (h \times h)^{-1}(\delta)$. Como $(h \times h)$ é homeomorfismo e $(h \times h)(R) = Q$, temos que γ é um homeomorfismo parcial de Γ . Usando mais uma vez o Lema 10.2.1, temos que $g(f) \in B(X, R)$.

Agora mostraremos que $B(X, R) \subset g(B(Y, Q))$. Como já vimos em (10.2.1), $g(f \circ h^{-1}) = f$. Demonstramos, analogamente ao que foi feito acima, que $f \circ h^{-1}$ está em $B(Y, Q)$. Portanto $B(X, R) \subset g(B(Y, Q))$.

Concluimos que $g(B(Y, Q)) = B(X, R)$. ■

Agora, podemos terminar a demonstração do Teorema 10.2.2.

Definimos a função $\bar{g} : D(Y, Q) \rightarrow D(X, R)$ tal que

$$\bar{g}(\langle f \rangle) = \langle g(f) \rangle.$$

Sejam $f \in C(Y, \mathbb{Z})$, f_1 e f_2 em $\langle f \rangle$. Temos que

$$\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle \Rightarrow \langle f_1 - f_2 \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle. \quad (10.2.2)$$

Aplicando $\bar{g}$ aos dois lados da equação (10.2.2), temos

$$\langle g(f_1 - f_2) \rangle = \langle g(\mathbf{0}) \rangle. \quad (10.2.3)$$

Como g é isomorfismo,

$$\langle g(f_1) - g(f_2) \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle \Rightarrow \langle g(f_1) \rangle = \langle g(f_2) \rangle. \quad (10.2.4)$$

Portanto, a função $\bar{g}$ está bem definida.

Agora veremos que $\bar{g}$ é um isomorfismo. Sejam f_1 e f_2 em $C(Y, \mathbb{Z})$, segue que

$$\bar{g}(f_1 + f_2) = \langle g(f_1 + f_2) \rangle.$$

Como g é isomorfismo,

$$\langle g(f_1 + f_2) \rangle = \langle g(f_1) + g(f_2) \rangle = \langle g(f_1) \rangle + \langle g(f_2) \rangle = \bar{g}(f_1) + \bar{g}(f_2).$$

Então $\bar{g}$ é um homomorfismo.

Falta mostrar que $\bar{g}$ é uma bijeção.

Dada ℓ em $D(X, R)$, como g é uma sobrejeção existe $f \in C(Y, \mathbb{Z})$ tal que $g(f) = \ell$, então $\bar{g}(f) = \ell$. Portanto g é uma sobrejeção.

Agora, considere f_1 e f_2 em $C(Y, \mathbb{Z})$ tais que $\bar{g}(f_1) = \bar{g}(f_2)$. Então

$$\langle g(f_1) \rangle = \langle g(f_2) \rangle \Rightarrow \langle g(f_1 - f_2) \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle.$$

Como g é isomorfismo,

$$\langle g(f_1 - f_2) \rangle = \langle g(\mathbf{0}) \rangle.$$

Como $g(\mathbf{0})$ está em $B(X, R)$ que é igual a $g(B(Y, Q))$, temos que $f(f_1 - f_2)$ está em $g(B(Y, Q))$. Assim, $f_1 - f_2 \in B(Y, Q)$. Portanto, como $B(Y, Q)$ é normal (é

abeliano):

$$\langle f_1 - f_2 \rangle = \langle 0 \rangle \Rightarrow \langle f_1 \rangle - \langle f_2 \rangle.$$

Concluimos que $\bar{g}$ também é uma função injetiva. Portanto é uma bijeção. Então $\bar{g}$ é um isomorfismo. Falta mostrar que satisfaz as condições (1) e (2).

1. Seja $\langle f \rangle \in D(Y, Q)^+$.

$$\bar{g}(f) = \langle g(f) \rangle = \langle f \circ h \rangle.$$

Como $\langle f \rangle \in D(Y, Q)^+$, temos que $f \geq 0$, então $f \circ h \geq 0$. Portanto, $\bar{g}(f) \in D(X, R)^+$. Provamos, então, que $\bar{g}(D(Y, Q)^+) \subset D(X, R)^+$. Mostraremos, agora, a inclusão contrária. Seja $\langle F \rangle \in D(X, R)^+$. Como $\bar{g}$ é sobrejetiva, existe $\langle f \rangle \in D(Y, Q)$ tal que $\bar{g}(\langle f \rangle) = \langle F \rangle$.

Afirmção 10.2.5. $\langle f \rangle \in D(Y, Q)^+$.

Prova. Por hipótese, $F \geq 0$. Além disso, por definição da função $\bar{g}$ temos que

$$\langle f \circ h \rangle \langle F \rangle.$$

Então, $f \circ h \geq 0$. Já que h é um homeomorfismo, obtemos que $f \geq 0$. ■
Portanto $\langle F \rangle \in \bar{g}(D(Y, Q)^+)$. Concluimos que

$$\bar{g}(D(Y, Q)^+) = D(X, R)^+.$$

2. Seja $\mathbf{1} \in C(Y, \mathbb{Z})$, temos

$$\bar{g}(\langle \mathbf{1} \rangle) = \langle g(\mathbf{1}) \rangle = \langle \mathbf{1} \circ h \rangle = \langle \mathbf{1} \rangle.$$

Finalizamos, assim a demonstração do teorema. ■

11

O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli

O objetivo deste capítulo é obter, a partir de um diagrama de Bratteli, um grupo abeliano ordenado. Para isto precisamos de alguns conceitos

11.1

Limite indutivo de grupos

Considere sequências de grupos abelianos disjuntos $\{G_n\}_{n \geq 0}$ e sequências de homomorfismos $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$, tais que $\alpha_n : G_{n-1} \rightarrow G_n$. Definimos

$$\mathbf{G} = \bigsqcup_n G_n := \{(a, n) \mid n \geq 0, a \in G_n\} \quad \text{e}$$

$$\alpha : \bigsqcup_n G_n \rightarrow \bigsqcup_n G_n, \quad \alpha(a, n) = (\alpha_{n+1}(a), n+1).$$

O conjunto $\bigsqcup_n G_n$ não é um grupo.

Definição 11.1.1. Consideraremos a relação $R_{\mathbf{G}}$ em $\mathbf{G}$ dada por:

$$(a, m) \sim_{\mathbf{G}} (b, n) \text{ se e só se existem } l, k \in \mathbb{Z}^+ \text{ tais que } \alpha^l(a, m) = \alpha^k(b, n).$$

Em particular, $m + l = n + k$.

Proposição 11.1.2. A relação $R_{\mathbf{G}}$ é uma relação de equivalência.

Prova. Observe que as propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Mostraremos que também satisfaz a propriedade transitiva.

Sejam $(a, m), (b, n)$ e (c, p) em $\bigsqcup_n G_n$, tais que $(a, m) \sim_{\mathbf{G}} (b, n)$ e $(b, n) \sim_{\mathbf{G}} (c, p)$. Então existem inteiros não negativos i, j, k, l tais que

$$\alpha^i(a, m) = \alpha^j(b, n) \quad \text{e} \quad \alpha^k(b, n) = \alpha^l(c, p).$$

Então,

$$m + i = n + j \quad \text{e} \quad n + k = p + l.$$

Se $k \geq j$, então

$$m + i + k - j = n + k = p + l$$

e portanto, $\alpha^{i+k-j}(a, m) = \alpha^l(c, q)$. Se $k < j$, então

$$n + k + j - k = q + l + j - k = m + i,$$

então $\alpha^i(a, m) = \alpha^{l+j-k}(c, q)$. Em ambos os casos temos que $(a, m) \sim_{\mathbf{G}} (c, q)$.

Concluimos, assim, que $R_{\mathbf{G}}$ é uma relação de equivalência. ■

Iremos denotar por $\langle a, m \rangle_{\mathbf{G}}$ a classe de equivalência de (a, m) em $R_{\mathbf{G}}$ e por $(\mathbf{G}_{\infty}, \alpha_{\infty})$ o conjunto de todas as classes de equivalência.

Quando não houver confusão iremos denotar a classe de equivalência de (a, n) somente por $\langle a, n \rangle$.

Dado um elemento (a, n) em $\mathbf{G}$, temos que $(a, n) \sim_{\mathbf{G}} \alpha^k(a, n)$ para todo $k \geq 0$. O elemento $\alpha^k(a, n)$ está em $G_{n+k} \times (n+k)$. Dessa forma, para todo $m \geq 0$, existe (b, m) tal que $\langle a, n \rangle = \langle b, m \rangle$.

Dados (a, m) e (b, n) em $\mathbf{G}$, definimos a operação $+$ em $(\mathbf{G}_{\infty}, \alpha_{\infty})$ por:

$$\langle a, m \rangle_{\mathbf{G}} + \langle b, n \rangle_{\mathbf{G}} = \langle a + c, m \rangle_{\mathbf{G}},$$

onde c é tal que $\langle b, n \rangle_{\mathbf{G}} = \langle c, m \rangle_{\mathbf{G}}$.

Precisamos ver que a operação $+$ está bem definida. Consideraremos os representantes das classes do mesmo nível. Sejam $(a_1, n), (b_1, n), (a_2, m)$ e (b_2, m) em $\mathbf{G}$, tais que $\langle a_1, n \rangle = \langle a_2, m \rangle$ e $\langle b_1, n \rangle = \langle b_2, m \rangle$. Então, existem $k_1, k_2 > 0$ e $l_1, l_2 > 0$, tais que

$$k_1 + n = k_2 + m, \quad l_1 + n = l_2 + m$$

e

$$\alpha^{k_1}(a_1, n) = \alpha^{k_2}(a_2, m) \quad \text{e} \quad \alpha^{l_1}(b_1, n) = \alpha^{l_2}(b_2, m).$$

Suponha que $k_1 \leq l_1$. Então

$$k_2 = k_1 + n - m \leq l_1 + n - m = l_2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \alpha^{l_1}(a_1, n) &= \alpha^{l_1-k_1} \circ \alpha^{k_1}(a_1, n) = \alpha^{l_1-k_1} \circ \alpha^{k_2}(a_2, m) \\ &= \alpha^{l_1-k_1} \circ \alpha^{k_1+n-m}(a_2, m) = \alpha^{l_1+n-m}(a_2, m). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\alpha^{l_1}((a_1, n) + (b_1, n)) &= \alpha^{l_1}(a_1, n) + \alpha^{l_1}(b_1, n) = \alpha^{l_2}(a_2, m) + \alpha^{l_2}(b_2, m) \\ &= \alpha^{l_2}((a_2, m) + (b_2, m)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle a_1, n \rangle + \langle b_1, n \rangle = \langle a_1 + b_1, n \rangle = \langle a_2 + b_2, m \rangle = \langle a_2, m \rangle + \langle b_2, m \rangle.$$

Concluimos, assim, que a operação está bem definida.

Lema 11.1.3. *O conjunto $(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$ munido com a operação $+$ definida acima é um grupo. Além disso, Para cada $n \geq 0$, a função $\beta_n : G_n \rightarrow (\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$, definida por*

$$\beta_n(a) = \langle a, n \rangle \quad (11.1.1)$$

é um homomorfismo e $\beta_{n+1} \circ \alpha_{n+1} = \beta_n$.

Prova. Como a operação $+$ está bem definida e como, para cada $n \geq 0$, G_n é um grupo, então $(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty, +)$ é um grupo.

Um comentário conveniente é que dados n e m , temos que $(0, n) \sim_{\mathbf{G}} (0, m)$. Então temos um único elemento neutro em $(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$ e iremos representá-lo por 0 .

Seja (a, n) em G_n , temos que

$$\beta_{n+1} \circ \alpha_{n+1}(a) = \beta_{n+1}(\alpha_{n+1}(a), n+1) = \langle \alpha_{n+1}(a), n+1 \rangle.$$

Então, precisamos mostrar que $\langle \alpha_{n+1}(a), n+1 \rangle = \langle a, n \rangle$. Isso acontece porque $(\alpha_{n+1}(a), n+1) \sim_{\mathbf{G}} (a, n)$. ■

Proposição 11.1.4. *Sejam $\{G_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de grupos abelianos e $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de homomorfismos, onde $\alpha_n : G_{n-1} \rightarrow G_n$. Considere $(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$ e β_n como acima. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se α_n é o homomorfismo constante igual a zero para um número infinito de índices n , então*

$$(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty) = 0.$$

2. *Se existe $N \geq 0$, tal que para todo $n \geq N$, α_n é um isomorfismo então β_N é um isomorfismo.*

Prova. Mostraremos, primeiro, o item (1) da proposição. Seja (a, n) em $\mathbf{G}$. Por hipótese, existe $M \geq 0$ tal que α_k é o homomorfismo constante igual a 0 para todo $k \geq M$. Então, seja $k \geq M$, temos

$$\alpha^k(a, n) = (\alpha^k(a), n + k) = (0, n + k).$$

Portanto, $(a, n) \sim_{\mathbf{G}} (0, n + k)$. Como (a, n) é um elemento qualquer, temos

$$(G_{\infty}, \alpha_{\infty}) = 0.$$

Agora, demonstraremos o item (2) da proposição. Como β_N é homomorfismo, falta mostrar que é bijeção.

Provaremos que β_n é injetiva. Sejam a e b em G_N , tais que $a \neq b$. Suponha, por absurdo que $\beta_N(a) = \beta_N(b)$, então $(a, N) \sim_{\mathbf{G}} (b, N)$. Portanto existe inteiro $k \geq 0$ tal que

$$\alpha^k(a) = \alpha^k(b),$$

então, como α_i é injetiva para todo $i \geq K$, temos que $a = b$, o que é uma contradição.

Por último, precisamos mostrar que β_N é sobrejetiva.

Lema 11.1.5. *Para todo $k \geq 1$,*

$$\beta_N(G_N) = \beta_{N+k}(G_{N+k}). \quad (11.1.2)$$

Prova. Seja $g_{N+1} \in G_{N+1}$, temos que como α_{N+1} é sobrejeção, existe $g_n \in G_N$ tal que

$$\alpha_{N+1}(g_n) = g_{N+1}.$$

Então,

$$\beta_{N+1}(g_{N+1}) = \beta_{N+1}(\alpha_{N+1}(g_n)) = \beta_N(g_n) \in \beta_N(G_N).$$

Portanto, $\beta_{N+1}(G_{N+1}) \subset \beta_N(G_N)$. Indutivamente, provamos que para todo $k \geq 0$, $\beta_{N+k}(G_{N+k}) \subset \beta_N(G_N)$.

Mostraremos a inclusão contrária. Dado $k \geq 0$, definimos

$$\alpha_N^K := \alpha_{N+K} \circ \dots \circ \alpha_{N+1}.$$

Seja $g \in \beta_N(G_N)$, existe $g_n \in G_N$ tal que $\beta_n(g_n) = g$. Mas, pela definição da função β_N , segue que

$$g = \beta_N(g_n) = \beta_{N+k} \circ \alpha_N^k(g_n) \in \beta_{N+k}(G_{N+k}).$$

Provamos, então, que para todo $k \geq 0$,

$$\beta_N(G_N) = \beta_{N+k}(G_{N+k})$$

■

Agora, mostraremos que,

$$(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty) = \beta_N(G_N).$$

Seja $\langle a, n \rangle \in (\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$. Existe $m > N$ tal que $\langle a, n \rangle \in B_m(G_m)$. Pelo Lema 11.1.5, concluímos que $\langle a, n \rangle \in B_N(G_N)$ e, portanto, β_N é uma função sobrejetiva. Como β_N é uma bijeção e um homomorfismo é um isomorfismo. ■

Seja G um grupo abeliano e $\{G_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de subgrupos de G tal que $G_n \subset G_{n+1}$ e cuja união é o grupo G . Considere que, para todo $n \geq 0$, α_{n+1} é a inclusão de G_n em G_{n+1} . Definimos a função

$$\varphi : G \rightarrow (G_\infty, \alpha_\infty), \quad \varphi(a) = \langle a, n \rangle, \text{ onde } n \text{ menor número tal que } a \in G_n.$$

que está claramente bem definida. Isto é, independe da escolha do índice n .

Proposição 11.1.6. *A função φ é um isomorfismo.*

Prova. Mostraremos, primeiro, que φ é um homomorfismo. Sejam a e b em G . Como a sequência $\{G_n\}_{n \geq 0}$ é encaixada e $\bigcup_n G_n = G$, existe m tal que G_m é o primeiro elemento que contém a e existe n , tal que G_n é o primeiro elemento que contém b . Se $m \leq n$, então G_n é o primeiro elemento que contém $a + b$. Além disso, como para todo $m \geq 0$, α_{m+1} é a inclusão de G_m em G_{m+1} , temos que

$$\langle a, m \rangle = \langle a, k \rangle, \text{ para todo } k \geq m.$$

Portanto,

$$\varphi(a + b) = \langle a + b, n \rangle = \langle a, n \rangle + \langle b, n \rangle = \varphi(a) + \varphi(b). \quad (11.1.3)$$

Claramente, φ é sobrejetiva. Para mostrar que φ é injetiva, suponha que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Tomando m, n como acima, temos que

$$\varphi(a) = \langle a, m \rangle = \langle a, n \rangle = \langle b, n \rangle = \varphi(b).$$

Então, existem inteiros k e ℓ tais que

$$\alpha_n^k(a) = \alpha_n^\ell(b).$$

Portanto, $k = \ell$. Como α_n é a inclusão e $\alpha_n^k(a) = \alpha_n^k(b)$, concluímos que $a = b$. Mostramos, assim, que φ é injetiva. Portanto φ é uma bijeção. Concluímos, assim, que φ é um isomorfismo. ■

Agora, considere para cada $n \geq 0$, um subgrupo H_n de G_n tal que $H_n \subset H_{n+1}$. Seja $H = \bigcup_n H_n$. Definimos as funções:

$$\tilde{\alpha}_n : G_n/H_n \rightarrow G_{n+1}/H_{n+1}, \quad \tilde{\alpha}_n(a + H_n) = a + H_{n+1}, \quad a \in G_n$$

e

$$\phi : G/H \rightarrow ((G/H)_\infty, \tilde{\alpha}_\infty),$$

$$\phi(a + H) = \langle a + H_n, n \rangle, \quad n \text{ menor número tal que } a \in G_n.$$

A função $\tilde{\alpha}_n$, para todo $n \geq 0$ está claramente bem definida.

Proposição 11.1.7. *A função ϕ é um isomorfismo.*

Prova. Temos que mostrar que ϕ é um homomorfismo bijetivo. Primeiro provaremos que é homomorfismo. Sejam a e b em G , existe $m \geq 0$, tal que G_m é o primeiro elemento que contém a e existe n tal que G_n é o primeiro elemento que contém b . Suponha que $n \geq m$, G_n é o primeiro elemento que contém $a + b$. Além disso, pela definição da função $\tilde{\alpha}_n$, temos que

$$\langle a + H_m, m \rangle = \langle a + H_k, k \rangle, \quad \text{para todo } k \geq m.$$

Então

$$\begin{aligned} \phi((a + H) + (b + H)) &= \phi((a + b) + H) \\ &= \langle (a + b) + H_n, n \rangle = \langle (a + H_n) + (b + H_n), n \rangle \\ &= \langle a + H_n, n \rangle + \langle b + H_n, n \rangle = \phi(a + H) + \phi(b + H). \end{aligned}$$

Claramente ϕ é uma sobrejeção. Falta, então, mostrar que ϕ é injetiva. Sejam a e b em G tais que $a \in G_n$, $b \in G_k$ e $\phi(a + H) = \phi(b + H)$. Suponha que $n \geq k$, então

$$\langle a + H_n, n \rangle = \langle b + H_k, k \rangle.$$

Portanto, existem inteiros $l, m \geq 0$, tais que

$$\tilde{\alpha}^l((a + H_n, n)) = \tilde{\alpha}^m((b + H_k, k)) \quad \text{e} \quad n + l = k + m.$$

Definimos $M := n + l = m + k$, temos que

$$a + H_M = b + H_M.$$

Como a sequência de subgrupos é encaixada e a união é H , segue que

$$a + H = b + H.$$

Portanto ϕ é injetiva.

Logo, ϕ é um isomorfismo. ■

Definição 11.1.8 (Homomorfismo positivo). *Sejam (G, G^+) e (H, H^+) grupos abelianos ordenados. Um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ é positivo se $\varphi(G^+) \subset H^+$.*

Teorema 11.1.9. *Sejam $\{(G_n, G_n^+)\}_{n \geq 0}$ uma sequência de grupos abelianos ordenados e $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de homomorfismos positivos, onde $\alpha_n : G_n \rightarrow G_{n+1}$. Então*

$$\{\langle a, n \rangle \mid n \geq 0, a \in G_n^+\}$$

é o cone positivo de $(G_\infty, \alpha_\infty)$.

Prova. Denotaremos o conjunto $\{\langle a, n \rangle \mid n \geq 0, a \in G_n^+\}$ por H . Temos que mostrar que H satisfaz as condições da Definição 9.2.1 de cone positivo.

1. Como, para cada $n \geq 0$, G_n^+ é um cone positivo, temos que H é um subsemigrupo de $(G_\infty, \alpha_\infty)$.
2. Precisamos ver que $H - H = (G_\infty, \alpha_\infty)$. É claro que $H - H \subset (G_\infty, \alpha_\infty)$. Agora, considere $\langle a, n \rangle \in (G_\infty, \alpha_\infty)$. Como G_n^+ é cone positivo, existem b e c em G_n^+ tais que $a = b - c$. Então $\langle b - c, n \rangle \in H - H$.
3. Mostraremos que $H \cap (-H) = \{0\}$. Seja $\langle a, n \rangle \in H \cap (-H)$. Temos que $\langle a, n \rangle \in H$ e $\langle -a, n \rangle \in H$. Então a e $-a$ estão em G_n^+ . Como G_n^+ é cone positivo, $a = 0$. Portanto,

$$\langle a, n \rangle = \langle 0, n \rangle = 0.$$

Concluimos que $H \cap (-H) = \{0\}$.

Mostramos, assim, que H é o cone positivo de $(G_\infty, \alpha_\infty)$. A partir de agora, denotaremos H por $(G_\infty, \alpha_\infty)^+$. ■

11.2

O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli

Na definição de um diagrama de Bratteli

$$\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_n, E, r, s)$$

o conjunto V_0 era unitário. Tal restrição não será necessária no momento. Portanto, nesta seção o conjunto V_0 pode ter mais de um elemento.

Iremos obter a partir do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ um grupo abeliano ordenado que será a união de uma sequência de grupos abelianos disjuntos, como na seção anterior.

11.2.1

A função $h_{\mathfrak{B}_n}$

Seja $\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Definimos, para cada $n \geq 0$, o grupo $G_n = \mathbb{Z}V_n$, veja a Definição 9.2.5, que possui $\mathbb{Z}V_n^+$ como cone positivo, veja a Proposição 9.2.6. Dessa forma, um elemento g de $\mathbb{Z}V_{n-1}$, pode ser expresso como

$$g = \sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} m_i v_i^{n-1}, \quad \text{onde } v_i^{n-1} \in V_{n-1} \text{ e } m_i \in \mathbb{Z}.$$

Fixe $n \geq 1$ e considere a função $h_{\mathfrak{B}_n} : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n$ definida por:

$$h_{\mathfrak{B}_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} m_i v_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) m_i \right) v_j^n. \quad (11.2.1)$$

Proposição 11.2.1. *Para cada $n \geq 1$, a função $h_{\mathfrak{B}_n}$ é um homomorfismo positivo.*

Prova. Fixe $n \geq 0$. Sejam

$$g_1 = \sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} m_i v_i^{n-1} \quad \text{e} \quad g_2 = \sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \ell_i v_i^{n-1}$$

elementos de $\mathbb{Z}V_{n-1}$. Temos que

$$\begin{aligned}
 h_{\mathfrak{B}_n}(g_1 + g_2) &= h_n\left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} (m_i + \ell_i)v_i^{n-1}\right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\})\right)(m_i + \ell_i)v_j^n \\
 &= \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\})\right)m_i v_j^n \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\})\right)\ell_i v_j^n \\
 &= h_{\mathfrak{B}_n}(g_1) + h_{\mathfrak{B}_n}(g_2).
 \end{aligned}$$

Então, $h_{\mathfrak{B}_n}$ é homomorfismo. Além disso, como

$$\#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) \geq 0,$$

temos que $h_{\mathfrak{B}_n}(\mathbb{Z}V_{n-1}^+) \subset \mathbb{Z}V_n^+$. Portanto, $h_{\mathfrak{B}_n}$ é um homomorfismo positivo.

Como n é arbitrário, concluímos a demonstração da proposição. ■

Dado $n \geq 0$, fixe i , tal que $1 \leq i \leq n$. Temos que $v_i^{n-1} \in V_{n-1} \subset \mathbb{Z}V_{n-1}$ e

$$h_{\mathfrak{B}_n}(v_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{\#V_n} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\})v_{n,j}.$$

Mas, $\#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) > 0$, se e somente se, $s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\} \neq \emptyset$. Isto é, se existe $e \in E_n$, tal que $s(e) = v_i^{n-1}$ e $r(e) = v_j^n$. Então, podemos reescrever $h_{\mathfrak{B}_n}(v_i^{n-1})$ como:

$$h_{\mathfrak{B}_n}(v_i^{n-1}) = \sum_{e \in E_n, s(e)=v_i^{n-1}} r(e).$$

Teorema 11.2.2. *Seja $V = \{V_n\}_{n \geq 0}$ uma coleção de conjuntos finitos. Se para todo $n \geq 1$, $h_n : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n$ é um homomorfismo positivo então existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, onde $V = \{V_n\}_{n \geq 0}$ e $h_{\mathfrak{B}_n} = h_n$.*

Prova. Definiremos para cada $n \geq 1$, os conjuntos E_n . Seja $v_i^{n-1} \in V_{n-1} \subset \mathbb{Z}V_{n-1}^+$, então $h_n(v_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{\#V_n} m_{i,j} v_j^n$. Como h_n é positivo, temos que $m_{i,j} \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq \#V_n$. Definimos que existem $m_{i,j}$ arestas ligando o vértice v_i^{n-1} ao vértice v_j^n , que denotamos por $e_{i,j,\ell}$, onde $1 \leq \ell \leq m_{i,j}$. Desta forma, para cada $n \geq 0$

$$E_n := \{e_{i,j,\ell} \mid 1 \leq i \leq \#V_{n-1}, 1 \leq j \leq \#V_n, 1 \leq \ell \leq m_{i,j}\}.$$

Para cada $e_{i,j,\ell} \in E_n$, definimos

$$s(e_{i,j,\ell}) = v_i^{n-1} \quad \text{e} \quad r(e_{i,j,\ell}) = v_j^n.$$

Como $m_{i,j} \geq 0$, $s^{-1}(v), r^{-1}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in \{V_n\}_{n \geq 0}$. Então, a coleção

$$\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E = \{E_n\}_{n \geq 1}, r, s)$$

é um diagrama de Bratteli.

Mostraremos que $h_{\mathfrak{B}_n} = h_n$. Seja $g = \sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} k_i v_i^{n-1}$, usando que h_n é homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned} h_n(g) &= h_n\left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} k_i v_i^{n-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\#V_n} k_i h_n(v_i^{n-1}) = \sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} k_i \left(\sum_{j=1}^{\#V_n} m_{i,j} v_j^n\right). \end{aligned}$$

Mas, por definição

$$m_{i,j} = \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}).$$

Então $h_n(g) = h_{\mathfrak{B}_n}(g)$. Como g é arbitrário, temos que $h_{\mathfrak{B}_n} = h_n$. Concluimos, assim, a prova do teorema. $\blacksquare$

Dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, considere m e n números naturais tais que $m > n$. Considere a função $h_{\mathfrak{B}_{n,m}} : \mathbb{Z}V_n \rightarrow \mathbb{Z}V_m$, definida por:

$$h_{\mathfrak{B}_{n,m}} = h_{\mathfrak{B}_m} \circ h_{\mathfrak{B}_{m-2}} \circ \cdots \circ h_{\mathfrak{B}_{n+1}}.$$

Observação 11.2.3. *Seja k tal que $n < k < m$, temos que*

$$h_{\mathfrak{B}_{k,m}} \circ h_{\mathfrak{B}_{n,k}} = h_{\mathfrak{B}_{m,n}}.$$

Observação 11.2.4. *Dado $n \geq 1$, $h_{\mathfrak{B}_{n,n+1}} = h_{\mathfrak{B}_{n+1}}$.*

Dado $n \geq 1$, se o conjunto V_n possui k_n elementos, então o conjunto $\mathbb{Z}V_n$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^{k_n}$. Assim, os elementos de $\mathbb{Z}^{k_n}$ podem ser vistos como vetores coluna e o homomorfismo $h_{\mathfrak{B}_n}$ como uma matriz $k_n \times k_{n-1}$, que será denotada por $(H_{\mathfrak{B}_n}) = (h_{\mathfrak{B}_n,i,j})$, onde $(h_{\mathfrak{B}_n,i,j})$ é o número de arestas em E_n que ligam v_i^{n-1} a v_j^n .

11.2.2

O grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli

Finalmente estamos prontos para definir o grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli. Para isto, lembre que dada uma sequência $\{G_n\}_{n \geq 0}$ de grupos abelianos e uma sequência $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ de homomorfismos positivos, definimos o grupo $(\mathbf{G}_\infty, \alpha_\infty)$.

Definição 11.2.5 (Grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli). *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Definimos seu grupo de dimensão como o conjunto*

$$D(\mathfrak{B}) = (\mathbb{Z}V_\infty, h_\infty).$$

Repare que o Teorema 11.1.9 nos dá um cone positivo para o grupo $D(\mathfrak{B})$. Então o grupo $D(\mathfrak{B})$ é um grupo abeliano ordenado.

Estudaremos o seguinte exemplo.

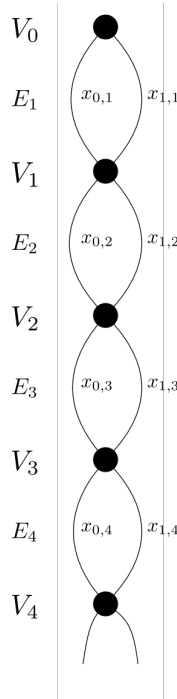


Figura 11.1: Diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$

Considere o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ tal que $(X_{\mathfrak{B}}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ é conjugado com $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \Phi)$, onde Φ é o odômetro diádico, apresentado na Figura 11.1. Identificaremos o seu grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$. Como para cada $n \geq 0$, $V_n = \{v_n\}$ e $\#E_n = 2$, temos que

$$h_{\mathfrak{B}_{n-1}}(kv_n) = k2v_{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que a função $h_{\mathfrak{B}_n}$ é injetiva, para todo $n \geq 0$. Considere o elemento $\langle v_0, 0 \rangle$ de $(\mathbb{Z}V_\infty, h_\infty)$, temos que

$$\begin{aligned}\langle v_0, 0 \rangle &= \langle h_{\mathfrak{B}_1}(v_0), 1 \rangle = \langle 2v_1, 1 \rangle = 2\langle v_1, 1 \rangle = 2\langle h_{\mathfrak{B}_2}(v_1), 2 \rangle \\ &= 4\langle v_2, 2 \rangle = \cdots = 2^k\langle v_k, k \rangle.\end{aligned}$$

Definimos o grupo

$$\mathbb{Z}[1/2] := \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

que chamaremos de grupo diádico. Definimos, também, a função

$$\beta : D(\mathfrak{B}) \rightarrow \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \beta(\langle pv_n, n \rangle) = \frac{p}{2^n}.$$

Proposição 11.2.6. *A função β é um isomorfismo.*

Prova. Considere dois elementos $\langle pv_n, n \rangle$ e $\langle qv_k, k \rangle$ de $D(\mathfrak{B})$. Mostraremos, primeiro, a injetividade. Suponha que $\beta(\langle pv_n, n \rangle) = \beta(\langle qv_k, k \rangle)$ e que $k \leq n$, segue que

$$\frac{p}{2^n} = \frac{q}{2^k} \Leftrightarrow p = 2^{n-k}q.$$

Então $\langle pv_n, n \rangle = \langle 2^{n-k}qv_n, n \rangle$. Além disso, temos que

$$h_{\mathfrak{B}_n}^k(pv_n) = h_{\mathfrak{B}_n}^k(2^{n-k}qv_n) = 2^k 2^{n-k}qv_{n+k} = 2^n qv_{n+k} = h_{\mathfrak{B}}^n(qv_k).$$

Portanto, $\langle pv_n, n \rangle \sim \langle qv_k, k \rangle$ e $\langle pv_n, n \rangle = \langle qv_k, k \rangle$. Assim, β é uma função injetiva. Por construção β é uma função sobrejetiva.

Só falta mostrar que β é um homomorfismo. Sejam $\langle pv_n, n \rangle$ e $\langle qv_k, k \rangle$ dois elementos em $R_{\mathfrak{B}}$. Suponha que $k \leq n$, temos que

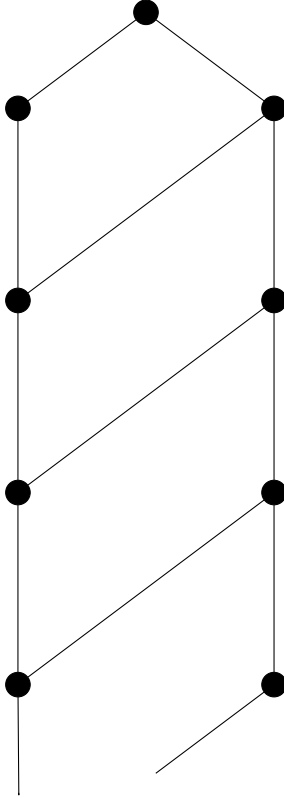
$$\langle qv_k, k \rangle = \langle 2^{n-k}qv_n, n \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned}\beta(\langle pv_n, n \rangle + \langle qv_k, k \rangle) &= \beta(\langle (p + 2^{n-k}q)v_n, n \rangle) \\ &= \frac{p + 2^{n-k}q}{2^n} = \frac{p}{2^n} + \frac{q}{2^k} \\ &= \beta(\langle pv_n, n \rangle) + \beta(\langle qv_k, k \rangle).\end{aligned}$$

Concluimos, assim que β é um homomorfismo e portanto um isomorfismo. ■

A seguir identificaremos o grupo de dimensão do diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, r, s)$ na Figura 11.2.

Figura 11.2: Diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, r, s)$

Denotamos

$$W_0 = \{w_0^0\}$$

e para $n \geq 1$,

$$W_n = \{w_i^n \mid 1 \leq i \leq 2\}.$$

Agora, denotamos

$$E_1 = \{f_{(0,1)^1}, f_{(0,2)^1}\},$$

e para $n \geq 2$,

$$E_n = \{f_{(1,1)^n}, f_{(1,2)^n}, f_{(2,2)^n}\}.$$

Lembre que usando a caracterização por meio de matrizes, podemos representar o homomorfismo $h_{\mathfrak{T}_n}$ por uma matriz $H_{\mathfrak{T}_n} = (h_{\mathfrak{T}_n, i, j})$, onde $(h_{\mathfrak{T}_n, i, j})$ é o número de arestas entre o vértice v_j^{n-1} e o vértice v_i^n . Com o intuito de simplificar a notação, denotaremos, para cada $n \geq 0$ a matriz $H_{\mathfrak{T}_n}$ por H_n . Assim,

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e para todo $n \geq 2$,

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como para todo $n \geq 2$, $\det(H_n) = 1$, temos que para todo $n \geq 2$ a matriz H_n é invertível e portanto, o homomorfismo $h_{\mathfrak{T}_n}$ é um isomorfismo. Considere, para todo $n \geq 0$, a função $\beta_n : \mathbb{Z}V_n \rightarrow D(\mathfrak{T})$ definida na equação (11.1.1). Como para todo $n \geq 1$, a função $h_{\mathfrak{T}_n}$ é um isomorfismo. Usando a condição 2 da Proposição 11.1.4 para $\alpha_n = h_{\mathfrak{T}_n}$ concluímos que

$$\beta_1 : \mathbb{Z}V_1 \rightarrow D(\mathfrak{T})$$

é um isomorfismo. Além disso, temos que $\mathbb{Z}V_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Concluimos, portanto, que $D(\mathfrak{T}) \cong \mathbb{Z}^2$.

Seria intuitivo pensar que o cone positivo de $D(\mathfrak{T})$ é

$$D(\mathfrak{T})^+ = \{(i, j) \mid i, j \geq 0\}.$$

Mas não é o que acontece. Pelo Teorema 11.1.9, temos que

$$D(\mathfrak{T})^+ = \{(i, j) \mid \langle (i, j), 1 \rangle = \langle a, n \rangle \text{ para algum } n \geq 0 \text{ e } a \in \mathbb{Z}V_n^+\}.$$

Considere o elemento $(-1, 1)$ de $D(\mathfrak{T})$. Temos que

$$H_2\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\langle (-1, 1), 1 \rangle = \langle h_{\mathfrak{T}_2}(-1, 1), 2 \rangle = \langle (0, 1), 2 \rangle.$$

Então, $(-1, 1)$ está em $D(\mathfrak{T})^+$.

Afirmção 11.2.7. $D(\mathfrak{T})^+ = \{(i, j) \mid j > 0 \text{ ou } j = 0 \text{ e } i \geq 0\}$.

Prova. Sejam $i, j \in \mathbb{Z}$. Se $j = 0$ e $k \geq 0$ é imediato que $(i, j) \in D(\mathfrak{T})^{\mathbb{N}}$.

Agora, considere que $j > 0$ e $n > 0$.

$$H_n\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} i + nj \\ j \end{bmatrix}.$$

Então, existe n tal que $i + nj > 0$. Assim, $h_{\mathfrak{T}_n}(i, j) \in D(\mathfrak{T})^+$. Assim, $(i, j) \in D(\mathfrak{T})^{\mathbb{N}}$.

Portanto,

$$\{(i, j) \mid j > 0 \text{ ou } j = 0 \text{ e } i \geq 0\} \subset D(\mathfrak{T})^+.$$

Falta mostrar que

$$D(\mathfrak{T})^+ \subset \{(i, j) \mid j > 0 \text{ ou } j = 0 \text{ e } i \geq 0\}.$$

Dado $(i, j) \in D(\mathfrak{T})^+$, denotaremos (i, j) por $\langle(i, j), 1\rangle$. Existem n e $a \in \mathbb{Z}V_n^+$ tais que $\langle(i, j), 1\rangle = \langle a, n\rangle$. Como $a \in \mathbb{Z}V_n^+$, temos que

$$\langle(i, j), 1\rangle = \langle p(1, 0), n\rangle + q\langle(0, 1), n\rangle, \quad \text{onde } p, q \geq 0. \quad (11.2.2)$$

Como H_n é sempre a mesma matriz para todo $n \geq 2$, escreveremos H . Fixe $n \geq 2$, temos que

$$H^{1-n} = \begin{bmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$H^{1-n}(1, 0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad H^{1-n}(0, 1) = (1-n, 1).$$

Portanto

$$\langle(1, 0), n\rangle = \langle H^{1-n}(1, 0), 1\rangle = \langle(1, 0), 1\rangle$$

e

$$\langle(0, 1), n\rangle = \langle H^{1-n}(0, 1), 1\rangle = \langle(1-n, 1), 1\rangle.$$

Substituindo na equação (11.2.2), obtemos

$$\langle(i, j), 1\rangle = p\langle(1, 0), 1\rangle + q\langle(1-n, 1), 1\rangle$$

. Como $n \geq 2$, temos que $1-n \leq 0$, então

$$\langle(i, j), 1\rangle \in \{(i, j) \mid j > 0 \text{ ou } j = 0 \text{ e } i \geq 0\}.$$

Concluimos, assim, que

$$D(\mathfrak{T}^+) = \{(i, j) \mid j > 0 \text{ ou } j = 0 \text{ e } i \geq 0\}.$$

Finalizamos, então, a demonstração da afirmação. ■

11.2.3

O grupo de dimensão e a propriedade telescópica

Agora que já vimos alguns exemplos sobre o grupo de dimensão, pode surgir a pergunta: o que acontece com o grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli se aplicarmos a propriedade telescópica a este?

Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Considere uma sequência crescente de inteiros $\{m_k\}_{k \geq 0}$ tal que $m_0 = 0$ e o diagrama $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através da subsequência $\{m_k\}_{k \geq 0}$. Considere a função $t : D(\mathfrak{T}) \rightarrow D(\mathfrak{B})$, definida por

$$t(\langle w, k \rangle) = \langle w, m_k \rangle,$$

Teorema 11.2.8. *A função t é um isomorfismo.*

Prova. Claramente a função é um homomorfismo. Precisamos mostrar que é uma bijeção. Veremos primeiro, que a função é sobrejetiva. Seja $\langle v, n \rangle$ um elemento de $D(\mathfrak{B})$. Lembre da função $h_{\mathfrak{B}_n} : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n$, definida por:

$$h_{\mathfrak{B}_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_n} m_i v_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^{\#V_n} \left(\sum_{i=1}^{\#V_{n-1}} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) m_i \right) v_j^n.$$

Lembre também que dado $n < m$, definimos

$$h_{\mathfrak{B}_{n,m}} = h_{\mathfrak{B}_m} \circ h_{\mathfrak{B}_{m-1}} \circ \cdots \circ h_{\mathfrak{B}_{n+1}}.$$

Como para cada vértice v , os conjuntos $r^{-1}\{v\}$ e $s^{-1}\{v\}$ são não vazios, temos que para cada $k \geq 0$ existe $a \in \mathbb{Z}V_{m_k}$ tal que $\langle v, n \rangle = \langle a, m_k \rangle$. Então,

$$\langle v, n \rangle = \langle a, m_k \rangle = t(\langle a, k \rangle).$$

Portanto, t é sobrejetiva.

Mostraremos, agora, que t é injetiva. Sejam $\langle v, k \rangle$ e $\langle w, l \rangle$ em $D(\mathfrak{T})$. Suponha que

$$t(\langle v, k \rangle) = t(\langle w, l \rangle),$$

então

$$\langle v, m_k \rangle = \langle w, m_l \rangle.$$

Portanto, existe inteiro $N > m_k, m_l$ tal que

$$h_{\mathfrak{B}_{m_k, N}}(v) = h_{\mathfrak{B}_{m_l, N}}(w).$$

Podemos considerar somente o caso em que $k < l$. Temos que existe w_k tal que

$w = h_{\mathfrak{B}_{m_k, m_l}}(w_k)$. Então

$$h_{\mathfrak{B}_{m_k, N}}(v) = h_{\mathfrak{B}_{m_l, N}}(w) = h_{\mathfrak{B}_{m_l, N}}(h_{\mathfrak{B}_{m_k, m_l}}(w_k)) = h_{\mathfrak{B}_{m_k, N}}(w_k).$$

Como $h_{\mathfrak{B}_i}$ é injetiva para todo i , temos que $v = w_k$, logo $\langle v, k \rangle = \langle w_k, k \rangle$. Além disso, como $w = h_{\mathfrak{B}_{m_k, m_l}}(w_k)$, temos que $\langle w_k, k \rangle = \langle w, l \rangle$. Portanto,

$$\langle v, k \rangle = \langle w, l \rangle.$$

Então t é injetiva. Concluimos, assim que a função t é um isomorfismo. ■

11.2.4

O grupo de dimensão e a ordem unitária

A seguir, veremos alguns resultados sobre a ordem unitária em um grupo de dimensão. Lembre na Definição 9.2.1 o conceito de ordem unitária.

Observação 11.2.9. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Se $V_0 = \{v_0\}$ então $\langle v_0, 0 \rangle$ é uma ordem unitária para o seu grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$.*

De fato, seja $\langle v, n \rangle$ um elemento de $D(\mathfrak{B})$, como V_0 possui somente o elemento v_0 , existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\langle v, n \rangle = \langle kv_0, 0 \rangle$. Temos que

$$k\langle v_0, 0 \rangle - \langle v, n \rangle = k\langle v_0, 0 \rangle - \langle kv_0, 0 \rangle = \langle kv_0 - kv_0, 0 \rangle = 0 \in D(\mathfrak{B})^+.$$

Portanto, $\langle v_0, 0 \rangle$ é uma ordem unitária para $D(\mathfrak{B})$.

Quando V_0 possui mais de um elemento, não podemos garantir que V_0 contenha algum elemento que seja ordem unitária. Veja o exemplo: No diagrama de Bratteli apresentado na Figura 11.3, $\langle v, 0 \rangle$ não é uma ordem unitária para todo $v \in V_0$.

Lema 11.2.10. *Considere um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e seu grupo de dimensão $D(\mathfrak{B})$. Se $\langle v, n \rangle$ é uma ordem unitária de $D(\mathfrak{B})^+$ então dado $\langle w, m \rangle$ em $D(\mathfrak{B})$, existem inteiros l e N , tais que*

$$h_{n, N}(lv) \geq h_{m, N}(w).$$

Prova. Considere $\langle v, n \rangle$ como uma ordem unitária de $D(\mathfrak{B})^+$. Por definição de ordem unitária, dado $\langle w, m \rangle$ em $D(\mathfrak{B})$ existe inteiro ℓ tal que

$$\ell\langle v, n \rangle - \langle w, m \rangle \in D(\mathfrak{B})^+. \quad (11.2.3)$$

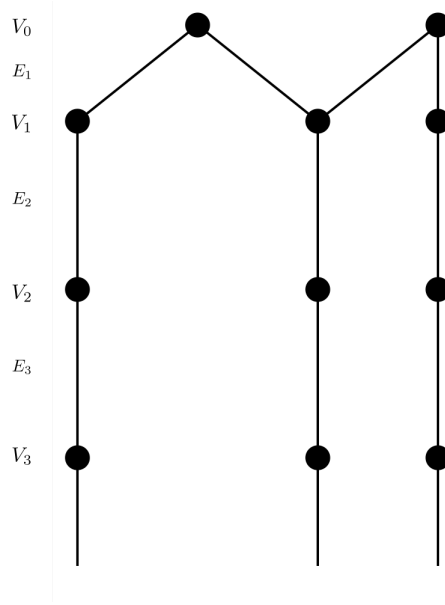


Figura 11.3: Exemplo de diagrama de Bratteli com mais de um elemento em V_0 .

Sabemos que

$$\langle w, m \rangle = \langle h_{m,n}(w), n \rangle.$$

Podemos, então, reescrever a equação (11.2.3) como

$$\ell \langle v, n \rangle - \langle h_{m,n}(w), n \rangle = \langle \ell v - h_{m,n}(w), n \rangle \in D(\mathfrak{B})^+.$$

Isso significa que existem inteiro k e $a \in \mathbb{Z}V_k^+$ tal que

$$\langle v - h_{m,n}(w), n \rangle = \langle a, k \rangle.$$

Então existem inteiro N , tal que

$$h_{n,N}(\ell v - h_{m,n}(w)) = h_{k,N}(a).$$

Como h_i é positivo para todo i , temos que

$$\begin{aligned} h_{n,N}(\ell v - h_{m,n}(w)) &= h_{n,N}(\ell v) - h_{n,N}(h_{m,n}(w)) \\ &= h_{n,N}(\ell v) - h_{m,N}(w) \in \mathbb{Z}V_N^+. \end{aligned}$$

Então,

$$h_{n,N}(\ell v) \geq h_{m,N}(w). \quad (11.2.4)$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema. $\blacksquare$

Teorema 11.2.11. *Sejam $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli e $v_0 \in V_0$*

tal que $\langle v_0, 0 \rangle$ é uma ordem unitária para $D(\mathfrak{B})$. Então existem um sub diagrama $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ tal que $W_0 = \{v_0\}$ e um isomorfismo ordenado α entre $D(\mathfrak{T})$ e $D(\mathfrak{B})$ tal que $\alpha(\langle v_0, 0 \rangle) = \langle v_0, 0 \rangle$.

Prova. Temos que definir os conjuntos W e F . Começaremos pelo conjunto W . Definimos $W_0 = \{v_0\}$ e para todo $n \geq 1$,

$$W_n := \{w \in V_n \mid \text{existe caminho de } v_0 \text{ para } w\} \subset V_n.$$

O conjunto W é a coleção $\{W_n\}_{n \geq 0}$

Agora, definimos

$$F_n := s_n^{-1}(W_{n-1}) \quad \text{e} \quad F = \{F_n\}_{n \geq 1}.$$

Lembre que, para cada $n \geq 1$, $s_n : E_n \rightarrow V_{n-1}$, dessa forma, o conjunto F é formado por todas as arestas que saem dos vértices que estão em W_n . Assim, Se e está em F , existem w em W tal que $s(e) = w$ e caminho p de v_0 a w . Dessa forma, a concatenação pe é um caminho de v_0 a $r(e)$ e, portanto, $r(e)$ está em W .

Por último, definimos para cada $n \geq 0$

$$\bar{r} := r|_F \quad \text{e} \quad \bar{s} := s|_F.$$

O diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ é um sub diagrama de $\mathfrak{B}$ tal que $W_0 = \{v_0\}$.

Agora, seja a função definida por:

$$\alpha : D(\mathfrak{T}) \rightarrow D(\mathfrak{B}), \quad \alpha(\langle w, n \rangle_{\mathfrak{T}}) = \langle w, n \rangle_{\mathfrak{B}}.$$

Lema 11.2.12. *A função α é um isomorfismo ordenado positivo.*

Prova. A função α claramente é um homomorfismo. Mostraremos que a função é bijetiva. Também é claro que a função é injetiva. Falta mostrar que a função é sobrejetiva. Dado $v \in V_n$, encontraremos $m > n$ e $w \in \mathbb{Z}W_m$ tal que

$$\langle v, n \rangle_{\mathfrak{B}} = \langle w, m \rangle_{\mathfrak{B}}. \quad (11.2.5)$$

Usando o Lema 11.2.10, temos que existem inteiros $\ell > 0$ e $m > n$ tais que

$$h_{\mathfrak{B}_{0,m}}(\ell v_0) \geq h_{\mathfrak{B}_{n,m}}(v).$$

Podemos escrever,

$$h_{\mathfrak{B}_{0,m}}(\ell v_0) = \sum_{v_m \in V_m} \ell i_{v_m} v_m \quad \text{e} \quad h_{\mathfrak{B}_{n,m}}(v) = \sum_{v_m \in V_m} j_{v_m} v_m. \quad (11.2.6)$$

Pela definição da função $h_{\mathfrak{B}_{n,m}}$, $i_{v_m} \geq 0$ para todo $v_m \in V_m$. Como, $s^{-1}\{v\}$ e $r^{-1}\{v\}$ são não vazios para todo v , existe pelo menos um $v_m \in V_m$ tal que $j_{v_m} > 0$. Usando as equações (11.2.5) e (11.2.6), temos que

$$\ell i_{v_m} \geq j_{v_m}.$$

Como $\ell > 0$ e $j_{v_m} > 0$, obtemos que $i_{v_m} > 0$. Isto significa que $v_m \in W_m$. Portanto, $h_{\mathfrak{B}_{n,m}}(v) \in \mathbb{Z}W_m$. Além disso,

$$\langle v, v \rangle_{\mathfrak{B}} = \langle h_{\mathfrak{B}_{n,m}}(v), m \rangle_{\mathfrak{B}}.$$

Definimos,

$$w = h_{\mathfrak{B}_{n,m}}(v).$$

Temos que

$$\alpha(\langle w, m \rangle_{\mathfrak{B}}) = \langle v, n \rangle.$$

Portanto, α é uma função sobrejetiva. Note que $w \in \mathbb{Z}W_m^+$. Então α é um isomorfismo positivo. Assim, concluímos a prova do Teorema 11.2.11. ■

Lembre que um diagrama de Bratteli é simples se satisfaz alguma uma das condições (equivalentes) do Teorema 5.3.5. Podemos usar o grupo de dimensão para identificar quando um diagrama de Bratteli é simples.

Teorema 11.2.13. *Um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ tal que $V_0 = \{v_0\}$ é simples se e somente se todo elemento estritamente positivo de $D(\mathfrak{B})$ é uma ordem unitária.*

Prova. Suponha que todo elemento estritamente positivo de $D(\mathfrak{B})$ seja uma ordem unitária. Dado $v \in V_m$ temos que $\langle v, m \rangle$ é uma ordem unitária. Portanto, pelo Lema 11.2.10 dado $v_0 \in V_0$, existem inteiros positivos $\ell > 0$ e $n > m$ tais que

$$\ell h_{m,n}(v) \geq h_{0,n}(v_0).$$

Temos que

$$h_{m,n}(v) = \sum_{v_n \in V_n} i_{v_n} v_n \quad \text{e} \quad h_{0,n}(v_0) = \sum_{v_n \in V_n} j_{v_n} v_n.$$

Podemos escrever

$$\ell \left(\sum_{v_n \in V_n} i_{v_n} v_n \right) \geq \sum_{v_n \in V_n} j_{v_n} v_n.$$

Como $s^{-1}(w) \neq \emptyset$ para todo $w \in V$, temos que $j_{v_n} > 0$ para todo v_n em V_n . Portanto, também temos que $i_{v_n} > 0$ para todo v_n em V_n . Isso significa que existe pelo menos um caminho entre v e todo elemento de V_n . Isto é, o diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ é simples.

Agora, suponha que o diagrama $\mathfrak{B}$ é simples. Seja $\langle v, m \rangle$ um elemento estritamente positivo de $D(\mathfrak{B})$. Mostraremos que $\langle v, m \rangle$ é uma ordem unitária. Como $\mathfrak{B}$ é simples, pelo item 1 do Teorema 5.3.5, existe $n(m) > m$ tal que existe um caminho entre v e todo elemento de $V_{n(m)}$. Dessa forma,

$$h_{\mathfrak{B}_{m, n(m)}}(v) = \sum_{v_n \in V_{n(m)}} i_{v_n} v_n, \quad i_{v_n} > 0 \text{ para todo } v_n \in V_{n(m)}.$$

Considere o elemento $\langle w, k \rangle$. Não há problema considerar, $k < m$, quando $k \geq m$, encontramos um representante de $\langle v, m \rangle$ em V_k e tomamos $n(k)$. Temos que

$$h_{\mathfrak{B}_{k, n(k)}}(w) = \sum_{v_n \in V_n} j_{v_n} v_n, \quad j_{v_n} \geq 0.$$

Como $i_{v_n} > 0$ para todo $v_n \in V_n$, existe inteiro positivo L tal que

$$L i_{v_n} \geq j_{v_n}, \quad \text{para todo } v_n \in V_n.$$

Assim,

$$L h_{\mathfrak{B}_{m, n(m)}}(v) \geq h_{\mathfrak{B}_{k, n(k)}}(w) \Leftrightarrow L \langle v, m \rangle \geq \langle w, k \rangle \Leftrightarrow L \langle v, m \rangle - \langle w, k \rangle \in D(\mathfrak{B})^+.$$

Concluimos, assim, que o elemento $\langle v, m \rangle$ é uma ordem unitária. ■

12

O invariante para as relações AF e orbital

O objetivo deste capítulo é dados um espaço métrico compacto X , um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$ sem pontos periódicos e um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ encontrar os invariantes $D(X, R_\varphi)$ e $D(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B})$.

12.1

O invariante para relações-AF

Lembre que relacionada a uma ação local Γ há uma relação de equivalência R_Γ , definida na Seção 8.1, que é denominada de relação de equivalência étale.

Na Seção 8.2, vimos que a um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ pode ser associado a uma ação local $\Gamma_\mathfrak{B}$. No Teorema 8.2.3, demonstramos que $R_\mathfrak{B} = R_{\Gamma_\mathfrak{B}}$.

Recorde que uma relação de equivalência R no espaço X é AF se existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ tal que (X, R) é isomorfo a $(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B})$.

Na Seção 10.1, definimos o invariante $D(X, R)$ para relações de equivalência étale. O objetivo desta seção é, dado um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, explorar a relação entre os invariantes $D(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B})$ e $D(\mathfrak{B})$.

Teorema 12.1.1. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli tal que $V = \{v_0\}$ e $(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B})$ sua relação de equivalência AF. Então existe um isomorfismo $\alpha : D(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B}) \rightarrow D(\mathfrak{B})$, tal que*

$$\alpha(D(X_\mathfrak{B}, R_\mathfrak{B})^+) = D(\mathfrak{B})^+,$$

$$\alpha(\langle \mathbf{1} \rangle) = \langle v_0, 0 \rangle.$$

Prova. Para provar o lema precisamos de alguns ingredientes prévios. Fixe $N \geq 1$. Dado um elemento $p \in E_{0,N}$, denotamos por $C(p)$ o cilindro centrado em p e por $C(X_\mathfrak{B}, \mathbb{Z})$ o grupo formado pelas funções contínuas de $X_\mathfrak{B}$ em $\mathbb{Z}$. Definimos o grupo G_N como o grupo gerado pelas funções características $\mathcal{X}_{C(p)}$, onde $p \in E_{0,N}$.

Lema 12.1.2. *Para todo $N \geq 0$, $G_N \subset G_{N+1}$ e*

$$\bigcup_N G_N = C(X_\mathfrak{B}, \mathbb{Z}).$$

Prova. Observe que, por definição, G_N é o subgrupo de $C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z})$ formado pelas funções que são constante nos elementos da partição de $X_{\mathfrak{B}}$ dada por

$$\{C(p) \mid p \in E_{0,N}\}.$$

Pelo item (4) da Proposição 5.1.5, podemos escrever

$$C(p) = \bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)} C(pe),$$

então

$$\mathcal{X}_{C(p)} = \mathcal{X}_{\bigcup_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)} C(pe)} = \sum_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)} \mathcal{X}_{C(pe)}. \quad (12.1.1)$$

Como a equação (12.1.1) vale para todo $\mathcal{X}_{C(p)} \in G_N$ e temos que $\mathcal{X}_{C(pe)} \in G_{N+1}$ para todo $e \in E_N$ tal que $s(e) = r(p)$ obtemos que $G_N \subset G_{N+1}$. Além disso, pela Proposição 10.1.4, temos que

$$\bigcup_N G_N = C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z}).$$

Demonstrando assim o lema. ■

Lembre que definimos o grupo $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ como o grupo gerado pelas funções $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$, onde $\gamma = (U, \gamma(U))$ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto definido em $X_{\mathfrak{B}}$ e as funções π_1 e π_2 são, respectivamente, as projeções na primeira e na segunda coordenada. Observe que $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \subset C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z})$.

Agora, definimos o grupo H_N como o grupo gerado por

$$\{\mathcal{X}_{C(p)} - \mathcal{X}_{C(q)} \mid p, q \in E_{0,N}, r(p) = r(q)\}.$$

Como $p, q \in E_{0,N}$, temos que $H_N \subset G_N$.

Lema 12.1.3. *Para todo $N \geq 0$, $H_N \subset B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$, $H_N \subset H_{N+1}$ e*

$$\bigcup_N H_N = B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Prova. Lembre, que dados dois elementos p e q em $E_{0,N}$, definimos o conjunto

$$\gamma(p, q) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_{\mathfrak{B}} \times X_{\mathfrak{B}} \mid \mathbf{x} \in C(p), \mathbf{y} \in C(q), x_n = y_n, \forall n > N\}.$$

Temos que

$$\pi_1(\gamma(p, q)) = C(p) \quad e \quad \pi_2(\gamma(p, q)) = C(q).$$

Pela Proposição 8.2.2, temos que $\gamma(p, q)$ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto. Então $\mathcal{X}_{C(p)} - \mathcal{X}_{C(q)}$ é um elemento de $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$. Logo, pela definição de H_N , temos que H_N está contido em $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$. Da mesma forma que fizemos na equação (12.1.1), obtemos que

$$\mathcal{X}_{C(p)} - \mathcal{X}_{C(q)} = \sum_{e \in E_{N+1}, s(e)=r(p)=r(q)} \mathcal{X}_{C(pe)} - \mathcal{X}_{C(qe)},$$

obtendo que $H_N \subset H_{N+1}$. Finalmente, pelo Lema 10.2.1, segue que

$$\bigcup_N H_N = B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Concluimos assim a demonstração do lema. ■

Por definição, temos que

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) = C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z}) / B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$$

Então,

$$\bigcup_N G_N / \bigcup_N H_N \cong D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Lema 12.1.4. *Para todo $N \geq 0$, $G_N / H_N \cong \mathbb{Z}V_N$.*

Prova. Considere a função $\alpha_N : G_N \rightarrow \mathbb{Z}V_N$, definida por

$$\alpha_N\left(\sum_{p \in E_{0,N}} a_p \mathcal{X}_{C(p)}\right) = \sum_p a_p r(p).$$

A seguir, veremos que α_N é sobrejetiva e que $\text{Ker}(\alpha_N) = H_N$. Isto implica diretamente o lema.

Afirmção 12.1.5. *A função α_N é sobrejetiva.*

Prova. Considere $v = \sum_{v_n \in \mathbb{Z}V_N} a_n v_n$ um elemento de $\mathbb{Z}V_N$. Como $V_0 = \{v_0\}$, para cada v_n existe pelo menos um caminho de v_0 até v_n , que denotaremos por p_n . Temos que $r(p_n) = v_n$, dessa forma

$$\alpha_N\left(\sum_n a_n \mathcal{X}_{C(p_n)}\right) = \sum_n a_n r(p_n) = \sum_n a_n v_n = v.$$

Portanto a função α_N é sobrejetiva, assim $\alpha_N(G_N) = \mathbb{Z}V_N$. Portanto, α_N é sobrejetiva. ■

Afirmção 12.1.6. *Para todo $N \geq 0$, $\text{Ker}(\alpha_N) = H_N$.*

Dados p e q em $E_{0,N}$, tais que $r(p) = r(q)$ temos que

$$\alpha_N(\mathcal{X}_{C(p)} - \mathcal{X}_{C(q)}) = r(p) - r(q) = 0.$$

Então $H_N \subset \text{Ker}(\alpha_N)$.

Agora, considere um elemento $g \in \text{Ker}(\alpha_N)$, tal que $g \neq 0$. Podemos escrever,

$$g = \sum_{i=1}^k b_i \mathcal{X}_{C(p_i)}, \quad b_i = \pm 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Onde os elementos $p_i \in E_{0,N}$ estão contados com multiplicidade. Temos que

$$\alpha_N(g) = \sum_{i=1}^k b_i r(p_i) = 0.$$

Como os elementos p_i estão contados com multiplicidade, podemos escrever que

$$\sum_{i=1}^k b_i r(p_i) = \sum_{j=1}^{\#V_n} (b_{j_1} + \cdots + b_{j_{l(j)}}) v_j,$$

onde $l(j) = \#\{p_i \in E_{0,n} \mid r(p_i) = v_j\}$. Temos então, que

$$= \sum_{j=1}^{\#V_n} (b_{j_1} + \cdots + b_{j_{l(j)}}) v_j = 0.$$

Para isto ocorrer deve haver, dentre os coeficientes $b_{j_1}, \dots, b_{j_{l(j)}}$, um número igual de coeficientes que são iguais a 1 e a -1 . Desta forma, $g \in H_N$. Concluimos que $\text{Ker}(\alpha_N) = H_N$. ■

Pelo Teorema 9.1.4 existe um isomorfismo entre $G_N/\text{Ker}(\alpha_N)$ e $\text{Im}(\alpha_N)$. Então existe um isomorfismo entre G_N/H_N e $\mathbb{Z}V_N$, que leva $a + H_N$ em $\alpha_N(a)$, que denotaremos por f_N .

Concluimos, assim, a demonstração do Lema 12.1.4. ■

Considere a função $\tilde{\alpha}_N : G_N/H_n \rightarrow G_{N+1}/H_{N+1}$ definida por

$$\tilde{\alpha}_N(a + H_N) = a + H_{N+1}.$$

Lembre que

$$\bigcup_N G_N / \bigcup_N H_n = C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z}) / B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Pela Proposição 11.1.7, existe um isomorfismo

$$\Phi : C(X, \mathbb{Z}) / B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \rightarrow ((G/H)_{\infty}, \tilde{\alpha}_{\infty}),$$

tal que

$$\Phi(a + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})) = \langle a + H_N, N \rangle.$$

Em particular, se $p \in E_{0,N}$, temos que

$$\Phi(\mathcal{X}_{C(p)} + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})) = \langle \mathcal{X}_{C(p)} + H_N, N \rangle.$$

Mas, $\mathcal{X}_{C(p)} + H_N \in G_N/H_N$, então podemos levar $\langle \mathcal{X}_{C(p)} + H_N, N \rangle$ em

$$\langle \alpha_N(\mathcal{X}_{C(p)}), N \rangle = \langle r(p), N \rangle.$$

Então, temos um isomorfismo $\alpha : D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \rightarrow D(\mathfrak{B})$, que satisfaz

$$\alpha(\mathcal{X}_{C(p)}) = \langle r(p), N \rangle.$$

Escrevendo $\mathbf{1} = \sum_{e \in E_1} \mathcal{X}_{C(e)}$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(\langle \mathbf{1} \rangle) &= \left(\sum_{e \in E_1} \mathcal{X}_{C(e)} + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \right) = \sum_{e \in E_1} \langle \alpha_1(\mathcal{X}_{C(e)}), 1 \rangle \\ &= \sum_{e \in E_1} \langle r(e), 1 \rangle \\ &= \left\langle \sum_{e \in E_1} r(e), 1 \right\rangle \\ &= \langle h_{\mathfrak{B}_1}(v_0), 1 \rangle \\ &= \langle v_0, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Agora só falta mostrar que

$$\alpha(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+) = D(\mathfrak{B})^+.$$

Seja $f \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+$, então f é uma função positiva em $C(X_{\mathfrak{B}}, \mathbb{Z})$ e existe $N \geq 1$ tal que

$$f = \sum_{p \in E_{0,N}} a_p \mathcal{X}_{C(p)}, \quad a_p \geq 0.$$

Portanto,

$$\alpha(f) = \alpha\left(\sum_{p \in E_{0,N}} a_p \mathcal{X}_{C(p)}\right) = \left\langle \sum_{p \in E_{0,N}} a_p r(p), N \right\rangle = \sum_{p \in E_{0,N}} a_p \langle r(p), N \rangle.$$

Como $a_p \geq 0$ para todo $p \in E_{0,N}$, $\alpha(f) \in D(\mathfrak{B})^+$ e portanto

$$\alpha(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}))^+ \subset D(\mathfrak{B})^+.$$

Finalmente, considere um elemento de $D(\mathfrak{B})^+$. Podemos representá-lo da

forma $\langle a, N \rangle$ par algum $N \geq 0$ e $a \in \mathbb{Z}V_N^+$. Então

$$a = \sum_{v_n \in V_N} a_n v_n, \quad a_n \geq 0.$$

Para cada $v_n \in V_N$, existe caminho p_n de v_0 até v_n , então

$$\alpha\left(\sum_n a_n \mathcal{X}_{C(p_n)}\right) = \sum_n a_n r(p_n) = \sum_{v_n \in E_{0,N}} a_n v_n.$$

Como $a_n \geq 0$, o elemento $\sum_n a_n \mathcal{X}_{C(p_n)}$ está em $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+$ e portanto

$$D(\mathfrak{B})^+ \subset \alpha(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})).$$

Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

12.2

O invariante para o modelo de Bratteli-Vershik

Lembre da definição de relação orbital associada a um homeomorfismo φ na Definição 2.2.6.

Lembre que definimos no Capítulo 6 um diagrama de Bratteli ordenado $\mathfrak{B} = (V, E, r, s \geq)$ e a função de Bratteli-Vershik $\varphi_{\mathfrak{B}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) = \mathbf{x}_{\min}$ e que leva um elemento $\mathbf{x} = (x_n)_n \neq \mathbf{x}_{\max}$ no elemento $\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_n, x, \dots)$, onde y_n é tal que $r(x_n) = r(y_n)$ e é o elemento seguinte a $x_n \geq$ e $(y_1, \dots, y_{n-1})$ é o único caminho em $E_{\min}$ que liga v_0 a $s(y_n)$. Ao diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e a função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ associamos a relação de equivalência $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$. Neste capítulo determinaremos o grupo de dimensão associado ao espaço $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$.

Nesta seção consideraremos que X é um espaço métrico compacto e totalmente desconexo e $\varphi : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo minimal sem pontos periódicos. Na Seção 8.3 do Capítulo 8, vimos que relação orbital R_{φ} é uma relação de equivalência étale.

Proposição 12.2.1. *O grupo $B(X, R_{\varphi})$ é gerado pelas funções da forma $\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)}$, onde U é um subconjunto clopen de X .*

Prova. Lembre que a ação local associada a função φ é a coleção

$$\Gamma_{\varphi} = \{\varphi^n|_U \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } U \subset X \text{ é clopen}\}.$$

Usando o Lema 10.2.1, temos que $B(X, R_{\varphi})$ é gerado pelas funções $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$, onde $\gamma = \varphi^n|_U = (U, \varphi^n(U))$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e U é clopen. Se $n = 0$, γ é a

função constante igual a 0. Considere o caso $n \geq 1$. Definimos, para $1 \leq i \leq n$

$$U_i := \varphi^i(U).$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} &= \mathcal{X}_{\varphi^n(U)} - \mathcal{X}_U = -(\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi^n(U)}) \\ &= -\sum_{i=0}^n -\mathcal{X}_{\varphi^i(U)} - \mathcal{X}_{\varphi^{i+1}(U)} \\ &= -\sum_{i=0}^n \mathcal{X}_{U_i} - \mathcal{X}_{\varphi(U_i)}. \end{aligned}$$

Como φ é um homeomorfismo, U_i é clopen para todo $1 \leq i \leq n$.

Agora, considere o caso em que $n < 0$. Temos que

$$\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} = \mathcal{X}_{\varphi^n(U)} - \mathcal{X}_{\varphi^{-n}(\varphi^n(U))}$$

Como $-n > 0$, podemos aplicar o caso feito acima, definindo para cada $1 \leq i \leq n$,

$$V_i := \varphi^i(U),$$

que é um conjunto clopen, já que U é clopen e φ é um homeomorfismo. Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Proposição 12.2.2. *Temos que $B(X, R_\varphi) = \{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\}$.*

Prova. Mostraremos, primeiro, que

$$B(X, R_\varphi) \subset \{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\}.$$

Pela Proposição 12.2.1, $B(X, R_\varphi)$ é o conjunto gerado pelas funções $\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)}$, onde U é um subconjunto clopen de X . Então, dado U subconjunto clopen de X , mostraremos que

$$\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)} \in \{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\}.$$

Temos que a função $\mathcal{X}_U \in C(X, \mathbb{Z})$, além disso,

$$\mathcal{X}_U \circ \varphi^{-1} = \mathcal{X}_{\varphi(U)}.$$

Então

$$\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)} = \mathcal{X}_U - \mathcal{X}_U \circ \varphi^{-1}.$$

Portanto,

$$B(X, R_\varphi) \subset \{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\}.$$

Agora, mostraremos que

$$\{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\} \subset B(X, R_\varphi).$$

Seja $f \in C(X, \mathbb{Z})$, o conjunto $\{f^{-1}(\{n\})\}_{n \in f(X)}$ é uma partição de X , logo

$$f = \sum_{n \in f(X)} n \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})}.$$

Então

$$\begin{aligned} f - f \circ \varphi^{-1} &= \sum_{n \in f(X)} n \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})} - \left(\sum_{n \in f(X)} n \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})} \right) \circ \varphi^{-1} \\ &= \sum_{n \in f(X)} n (\mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})} - \mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})} \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_{n \in f(X)} n (\mathcal{X}_{f^{-1}(\{n\})} - \mathcal{X}_{\varphi(f^{-1}(\{n\}))}). \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(\{n\})$ é clopen para todo $n \in f(X)$, $f - f \circ \varphi^{-1} \in B(X, R_\varphi)$. Portanto

$$B(X, R_\varphi) = \{f - f \circ \varphi^{-1} \mid f \in C(X, \mathbb{Z})\}.$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Lembre que um diagrama de Bratteli ordenado é próprio se possui somente um caminho infinito formado somente por arestas máximas e um caminho infinito formado somente por arestas mínimas.

Proposição 12.2.3. *Considere $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ um diagrama de Bratteli ordenado e próprio e $\varphi_{\mathfrak{B}}$ sua função de Bratteli-Vershik. Então*

$$B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) = B(X, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}).$$

Prova. Lembre que podemos ver uma relação de equivalência R em um espaço X como um conjunto de pares

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim_R y\}.$$

Mostraremos primeiro que $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \subset B(X, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$. Usando o Teorema 6.2.1, temos que $R_{\mathfrak{B}} \subset R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$. Além disso, temos que $R_{\mathfrak{B}}$ é um conjunto aberto, Assim, se γ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto em $R_{\mathfrak{B}}$ está contido em $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$.

Como, por definição, $B(X, R)$ é o grupo gerado pelas funções $\mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)}$, onde γ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto, temos que

$$B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \subset B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}).$$

Para mostrar a inclusão contrária, pela Proposição 12.2.1, podemos considerar um subconjunto clopen U e verificar que

$$\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)} \in B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Consideraremos dois casos. O primeiro caso é quando $\mathbf{x}_{\max}$ não está no conjunto U . Então o homeomorfismo parcial $\gamma = \varphi|_U$ é compacto e aberto em $R_{\mathfrak{B}}$ e

$$\mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)} = \mathcal{X}_{\pi_1(\gamma)} - \mathcal{X}_{\pi_2(\gamma)} \in B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}).$$

Agora, suponha que $\mathbf{x}_{\max} \in U$, então $\mathbf{x}_{\max}$ não está em $X \setminus U$, logo $\beta = \varphi|_{X \setminus U}$ é um homeomorfismo parcial compacto e aberto. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_U - \mathcal{X}_{\varphi(U)} &= (1 - \mathcal{X}_{X \setminus U}) - (1 - \mathcal{X}_{X \setminus \varphi(U)}) \\ &= -(\mathcal{X}_{X \setminus U} - \mathcal{X}_{\varphi(X \setminus U)}) \\ &= \mathcal{X}_{\pi_2(\beta)} - \mathcal{X}_{\pi_1(\beta)} \in B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}). \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) = B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$. ■

Como $D(X, R) = C(X, \mathbb{Z})/B(X, R)$, concluimos, pela Proposição 12.2.3, que

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) = D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}).$$

Considere a função $\beta : D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \rightarrow D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$, definida por

$$\beta(f + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})) = f + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}). \quad (12.2.1)$$

Lema 12.2.4. *A função β é um isomorfismo que preserva ordem unitária.*

Prova. Considere f uma ordem unitária em $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+$. Dada $g \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ existe um inteiro positivo n tal que $nf - g \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+$. Temos que

$$\begin{aligned} \beta(nf - g + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})) &= n\beta(f + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})) - \beta(g + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})) \\ &= nf - g + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto $nf - g + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+$. ■

Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ uma digrama de Bratteli ordenado e próprio tal que $V = \{v_0\}$ e $\varphi_{\mathfrak{B}}$ sua função de Bratteli-Vershik. Sejam $\alpha : D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \rightarrow D(\mathfrak{B})$ o isomorfismo do Teorema 12.1.1 e β o isomorfismo definido na equação (12.2.1). Considere a função $\delta : D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ definida por

$$\delta = \alpha \circ \beta. \quad (12.2.2)$$

Afirmção 12.2.5. *A função δ é um isomorfismo.*

Como δ é composição de isomorfismos segue que δ também é um isomorfismo. ■

Afirmção 12.2.6. $\delta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+) = D(\mathfrak{B})^+.$

Considere $f \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+$, temos que f é uma função positiva e $f \in B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$. Como $B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) = B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$, obtemos que

$$\beta(f + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})) = f + B(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \in D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+.$$

Portanto, $\beta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+) \subset D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+$. Analogamente, obtemos que $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \subset \beta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+)$. Assim,

$$\beta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+) = D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+.$$

Então

$$\alpha(\beta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})^+)) = \alpha(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+) = D(\mathfrak{B})^+.$$

Provando, assim, a afirmação. ■

As construções acima podem ser resumidas no seguinte resultado:

Teorema 12.2.7. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ um diagrama de Bratteli ordenado e próprio tal que $V_0 = \{v_0\}$ e $\varphi_{\mathfrak{B}}$ sua função de Bratteli-Vershik. Então a função*

$$\delta : D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \rightarrow D(\mathfrak{B})$$

definida na equação (12.2.1) é um isomorfismo tal que

$$\delta(D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})^+) = D(\mathfrak{B})^+ \quad e \quad \delta(\langle \mathbf{1} \rangle) = \langle v_0, 0 \rangle.$$

Prova. Só falta provar que

$$\delta(\langle \mathbf{1} \rangle) = \langle v_0, 0 \rangle.$$

Por definição de δ temos que,

$$\delta(\langle \mathbf{1} \rangle) = \alpha \circ \beta(\langle \mathbf{1} \rangle).$$

Pela definição da função β , temos que $\beta(\langle \mathbf{1} \rangle) = \mathbf{1}$. Pelo Teorema 12.1.1,

$$\alpha(\langle \mathbf{1} \rangle) = \langle v_0, 0 \rangle.$$

Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

13

O Teorema de Effros-Handelman-Shen

No capítulo 11 vimos como, a partir de um diagrama de Bratteli, obter um grupo abeliano ordenado o qual foi denominado de grupo de dimensão associado ao diagrama de Bratteli.

Agora, queremos determinar quando um grupo abeliano ordenado é o grupo de dimensão de um diagrama de Bratteli. Para isso, usaremos o Teorema de Effros-Handelman-Shen.

13.1

O Teorema de Effros-Handelman-Shen

Precisaremos de alguns conceitos preliminares antes de enunciar o Teorema de Effros-Handelman-Shen.

Definição 13.1.1. Um grupo abeliano ordenado (G, G^+) é dito perfurado se existem um elemento a e um inteiro positivo n tais que $a \notin G^+$ e $na \in G^+$. Caso contrário (G, G^+) é dito sem perfuração.

Definição 13.1.2. Um grupo é dito sem torção se o único elemento que possui ordem finita é o elemento neutro.

Proposição 13.1.3. Se um grupo abeliano ordenado (G, G^+) é sem perfuração então ele é sem torção.

Prova. Considere um elemento $g \in G$ que g possui ordem finita, isto é, existe inteiro $n \geq 1$ tal que $ng = 0$. Temos que ver que g é o elemento neutro. Como $0 \in G^+$, $ng \in G^+$ e, por hipótese, G é sem perfuração segue que g está em G^+ . Já que $n - 1 > 0$, $(n - 1)g \in G^+$. Como $ng = 0$, o elemento $(n - 1)g$ é o inverso de ng . Pela definição de cone positivo, temos que $G^+ \cap (-G^+) = 0$, então só podemos ter $g = 0$. Concluimos que G é livre de torção. ■

Seja X um conjunto, considere os elementos x, y, z, w . Se $x \leq z$, $y \leq z$, $x \leq *9 + w$ e $y \leq w$, dizemos que $x, y \leq z, w$.

Definição 13.1.4. Um grupo abeliano ordenado (G, G^+) satisfaz a interpolação de Riesz se dados quaisquer a, b, c, d em G tais que $a, b \leq c, d$ existe um elemento e em G tal que $a, b \leq e \leq c, d$.

Dado G um grupo ordenado qualquer, nem sempre podemos comparar quaisquer dois elementos. Repare que se G é um grupo ordenado tal que a sua ordem é total, G satisfaz a interpolação de Riesz, já que se $a, b \leq c, d$, podemos tomar o elemento e como sendo o maior entre a e b ou o menor entre c e d .

Considere um conjunto finito F . Dados dois elementos $a = \sum_{f \in F} a_f f$ e $b = \sum_{f \in F} b_f f$ em $\mathbb{Z}F$, por definição, temos que $a \leq b$ se e somente se $b - a \in \mathbb{Z}F^+$. Mas,

$$b - a = \sum_{f \in F} b_f f - \sum_{f \in F} a_f f = \sum_{f \in F} (b_f - a_f) f,$$

então $b - a \in \mathbb{Z}F^+$ se e somente se $b_f - a_f \geq 0$ para todo $f \in F$, isto é, se e somente se $b_f \geq a_f$ para todo $f \in F$. Como $\mathbb{Z}$ é totalmente ordenado, para todo $f \in F$ o maior número entre a_f e b_f pode ser determinado.

Observação 13.1.5. *Considere F um conjunto finito, então o grupo $(\mathbb{Z}F, \mathbb{Z}F^+)$ satisfaz a interpolação de Riesz.*

Prova. Definimos

$$a = \sum_{f \in F} a_f f \in \mathbb{Z}F$$

e similarmente os elementos b, c, d . Se $a, b \leq c, d$, podemos definir

$$e = \sum_{f \in F} \max\{a_f, b_f\} f.$$

Logo, $a, b \leq e \leq c, d$. ■

Proposição 13.1.6. *Considere A um conjunto finito. Então $\mathbb{Z}A$ é enumerável e $(\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+)$ é sem perfuração e satisfaz a interpolação de Riesz.*

Prova. Pela Observação 13.1.5, $(\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+)$ satisfaz a interpolação de Riesz. Como A é finito e $\mathbb{Z}$ é enumerável, segue que $\mathbb{Z}A$ é enumerável. Falta mostrar que $(\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+)$ é sem perfuração. Seja a um elemento de $\mathbb{Z}A$ que não está em $\mathbb{Z}A^+$, então podemos escrever

$$a = \sum_{k=1}^{\ell} i_k a_k, \quad \text{existe } j \text{ tal que } i_j < 0.$$

Para todo inteiro positivo n , temos $ni_j < 0$, então na não está em $\mathbb{Z}A^+$. Portanto $(\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+)$ é sem perfuração. ■

Teorema 13.1.7 (Effros-Handelman-Shen). *Considere um grupo abeliano ordenado (G, G^+) . Existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ tal que $(G, G^+) \cong (D(\mathfrak{B}), D(\mathfrak{B})^+)$ se e somente se (G, G^+) satisfaz as seguintes condições:*

1. G é enumerável;
2. (G, G^+) é sem perfuração;
3. (G, G^+) satisfaz a interpolação de Riesz.

Além disso, se (G, G^+) satisfaz as três condições acima e possui uma ordem unitária u , então V_0 pode ser escolhido como um conjunto unitário $V_0 = \{v_0\}$ e o isomorfismo entre G e $D(\mathfrak{B})$ para levar u em $\langle v_0, 0 \rangle$.

Prova.

Lema 13.1.8. *Seja $\{G_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de grupos, tal que para todo $n \geq 0$, G_n é enumerável, sem perfuração e satisfaz a interpolação de Riesz. Suponha que existe uma sequência de homomorfismos $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\alpha_n : G_{n-1} \rightarrow G_n$, então $(G_\infty, \alpha_\infty)$ é enumerável, sem perfuração e satisfaz a interpolação de Riesz.*

Prova. Podemos identificar o elemento $\langle a, n \rangle$ com o elemento $a \in G_n$. Portanto $(G_\infty, \alpha_\infty)$ é enumerável.

Agora, se $\langle a, n \rangle$ não está em $(G_\infty, \alpha_\infty)^+$, temos que para todo (b, k) tal que $(b, k) \sim (a, n)$, b não está em $\mathbb{Z}G_k^+$. Logo para todo $\ell > 0$, $\ell \langle b, k \rangle$ não está em $(G_\infty, \alpha_\infty)^+$. Portanto, $(G_\infty, \alpha_\infty)$ é sem perfuração.

Por fim, considere os elementos $\langle a_1, n_1 \rangle$, $\langle a_2, n_2 \rangle$, $\langle b_1, m_1 \rangle$ e $\langle b_2, m_2 \rangle$ tais que $\langle a_1, n_1 \rangle, \langle a_2, n_2 \rangle \leq \langle b_1, m_1 \rangle, \langle b_2, m_2 \rangle$. Existe inteiro $N > \max\{n_1, n_2, m_1, m_2\}$ tal que

$$\langle a_i, n_i \rangle = \langle \alpha_{n_i, N}(a_i), N \rangle \quad \text{e} \quad \langle b_i, m_i \rangle = \langle \alpha_{m_i, N}(b_i), N \rangle, \quad \text{para } 1 \leq i \leq 2.$$

Então

$$\langle \alpha_{n_i, N}(a_i), N \rangle \leq \langle \alpha_{m_i, N}(b_i), N \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n_1, N}(a_1), \alpha_{n_2, N}(a_2) \leq \alpha_{m_1, N}(b_1), \alpha_{m_2, N}(b_2)$$

em G_N . Como G_N satisfaz a interpolação de Riesz é possível encontrar $e \in G_N$ tal que

$$\alpha_{n_1, N}(a_1), \alpha_{n_2, N}(a_2) \leq e \leq \alpha_{m_1, N}(b_1), \alpha_{m_2, N}(b_2).$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Como para cada $n \geq 0$, V_n é um conjunto finito, usando a Proposição 13.1.6, temos que as propriedades (1), (2), (3) valem para $\mathbb{Z}V_n$. Pelo Lema 13.1.8, as propriedades também valem para o grupo $(\mathbb{Z}V_\infty, h_\infty)$ que, por definição, é o grupo de dimensão do diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$. Provamos, então a ida do teorema.

13.1.1

O Teorema de Shen

Nesta seção, provaremos o Teorema de Shen que será usado na demonstração da volta do Teorema de Effros-Handelman-Shen.

Proposição 13.1.9. *Considere A um conjunto finito. Então todo subgrupo H de $\mathbb{Z}A$ é finitamente gerado.*

Prova. Definimos $\#A = n$. A prova será por indução em n . No caso $n = 1$, $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}$. Como todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ é cíclico ou $\{0\}$, temos que H possui somente um gerador ou é $\{0\}$. Assuma que o resultado é válido para algum $k \geq 1$. Mostraremos que o lema é verdadeiro para o caso $n = k + 1$. Como A é finito podemos escrever

$$A = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}.$$

Considere H um subgrupo de $\mathbb{Z}A$ e o conjunto $B = \{a_1, \dots, a_k\}$. Definimos o homomorfismo $f : \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}B$ tal que

$$f(n_1a_1 + \dots + n_{k+1}a_{k+1}) = n_1a_1 + \dots + n_ka_k.$$

Temos que $f(H)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}B$. Pela hipótese de indução, $f(H)$ é finitamente gerado. Portanto existe um número finito de geradores, digamos, $f(h_1), \dots, f(h_d)$, onde $h_1, \dots, h_d$ são elementos de H e $d \leq k$.

Lema 13.1.10. $\text{Ker}(f) = \mathbb{Z}a_{k+1}$.

Prova. Seja $n_{k+1}a_{k+1} \in \mathbb{Z}a_{k+1}$, temos que $f(n_{k+1}a_{k+1}) = 0$. Agora seja $n_1a_1 + \dots + n_{k+1}a_{k+1} \in \text{Ker}(f)$, então

$$n_1a_1 + \dots + n_ka_k = 0.$$

Logo, $n_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ e portanto $n_{k+1}a_{k+1} \in \mathbb{Z}a_{k+1}$. ■

Pelo lema acima, $H \cap \text{Ker}(f) \subset \mathbb{Z}a_{k+1}$ é o subgrupo $\{0\}$ ou um grupo cíclico. No primeiro caso, $f|_H$ é um isomorfismo entre H e $f(H)$ e portanto H é

gerado pelos elementos $h_1, \dots, h_d$. Agora, se $H \cap \text{Ker}(f)$ for cíclico, denotamos h_{d+1} como o gerador de $H \cap \text{Ker}(f)$.

O lema a seguir finaliza a demonstração da proposição.

Lema 13.1.11. *H é o subgrupo gerado pelos elementos $h_1, \dots, h_{d+1}$.*

Prova. Seja $h \in H$, então $f(h) \in f(H)$, logo existem inteiros $n_1, \dots, n_d$, tais que

$$f(h) = \sum_{i=1}^d n_i f(h_i).$$

Então,

$$f(h) - \sum_{i=1}^d n_i f(h_i) = 0 \Rightarrow f(h - \sum_{i=1}^d n_i h_i) = 0 \Rightarrow h - \sum_{i=1}^d n_i h_i \in \text{Ker}(f).$$

Portanto, $h - \sum_{i=1}^d n_i h_i \in H \cap \text{Ker}(f)$, então existe inteiro n_{d+1} tal que $h - \sum_{i=1}^d n_i h_i = n_{d+1} h_{d+1}$. Logo $h = \sum_{i=1}^{d+1} n_i h_i$. Verificamos, assim, que o lema é verdadeiro. ■

Proposição 13.1.12. *Seja (G, G^+) um grupo abeliano ordenado que satisfaz a interpolação de Riesz. Considere $a, b_1, \dots, b_d$ elementos de G^+ . Se*

$$a \leq b_1 + b_2 + \dots + b_d,$$

então existem $a_1, \dots, a_d \in G^+$ tais que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_d = a \quad e \quad a_i \leq b_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq d.$$

Prova. A prova é por indução em d . Para o caso $d = 1$ basta tomar $a_1 = a$. Suponha, por indução, que o lema seja verdadeiro para $d = k$. Provaremos que o lema vale para $d = k + 1$. Considere $a, b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ em G^+ satisfazendo a hipótese do lema. Temos que

$$0, a - b_{k+1} \leq a, b_1 + \dots + b_k.$$

Como a interpolação de Riesz é satisfeita, existe c tal que

$$0, a - b_{k+1} \leq c \leq a, b_1 + \dots + b_k. \quad (13.1.1)$$

Em particular,

$$c \leq b_1 + \dots + b_k.$$

Usando a hipótese de indução em c , existem $a_1, \dots, a_k$ em G^+ tais que

$$a_1 + \dots + a_k = c \quad \text{e} \quad a_i \leq b_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Definimos $a_{k+1} = a - c$. Como, pela equação (13.1.1), $c \leq a$ temos que $a_{k+1} \in G^+$. Além disso,

$$a - c \leq a - (a - b_{k+1}) = b_{k+1}.$$

Por fim,

$$a_1 + \dots + a_{k+1} = c + (a - c) = a.$$

Concluimos, assim a demonstração do lema. ■

Teorema 13.1.13 (Shen). *Considere A um conjunto finito e (G, G^+) um grupo abeliano ordenado que é sem perfuração e satisfaz a interpolação de Riesz. Se existe um homomorfismo positivo $\alpha : (\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+) \rightarrow (G, G^+)$ então existem um conjunto finito B e homomorfismos positivos $\eta : (\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+) \rightarrow (\mathbb{Z}B, \mathbb{Z}B^+)$ e $\beta : (\mathbb{Z}B, \mathbb{Z}B^+) \rightarrow (G, G^+)$, tais que*

$$\text{Ker}(\eta) = \text{Ker}(\alpha) \quad \text{e} \quad \beta \circ \eta = \alpha.$$

Prova. Começaremos demonstrando um caso particular do teorema.

Proposição 13.1.14 (Shen). *Considere A um conjunto finito e (G, G^+) um grupo abeliano ordenado, sem perfuração e que satisfaz a interpolação de Riesz. Suponha que existem um homomorfismo positivo*

$$\alpha : (\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+) \rightarrow (G, G^+)$$

e $u \in \mathbb{Z}A$ tal que $\alpha(u) = 0$. Então existem um conjunto finito B e homomorfismos positivos

$$\eta : (\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+) \rightarrow (\mathbb{Z}B, \mathbb{Z}B^+) \quad \text{e} \quad \beta : (\mathbb{Z}B, \mathbb{Z}B^+) \rightarrow (G, G^+)$$

tais que $\eta(u) = 0$ e $\beta \circ \eta = \alpha$.

Prova. Seja $u = \sum_{a \in A} n_a a$. Definimos

$$n(u) = \max\{|n_a| \mid a \in A\} \quad \text{e} \quad m(u) = \#\{a \in A \mid |n_a| = n(u)\}.$$

Consideraremos dois casos. O caso trivial acontece quando $n(u) = 0$. Neste caso $u = 0$. Assim, basta tomar $B = A$, $\beta = \alpha$ e η como a identidade.

Então

$$\eta(u) = \text{id}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta \circ \eta = \alpha \circ \text{id} = \alpha.$$

Agora, considere que $n(u) > 0$. Definimos

$$A^+ = \{a \in A \mid n_a > 0\} \quad \text{e} \quad A^- = \{a \in A \mid n_a < 0\}.$$

Repare que podem existir elementos em A que não estão em A^+ nem em A^- .

Lema 13.1.15. *Se $A^- = \emptyset$ então $\alpha(a) = 0$ para todo $a \in A^+$.*

Prova. Como $A^- = \emptyset$, temos que

$$0 = \alpha(u) = \sum_{a \in A^+} n_a \alpha(a).$$

Como α é um homomorfismo positivo, para cada $a \in A^+$, $\alpha(a) \in G^+$.

Fixe qualquer $a_i \in A^+$,

$$0 = \alpha(a_i - a_i) = \alpha(u) \Rightarrow \alpha(a_i) - \alpha(a_i) = \sum_{a \in A^+} n_a \alpha(a).$$

Então,

$$-\alpha(a_i) = n_{a_i} \alpha(a_i) - \alpha(a_i) + \sum_{a \in A^+, a \neq a_i} n_a \alpha(a).$$

Portanto,

$$-\alpha(a_i) = (n_{a_i} - 1) \alpha(a_i) + \sum_{a \in A^+, a \neq a_i} n_a \alpha(a).$$

Como $n_{a_i} - 1 \geq 0$ e $\alpha(a) \in G^+$ para todo $a \in A^+$, segue que $-\alpha(a_i) \in G^+$. Assim, $\alpha(a_i)$ e $-\alpha(a_i)$ estão em G^+ . Pela definição de cone positivo $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$, temos que $\alpha(a_i) = 0$. Como a_i é qualquer elemento de A^+ , segue que $\alpha(a) = 0$ para todo $a \in A^+$. ■

Provaremos, agora a Proposição 13.1.14 no caso em que $A^{-1} = \emptyset$. Definimos,

$$B = A - A^+, \quad \eta\left(\sum_{a \in A} m_a a\right) = \sum_{a \in B} m_a a \quad \text{e} \quad \beta = \alpha|_{\mathbb{Z}B}.$$

Dessa forma,

$$\beta \circ \eta\left(\sum_{a \in A} m_a a\right) = \alpha|_{\mathbb{Z}B}\left(\sum_{a \in B} m_a a\right) = \sum_{a \in B} m_a \alpha(a).$$

Por outro lado,

$$\alpha\left(\sum_{a \in A} m_a a\right) = \sum_{a \in B} m_a \alpha(a) + \sum_{a \in A^+} m_a \alpha(a) = \sum_{a \in B} m_a \alpha(a).$$

Portanto $\beta \circ \eta = \alpha$. Como $A^- = \emptyset$, temos que

$$u = \sum_{a \in A^+} n_a a.$$

Então, u não possui coeficientes que estão em B , e, portanto, $\eta(u) = 0$.

Provamos a proposição para o caso em que $A^- = \emptyset$.

O caso em que $A^+ = \emptyset$ segue substituindo u por $-u$.

Falta considerar o caso em que A^+ e A^- são ambos não vazios. Para isto, reduziremos ao caso em que A^+ ou A^- é vazio. Como A^+ e A^- é não vazio, $\alpha(u) = 0$ implica que

$$\sum_{a \in A^+} n_a \alpha(a) = \sum_{a \in A^-} (-n_a) \alpha(a) \in G^+.$$

Faremos o caso em que

$$n(u) = \max\{n_a \mid a \in A^+\} \geq \max\{-n_a \mid a \in A^-\}.$$

O caso contrário é feito substituindo u por $-u$.

Fixe a_0 em A^+ tal que $n_{a_0} = n(u)$. Temos que

$$n_{a_0} \alpha(a_0) \leq \sum_{a \in A^+} n_a \alpha(a) = \sum_{a \in A^-} (-n_a) \alpha(a) \leq n_{a_0} \sum_{a \in A^-} \alpha(a).$$

Portanto,

$$\alpha(a_0) \leq \sum_{a \in A^-} \alpha(a).$$

Como, por hipótese, (G, G^+) é sem perfurações, temos que $\alpha(a_0)$ e $\sum_{a \in A^-} \alpha(a) \in G^+$. Agora, usando a interpolação de Riesz e a Proposição 13.1.12 para

$$a = a_0 \text{ e } b_i = \alpha(a) \text{ onde } a \in A^- \text{ e } 1 \leq i \leq \#(A^-),$$

encontramos para cada $a \in A^-$ um $g_a \in G^+$ tal que $g_a \leq \alpha(a)$ e

$$\alpha(a_0) = \sum_{a \in A^-} g_a.$$

Considere uma cópia conjunto A^- denotada da seguinte forma:

$$C_A = \{c_a \mid c_a = a, \text{ onde } a \in A^-\}.$$

Note que se $a_1 \neq a_2$, então $c_{a_1} \neq c_{a_2}$. Definimos o conjunto auxiliar

$$B_1 = (A - \{a_0\}) \cup C_A$$

e as funções $\eta_1 : \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}B_1$ e $\beta_1 : \mathbb{Z}B_1 \rightarrow G$ como se segue:

$$\eta_1(a) = \begin{cases} \sum_{a \in A^-} c_a, & a = a_0, \\ a, & a \in A \setminus (\{a_0\} \cup A^-), \\ a + c_a, & a \in A^- \end{cases}$$

e

$$\beta_1(a) = \begin{cases} \alpha(a), & a \in A \setminus \{a_0\}, \\ \alpha(a) - g_a, & a \in A^-, \\ g_a, & \text{se } a = c_a. \end{cases}$$

Denotaremos o conjunto $A \setminus (\{a_0\} \cup A^-)$ por A'

Lema 13.1.16. *As funções η_1 e β_1 são homomorfismos positivos.*

Prova. Mostraremos que η_1 é um homomorfismo positivo. A demonstração de que β_1 é um homomorfismo positivo é análoga. Sejam dois elementos $x_1 = \sum_{a \in A} m_a^1 a$ e $x_2 = \sum_{a \in A} m_a^2 a$. Temos que

$$\begin{aligned} \eta_1(x_1 + x_2) &= \eta_1\left(\sum_{a \in A} (m_a^1 + m_a^2)a\right) \\ &= (m_{(a_0)}^1 + m_{(a_0)}^2)\eta_1(a_0) + \sum_{a \in A'} (m_a^1 - m_a^2)\eta_1(a) \\ &\quad + \sum_{a \in A^-} (m_a^1 + m_a^2)\eta_1(a) \\ &= m_{(a_0)}^1\eta_1(a_0) + \sum_{a \in A'} m_a^1\eta_1(a) + \sum_{a \in A^-} m_a^1\eta_1(a) \\ &\quad + m_{(a_0)}^2\eta_1(a_0) + \sum_{a \in A'} m_a^2\eta_1(a) + \sum_{a \in A^-} m_a^2\eta_1(a) \\ &= \eta_1(x_1) + \eta_1(x_2). \end{aligned}$$

Portanto, η_1 é um homomorfismo. Mostraremos que η_1 é positivo. Considere um elemento $x = \sum_{a \in A} m_a a \in \mathbb{Z}A^+$. Por definição de $\mathbb{Z}A^+$, $m_a \geq 0$ para todo $a \in A$, temos que

$$\eta_1(x) = \sum_{a \in A, a \neq a_0} m_a a + \sum_{a \in A^-} (m_{a_0} + m_a)c_a.$$

Como $m_a \geq 0$ e $m_{a_0} + m_a > 0$ para todo $a \in A$, temos que $\eta_1(x) \in \mathbb{Z}B_1^+$. Portanto, η_1 é um homomorfismo positivo. ■

Lema 13.1.17. $\beta_1 \circ \eta_1 = \alpha$.

Prova. Considere $x = \sum_{a \in A} m_a a$ um elemento de $\mathbb{Z}A$. Temos que

$$\begin{aligned}
 \beta_1 \circ \eta_1 \left(\sum_{a \in A} m_a a \right) &= \beta_1 \left(m_{a_0} \sum_{a \in A^-} c_a + \sum_{a \in A'} m_a a + \sum_{a \in A^-} m_{a_0} (a + c_a) \right) \\
 &= \beta_1 \left(\sum_{a \in A^-} m_a a + \sum_{a \in A'} m_a a + \sum_{a \in A^-} (m_a + m_{a_0}) c_a \right) \\
 &= \sum_{a \in A^-} m_a (\alpha(a) - g_a) + \sum_{a \in A'} m_a \alpha(a) + \sum_{a \in A^-} (m_a + m_{a_0}) g_a \\
 &= \sum_{a \in A^-} (m_a \alpha(a) - m_a g_a + m_a g_a + m_{a_0} g_a) + \sum_{a \in A'} m_a \alpha(a) \\
 &= \sum_{a \in A^-} m_a \alpha(a) + \sum_{a \in A^-} m_{a_0} g_a + \sum_{a \in A'} m_a \alpha(a) \\
 &= \sum_{a \in A^-} m_a \alpha(a) + m_{a_0} \alpha(a_0) + \sum_{a \in A'} m_a \alpha(a) \\
 &= \sum_{a \in A} m_a \alpha(a) = \alpha(x).
 \end{aligned}$$

Provamos, assim, o lema. ■

Agora, a expectativa é que encontrássemos que $\eta_1(u) = 0$. Porém, isso não irá ocorrer necessariamente. Veremos qual é a solução.

Lema 13.1.18. *Considere a função η_1 , o elemento u e os números $m(u)$ e $n(u)$. Se verifica que $n(\eta_1(u)) \leq n(u)$. Se $n(\eta_1(u)) = n(u)$, então $m(\eta_1(u)) < m(u)$.*

Prova. Temos que

$$\begin{aligned}
 \eta_1(u) &= \eta_1 \left(n_{a_0} a_0 + \sum_{a \in A^+, a \neq a_0} n_a a + \sum_{a \in A^-} n_a a \right) \\
 &= \left(n_{a_0} \eta_1(a_0) + \sum_{a \in A^+, a \neq a_0} n_a \eta_1(a) + \sum_{a \in A^-} n_a \eta_1(a) \right) \\
 &= \left(n_{a_0} c_a + \sum_{a \in A^+, a \neq a_0} n_a a + \sum_{a \in A^-} n_a (a + c_a) \right) \\
 &= \sum_{a \in A^+ \cup A^-, a \neq a_0} n_a a + \sum_{a \in A^-} (n_a + n_{a_0}) c_a.
 \end{aligned}$$

Repare que não há mais o termo a_0 nem o coeficiente n_{a_0} . Analisaremos os termos que restaram. Os coeficientes do primeiro somatório não se alteraram. Os coeficientes do segundo somatório são n_a, n_{a_0} , onde $a \in A^-$. Como, neste caso, $a \in A^-$ e $n(u) = n_{a_0}$, temos que $0 > n_a \geq -n_{a_0}$. Então para cada c_a , temos que $0 \leq n_a + n_{a_0} < n_{a_0}$. Portanto $n(\eta_1(u)) \leq n(u)$. Além disso, como não há mais o termo a_0 , então, se $n(\eta_1(u)) = n(u)$ segue que $m(\eta_1(u)) < m(u)$. ■

Definimos, $\beta_0 = \alpha$ e indutivamente, o conjunto B_i e os homomorfismo positivos $\eta_i : (\mathbb{Z}B_{i-1}, \mathbb{Z}B_{i-1}^+) \rightarrow (\mathbb{Z}B_i, \mathbb{Z}B_i^+)$, $\beta_k : (\mathbb{Z}B_i, \mathbb{Z}B_i^+) \rightarrow (G, G^+)$, tais que

$$\beta_i \circ \eta_k = \beta_{k-1}.$$

Pelo Lema 13.1.18,

$$n(\eta_i \circ \cdots \circ \eta_1(u)) \leq n(u).$$

Então, existe $k > 0$, tal que

$$n(\eta_i \circ \cdots \circ \eta_1(u)) = 0,$$

ou na etapa k , temos que A^+ ou A^- é o conjunto vazio. Em qualquer um dos casos, obtemos que

$$\eta_i \circ \cdots \circ \eta_1(u) = 0.$$

Definimos, então

$$B = B_k, \quad \eta = \eta_k \circ \cdots \circ \eta_1 \quad \text{e} \quad \beta = \beta_k.$$

Então,

$$\eta(u) = \eta_k \circ \cdots \circ \eta_1(u) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \beta \circ \eta &= \beta_k \circ (\eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \cdots \circ \eta_1) = (\beta_k \circ \eta_k) \circ \eta_{k-1} \circ \cdots \circ \eta_1 \\ &= (\beta_{k-1} \circ \eta_{k-1}) \circ \eta_{k-2} \circ \cdots \circ \eta_1 = \cdots = \beta_1 \circ \eta_1 = \alpha. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Estamos prontos para fazer a demonstração do Teorema 13.1.13.

Como $\text{Ker}(\alpha)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}A$ e A é um conjunto finito, pela Proposição 13.1.9, $\text{Ker}(\alpha)$ é finitamente gerado. Observe que se $\text{Ker}(\alpha)$ é gerado somente por um elemento u , o problema já está resolvido. Suponha que os geradores de $\text{Ker}(\alpha)$ sejam $u_1, \dots, u_k$. Como α é um homomorfismo positivo e $\alpha(u_1) = 0$, usando a Proposição 13.1.14 encontramos conjunto B_1 e homomorfismo positivos $\eta_1 : \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}B_1$ e $\beta_1 : \mathbb{Z}B_1 \rightarrow G$ tais que $\beta_1 \circ \eta_1 = \alpha$ e $\eta_1(u_1) = 0$.

Lema 13.1.19. *Para cada $1 < i \leq k$, existem conjuntos B_i e homomorfismos positivos $\eta_i : \mathbb{Z}B_{i-1} \rightarrow \mathbb{Z}B_i$ e $\beta_i : \mathbb{Z}B_i \rightarrow G$ tais que $\beta_i \circ \eta_i = \beta_{i-1}$ e*

$$\eta_i(\eta_{i-1} \circ \cdots \circ \eta_1(u_i)) = 0.$$

Em particular, se $j < i$

$$\eta_i(\eta_{i-1} \circ \cdots \circ \eta_1(u_j)) = 0.$$

Prova. A demonstração será por indução. A função β_1 é um homomorfismo positivo positivo. Além disso,

$$\beta_1(\eta_1(u_2)) = \alpha(u_2) = 0,$$

já que, por hipótese, u_2 é um dos geradores de $\text{Ker}(\alpha)$. Usando a Proposição 13.1.14, existem conjunto B_2 e homomorfismo positivos $\eta_2 : \mathbb{Z}B_1 \rightarrow \mathbb{Z}B_2$ e $\beta_2 : \mathbb{Z}B_2 \rightarrow G$ tais que

$$\beta_2 \circ \eta_2 = \beta_1 \quad \text{e} \quad \eta_2 \circ \eta_1(u_2) = 0.$$

Suponha que para algum $1 < i < k$ já definimos o conjunto B_i e os homomorfismos $\eta_i : \mathbb{Z}B_{i-1} \rightarrow \mathbb{Z}B_i$ e $\beta_i : \mathbb{Z}B_i \rightarrow G$ tais que

$$\beta_i \circ \eta_i = \beta_{i-1} \quad \text{e} \quad \eta_i \circ \cdots \circ \eta_1(u_i) = 0.$$

Temos que β_i é um homomorfismo positivo e que

$$\beta_i \circ (\eta_i \circ \eta_{i-1} \circ \cdots \circ \eta_1(u_i)) = \beta_{i-1} \circ (\eta_{i-1} \circ \cdots \circ \eta_1(u_i)) = \cdots = \alpha(u_i) = 0.$$

Usando a Proposição 13.1.14, encontramos conjunto B_{i+1} e homomorfismos positivos $\eta_{i+1} : \mathbb{Z}B_i \rightarrow \mathbb{Z}B_{i+1}$ e $\beta_{i+1} : \mathbb{Z}B_{i+1} \rightarrow G$ tais que

$$\beta_{i+1} \circ \eta_{i+1} = \beta_i \quad \text{e} \quad \eta_{i+1} \circ \cdots \circ \eta_1(u_{i+1}) = 0.$$

concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}A^+) & \xrightarrow{\eta_1} & (\mathbb{Z}B_1, \mathbb{Z}B_1^+) & \xrightarrow{\eta_2} & \cdots & \xrightarrow{\eta_k} & (\mathbb{Z}B_k, \mathbb{Z}B_k^+) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta_1 & & & & \downarrow \beta_k \\ (G, G^+) & \xlongequal{\quad} & (G, G^+) & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & (G, G^+) \end{array}$$

Figura 13.1: Diagrama comutativo

Definimos, então, $B = B_k$, $\eta = \eta_k \circ \cdots \circ \eta_1$ e $\beta = \beta_k$.

Lema 13.1.20. $\beta \circ \eta = \alpha$.

Prova. A demonstração será por indução em k . O caso $k = 1$ segue diretamente do Lema 13.1.14. Suponha, por indução que a afirmação seja verdadeira para $k = n$. Mostraremos que a afirmação é verdadeira para $k = n + 1$. Considere a composição

$$\begin{aligned}\beta \circ \eta &= \beta_{n+1} \circ (\eta_{n+1} \circ \eta_n \circ \cdots \circ \eta_1) = (\beta_{n+1} \circ \eta_{n+1}) \circ (\eta_n \circ \cdots \circ \eta_1) \\ &= \beta_n \circ \eta_n \circ \cdots \circ \eta_1 = \alpha.\end{aligned}$$

Finalizamos a demonstração do lema. ■

Falta mostrar que $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\eta)$. Como $\beta \circ \eta = \alpha$, temos que $\text{Ker}(\eta) \subset \text{Ker}(\alpha)$. Agora mostraremos a inclusão contrária. O grupo $\text{Ker}(\alpha)$ é gerado pelos elementos u_i , $1 \leq i \leq k$ e pela definição da função η cada um desses elementos estão em $\text{Ker}(\eta)$, segue que $\text{Ker}(\alpha) \subset \text{Ker}(\eta)$. Portanto, assim que $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\eta)$. Concluimos assim a demonstração do lema. ■

13.1.2

Fim da prova do Teorema de Effros-Handelman-Shen

Finalmente, estamos prontos para concluir a demonstração do Teorema 13.1.7. Falta mostrar a volta do teorema.

Suponha que (G, G^+) satisfaz a hipótese do teorema. Como, por hipótese, G é enumerável e $G^+ \subset G$, temos que G^+ também é enumerável. Consideramos uma enumeração

$$G^+ \setminus \{0\} = \{g_0, g_1, \dots\}.$$

Definiremos, indutivamente, sequências de conjuntos finitos $\{A_n\}_{n \geq 0}$, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, tais que $B_{n-1} \subset A_n$ e sequências de homomorfismos positivos $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ e $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ onde

$$\begin{aligned}\alpha_n &: (\mathbb{Z}A_n, \mathbb{Z}A_n^+) \rightarrow (G, G^+), \\ \beta_n &: (\mathbb{Z}B_n, \mathbb{Z}B_n^+) \rightarrow (G, G^+), \\ \eta_n &: (\mathbb{Z}A_n, \mathbb{Z}A_n^+) \rightarrow (\mathbb{Z}B_n, \mathbb{Z}B_n^+), \\ \theta_n &: (\mathbb{Z}B_{n-1}, \mathbb{Z}B_{n-1}^+) \rightarrow (\mathbb{Z}A_n, \mathbb{Z}A_n^+).\end{aligned}$$

Tais que

$$\beta_n \circ \eta_n = \alpha_{n-1} \quad \text{e} \quad \alpha_n \circ \theta_{n-1} = \beta_{n-1}.$$

Considere uma sequência de elementos distintos $\{a_n\}_{n \geq 0}$. Definimos

$$A_0 = B_0 := \{a_0\}, \quad \eta_0 = \text{id} \quad \text{e} \quad \alpha_0(ia_0) = \beta_0(ia_0) = ig_0, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Como $g_0 \in G^+$, α_0 e β_0 são positivas. Pela definição, α_0 é uma função injetiva e portanto, $\text{Ker}(\alpha_0) = \text{Ker}(\eta_0)$. Além disso, $\beta_0 \circ \eta_0 = \alpha_0$.

Agora suponha que $A_k, B_k, \beta_k, \eta_k$ estão definidos para todo $0 \leq k \leq n$, tais que $B_{i-1} \subset A_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Também assuma que definimos as funções θ_k como a inclusão de $\mathbb{Z}B_{k-1}$ em $\mathbb{Z}A_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Definimos

$$A_{n+1} := \{a_{n+1}\} \cup B_n$$

e a função θ_{n+1} como a inclusão de $\mathbb{Z}B_n$ em $\mathbb{Z}A_{n+1}$. Considere a função $\alpha_{n+1} : (\mathbb{Z}A_{n+1}, \mathbb{Z}A_{n+1}^+) \rightarrow (G, G^+)$, definida por

$$\alpha_{n+1}(ia_{n+1} + \sum_{b \in B_n} i_b b) = ig_{n+1} + \sum_{b \in B_n} i_b \beta_n(b).$$

Como $g_{n+1} \in G^+$ e β_n é um homomorfismo positivo, temos que α_{n+1} é um homomorfismo positivo. Usando o Teorema 13.1.13, obtemos um conjunto B_{n+1} e homomorfismos positivos $\beta_{n+1} : \mathbb{Z}B_{n+1} \rightarrow G$ e $\eta_{n+1} : \mathbb{Z}A_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}B_{n+1}$ tais que $\beta_{n+1} \circ \eta_{n+1} = \alpha_{n+1}$ e que $\text{Ker}(\eta_{n+1}) = \text{Ker}(\beta_n)$. Desta forma, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z}A_0 & \xrightarrow{\eta_0} & \mathbb{Z}B_0 & \xrightarrow{\theta_0} & \mathbb{Z}A_1 & \xrightarrow{\eta_1} & \mathbb{Z}B_1 & \xrightarrow{\theta_1} & \mathbb{Z}A_2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \\ G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & \cdots \end{array}$$

Figura 13.2: Diagrama comutativo

Para melhor compreensão, definimos as sequências auxiliares de conjuntos $\{C_n\}_{n \geq 0}$, onde $C_{2n} = A_n$ e $C_{2n+1} = B_n$ para todo $n \geq 0$ e de funções $\{f_n\}_{n \geq 0}$, onde $f_{2n} = \eta_n$ e $f_{2n+1} = \theta_n$. Obtemos que para todo $n \geq 1$ a função $f_n : \mathbb{Z}C_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}C_n$ é um homomorfismo positivo. Usando o Teorema 11.2.2, temos que existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$, onde $V = \{C_n\}_{n \geq 0}$ e $h_n = f_n$ para todo $n \geq 0$.

Por definição de grupo de dimensão, o conjunto (C_∞, f_∞) é o grupo de dimensão do diagrama $\mathfrak{B}$, que denotamos por $D(\mathfrak{B})$. Lembre que $D(\mathfrak{B})$ é

formado por todas as classes de equivalência da relação dada por

$$(a, n) \sim (b, m) \text{ se e só se existem } k, \ell \in \mathbb{Z}^+ \text{ tais que } f^k(a) = f^\ell(b).$$

Para finalizar a demonstração falta mostrar que (G, G^+) e $(D(\mathfrak{B}), D(\mathfrak{B})^+)$ são isomorfos.

Definimos a função $H : D(\mathfrak{B}) \rightarrow G$, por

$$\begin{aligned} H(\langle a, 2n \rangle) &= \alpha_n(a), \quad \text{para } a \in \mathbb{Z}C_{2n} = \mathbb{Z}A_n, \\ H(\langle b, 2n+1 \rangle) &= \beta_n(b), \quad \text{para } b \in \mathbb{Z}C_{2n+1} = \mathbb{Z}B_n. \end{aligned}$$

Como para todo $n \geq 0$, α_n e β_n são homomorfismos positivos, H também é positivo.

Afirmção 13.1.21. *Seja $a \in \mathbb{Z}A_n$ então*

$$\langle a, 2n \rangle = \langle \eta_n(a), 2n \rangle.$$

Prova. Por definição, $f_{n+1} = \eta_n$ e $\eta_n(a) \in \mathbb{Z}B_n$ então

$$\langle a, 2n \rangle = \langle \eta_n(a), 2n \rangle.$$

Verificamos, então, que a afirmação é verdadeira ■

Afirmção 13.1.22. *Seja $b \in \mathbb{Z}B_n$ então*

$$\langle b, 2n+1 \rangle = \langle \theta_n(b), 2n+2 \rangle.$$

Prova. Como, por definição, $f_{n+1} = \theta_n$ e θ_n é a inclusão de $\mathbb{Z}B_n$ em $\mathbb{Z}A_{n+1}$, temos que $\theta_n(b) \in \mathbb{Z}A_{n+1}$ e

$$\langle b, 2n+1 \rangle = \langle \theta_n(b), 2n+2 \rangle.$$

Provando, assim, a afirmação. ■

Mostraremos agora que H é bijetiva. Para a injetividade, veremos que $\text{Ker}(H) = \{0\}$. Pela Afirmção 13.1.22, é suficiente considerar o caso em que para algum $a \in \mathbb{Z}A_n$, $H(\langle a, 2n \rangle) = 0$. Pela definição da função H , temos que

$$H(\langle a, 2n \rangle) = \alpha_n(a),$$

logo

$$a \in \text{Ker}(\alpha_n) = \text{Ker}(\eta_n).$$

Então, pela Afirmação 13.1.21

$$\langle a, 2n \rangle = \langle \eta_n(a), 2n + 1 \rangle = 0.$$

Portanto, H é injetiva.

Para mostrar que a função H é sobrejetiva é suficiente mostrar que $G^+ \subset H(D(\mathfrak{B})^+)$, já que pela definição de cone positivo, temos que $G = G^+ - G^+$. Considere $g \in G^+$, temos que g é igual a 0 ou é igual a g_n , para algum $n \geq 0$. Se g é igual a 0, temos que $H(0) = g$. Caso $g \neq 0$, então

$$g = g_n = \alpha_n(a_n) = h(\langle a_n, 2n \rangle).$$

Como $a_n \in \mathbb{Z}A_n^+$, em qualquer um dos casos temos que g é a imagem de algum elemento de $D(\mathfrak{B})^+$. Concluimos que H é sobrejetiva, logo um isomorfismo.

Usando que $G^+ \subset h(D(\mathfrak{B})^+)$ e que H é positivo, temos que H é um isomorfismo ordenado. Portanto (G, G^+) e $(D(\mathfrak{B}), D(\mathfrak{B})^+)$ são isomorfos. Concluimos, assim, a demonstração do Teorema de Effros-Handelman-Shen. ■

Sejam R e Q relações de equivalência étale nos conjuntos de Cantor X e Y , respectivamente. Pelo Teorema 10.2.2, temos que se (X, R) e (Y, Q) são equivalentes então os invariantes $D(X, R)$ e $D(Y, Q)$ são isomorfos. O Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger determina quando, para relações de equivalência AF os invariantes são invariantes completos, isto é, (X, R) e (Y, Q) são equivalentes se, e só se, $D(X, R)$ e $D(Y, Q)$ são isomorfos.

14.1

Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger

Antes de enunciarmos o Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger precisamos definir um entrelaçamento entre dois diagramas de Bratteli.

De forma geral, um entrelaçamento entre os diagramas de Bratteli $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ é um diagrama de Bratteli $\mathcal{Q}$ que quando considerada a subsequência dos níveis pares se transforma no diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ e quando considerada a subsequência dos níveis ímpares se transforma no diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$.

Definição 14.1.1. *Seja $\mathfrak{B} = (V = \{V_n\}_{n \geq 0}, E = \{E_n\}_{n \geq 1}, r = r_{nn \geq 1}, s = \{s_n\}_{n \geq 1})$ um diagrama de Bratteli. Definimos $E_{m,n}(v_i^n, v_j^m)$ como o conjunto formado por todos os caminhos que ligam v_i^n a v_j^m .*

Definição 14.1.2 (Entrelaçamento). *Considere dois diagramas de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$. Um entrelaçamento é formado por uma sequência crescente de inteiros $\{n_m\}_{m \geq 0}$ com $n_0 = 0$ e $n_1 = 1$, uma sequência de conjuntos finitos não vazios $\{A_m\}_{m \geq 1}$ e sequências de funções $\{p_m\}_{m \geq 1}$ e $\{q_m\}_{m \geq 1}$, tais que a coleção*

$$(Q = \{Q_m\}_{m \geq 0}, A = \{A_m\}_{m \geq 1}, p = \{p_m\}_{m \geq 1}, q = \{q_m\}_{m \geq 1})$$

forma um diagrama Bratteli, onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= F_1 \\
 Q_m &= V_{n_m}, \quad \text{se } m \text{ é par,} \\
 Q_m &= W_{n_m}, \quad \text{se } m \text{ é ímpar} \\
 p_m : A_m &\rightarrow W_{n_{m-1}}, \quad q_m : A_m \rightarrow V_{n_m} \quad \text{se } m \text{ é par,} \\
 p_m : A_m &\rightarrow V_{n_{m-1}}, \quad q_m : A_m \rightarrow W_{n_m} \quad \text{se } m \text{ é ímpar,}
 \end{aligned}$$

que verificam as seguintes condições:

1. Para cada $m \geq 0$ par e cada

$$(v_i^{n_m}, v_j^{n_{m+2}}) \in V_{n_m} \times V_{n_{m+2}}$$

existe uma bijeção entre os conjuntos $A_{m,m+2}(v_i^{n_m}, v_j^{n_{m+2}})$ e $E_{n_m, n_{m+2}}(v_i^{n_m}, v_j^{n_{m+2}})$,

2. Para cada $m \geq 0$ ímpar e cada

$$(w_i^{n_m}, w_j^{n_{m+2}}) \in W_{n_m} \times W_{n_{m+2}}$$

existe uma bijeção entre os conjuntos $A_{m,m+2}(w_i^{n_m}, w_j^{n_{m+2}})$ e $F_{n_m, n_{m+2}}(w_i^{n_m}, w_j^{n_{m+2}})$.

Denotaremos um entrelaçamento entre dois diagramas de Bratteli $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ por $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{T})$.

Considere o diagrama de Bratteli $\mathfrak{E}$ apresentado na Figura 14.1.

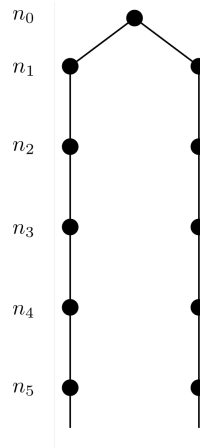


Figura 14.1: Diagrama de Bratteli $\mathfrak{E}$.

Temos que $\mathfrak{E} = \Omega(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$. Considere o diagrama de Bratteli gerado passando $\mathfrak{E}$ à subsequência dos níveis pares, que denotaremos por $\mathfrak{B}$ e o

diagrama de Bratteli gerado passando $\mathfrak{E}$ passando a sequência dos níveis ímpares, que denotaremos por $\mathfrak{T}$, temos que $\mathfrak{B} = \mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. A Figura 14.2 representa $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{T})$. O diagrama de Bratteli formado pelas arestas azuis é o diagrama $\mathfrak{B}$ e o formado pelas arestas vermelhas é o diagrama $\mathfrak{T}$.

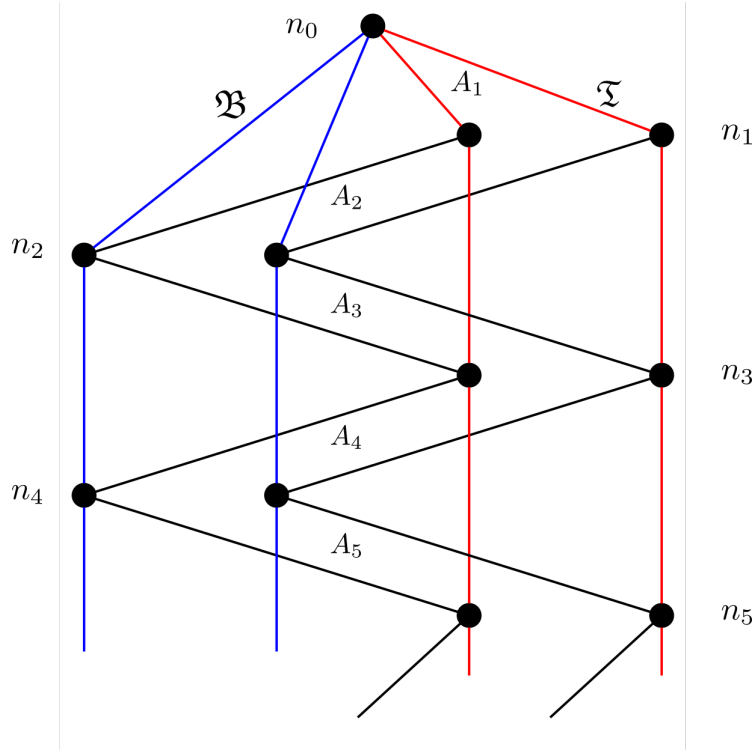


Figura 14.2: $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{T})$.

Iremos determinar quando existe um entrelaçamento entre dois diagramas de Bratteli.

Teorema 14.1.3 (Elliott-Bratteli-Krieger). *Considere os diagramas de Bratteli $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ e $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ e suas respectivas relações de equivalência AF , $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um entrelaçamento entre $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$.*
2. *Existe um isomorfismo entre $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$.*
3. *Existe um isomorfismo α ordenado entre os grupos de dimensão $D(\mathfrak{B})$ e $D(\mathfrak{T})$ tal que $\alpha(\langle v_0, 0 \rangle) = \langle w_0, 0 \rangle$.*

Prova. Mostraremos que as afirmações são equivalentes.

(1) $\Rightarrow$ (2): Seja Ω um entrelaçamento entre $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$. Portanto, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ pode ser obtidos passando Ω a uma subsequência. Pelo Teorema 8.2.11, $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \cong (X_{\Omega}, R_{\Omega})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}}) \cong (X_{\Omega}, R_{\Omega})$. Portanto $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \cong (X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Esta implicação é exatamente o conteúdo do Teorema 10.2.2.

(3) $\Rightarrow$ (1): Para produzir um entrelaçamento devemos definir uma sequência crescente de inteiros $\{n_m\}_{m \geq 0}$ e uma sequência de conjuntos $\{A_m\}_{m \geq 1}$, que será a coleção de arestas do diagrama de Bratteli do entrelaçamento, satisfazendo as propriedades da definição. Lembre que para $\ell < k$, a função $h_{\mathfrak{B}_{\ell,k}} : \mathbb{Z}V_\ell \rightarrow \mathbb{Z}V_k$ é definida por

$$h_{\mathfrak{B}_{\ell,k}} = h_{\mathfrak{B}_k} \circ h_{\mathfrak{B}_{k-1}} \circ \cdots \circ h_{\mathfrak{B}_m} \circ h_{\mathfrak{B}_{m+1}},$$

onde para cada $n \geq 1$ a função $h_{\mathfrak{B}_n} : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n$, é tal que

$$h_{\mathfrak{B}_n}(v_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{\#V_n} \#(s^{-1}\{v_i^{n-1}\} \cap r^{-1}\{v_j^n\}) v_j^n.$$

Por definição, a função $h_{\mathfrak{B}_{n_m, n_{m+2}}}$ determina o número de caminhos entre um vértice do nível n_m e cada vértice no nível n_{m+2} . Analogamente, para a função $h_{\mathfrak{T}_{n_m, n_{m+2}}}$. Portanto, encontrar a sequência de conjuntos $\{A_m\}_{m \geq 0}$ satisfazendo os itens (1) e (2) da definição de entrelaçamento é o mesmo que demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 14.1.4. *Existe uma sequência crescente de números naturais $\{n_m\}_{m \geq 0}$ e uma sequência de homomorfismos positivos $\{f_m\}_{m \geq 1}$, onde*

$$\begin{aligned} f_m : \mathbb{Z}V_{n_{m-1}} &\rightarrow \mathbb{Z}W_{n_m}, & \text{se } m \text{ é ímpar,} \\ f_m : \mathbb{Z}W_{n_{m-1}} &\rightarrow \mathbb{Z}V_{n_m}, & \text{se } m \text{ é par,} \end{aligned}$$

tais que

- Se m é ímpar, se verifica que $f_m \circ f_{m-1} = h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1}, n_{m+1}}}$ e que $\langle f_m(v), n_m \rangle = \alpha(\langle v, n_m \rangle)$, para todo $v \in V_{n_{m-1}}$.
- Se m é par, se verifica que $f_m \circ f_{m-1} = h_{\mathfrak{B}_{n_{m-1}, n_{m+1}}}$ e que $\langle f_m(w), n_m \rangle = \alpha^{-1}(\langle w, n_m \rangle)$, para todo $w \in W_{n_{m-1}}$.

Assuma que a proposição é verdadeira. Seja $m \geq 1$ e ímpar. Considere $v \in \mathbb{Z}V_{n_{m-1}}$, então $f_m(v) \in \mathbb{Z}W_{n_m}$. Podemos, então, escrever que

$$f_m(v) = \sum_{w^{n_m} \in W_{n_m}} a_{n_m} w^{n_m}, \quad a_{n_m} \geq 0.$$

Definimos, então que existem a_{n_m} arestas ligando o vértice v ao vértice w^{n_m} . Dessa forma, $f_m \circ f_{m-1}$ determina o número de arestas que ligam um vértice de $\mathbb{Z}W_{n_{m-1}}$ aos vértices de $\mathbb{Z}W_{n_{m+1}}$. Como pelo Lema 14.1.4,

$$f_m \circ f_{m-1} = h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1}, n_{m+1}}},$$

a condição 2 é satisfeita. Se m é par obteremos que a condição 1 é satisfeita.

Dito isto, provaremos a Proposição 14.1.4.

Prova. Construiremos as seqüências indutivamente. Começamos definindo $n_0 = 0, n_1 = 1$ e $f_1 = h_{\mathfrak{T}_0}$. Como $W_0 = V_0$, temos que $f_1 : \mathbb{Z}V_0 \rightarrow \mathbb{Z}W_1$. Agora, suponha por indução que já construímos $n_0, n_1, \dots, n_m$, e a seqüência de homomorfismo positivos $f_1, f_2, \dots, f_m$.

Suponha que m é par. Encontraremos n_{m+1} e o homomorfismo positivo f_{m+1} .

Lema 14.1.5. *Existe $n > n_m$ tal que para cada $v \in \mathbb{Z}V_{n_m}$ existe $w_v \in \mathbb{Z}W_n$ que satisfaz*

$$\alpha(\langle v, m \rangle) = \langle w_v, n \rangle.$$

Prova. Considere v um elemento de V_{n_m} , então $v \in \mathbb{Z}V_{n_m}^+$ e, por definição, $\langle v, n_m \rangle \in D(\mathfrak{B})^+$. Como α é um homomorfismo positivo, temos que $\alpha(\langle v, n_m \rangle) \in D(\mathfrak{T})^+$. Então existem a_v e n_v tais que $a_v \in \mathbb{Z}W_{n_v}^+$ e

$$\alpha(\langle v, n_m \rangle) = \langle a_v, n_v \rangle.$$

Dentre todas as possibilidades escolhemos o par (a_v, n_v) tal que n_v seja mínimo. Definimos

$$n := \max\{n_v, n_m \mid v \in V_{n_m}\} + 1.$$

Sabemos que, pela definição da relação de equivalência

$$\langle a_v, n_v \rangle = \langle h_{n_v, n_v+k}(a_v), n_v + k \rangle \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Dessa forma, para todo $v \in \mathbb{Z}V_{n_m}$, existe $w_v \in \mathbb{Z}W_n$ tal que $\alpha(\langle v, n_m \rangle) = \langle w_v, n \rangle$. Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Agora, considere a função $\bar{g} : V_{n_m} \rightarrow \mathbb{Z}W_n^+$, definida por

$$\bar{g}(v) := h_{\mathfrak{T}_{n_v, n}}(a_v) = w_v \in \mathbb{Z}W_n^+.$$

Podemos estender a função $\bar{g}$ de maneira única para um homomorfismo positivo $g : \mathbb{Z}V_{n_m} \rightarrow \mathbb{Z}W_n$.

Lema 14.1.6. *Para todo $v \in V_{n_m}$, $\alpha(\langle v, n_m \rangle) = \langle g(v), n \rangle$. Além disso, para todo $k > n$, $\alpha(\langle v, n_m \rangle) = \langle h_{\mathfrak{T}_{n, k}} \circ g(v), n \rangle$.*

Prova. Seja $v \in V_{n_m}$, então

$$\alpha(\langle v, n_m \rangle) = \langle a_v, n_v \rangle = \langle h_{\mathfrak{T}_{n_v, n}}(a_v), n \rangle = \langle g(v), n \rangle.$$

Além disso, seja $k > n$ e considere a composição $h_{\mathfrak{T}_{n,k}} \circ g$. Como

$$h_{\mathfrak{T}_{nv,k}} = h_{\mathfrak{T}_{n,k}} \circ h_{\mathfrak{T}_{nv,n}} = h_{\mathfrak{T}_{nv,k}},$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle h_{\mathfrak{T}_{n,k}} \circ (v), k \rangle &= \langle h_{\mathfrak{T}_{n,k}} \circ h_{\mathfrak{T}_{nv,n}}(a_v), k \rangle = \langle h_{\mathfrak{T}_{nv,n}}(a_v), n \rangle \\ &= \alpha(\langle v, n_m \rangle). \end{aligned}$$

Finalizamos, assim, a prova do lema ■

Gostaríamos de mostrar que dado $w \in W_{n_{m-1}}$, $g \circ f_m(w) = h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w)$. Porém, isto pode não ocorrer. O resultado válido é o seguinte:

Lema 14.1.7. *Para cada $w \in \mathbb{Z}W_{n_{m-1}}$, temos que $\langle h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w), n \rangle = \langle g \circ f_m(w), n \rangle$.*

Prova. Como m é par e pela definição da função g , $f_m(w) \in \mathbb{Z}V_{n_m}$. Usando o Lema 14.1.6 temos que

$$\langle g(f_m(w)), n \rangle = \alpha(\langle f_m(w), n_m \rangle). \quad (14.1.1)$$

Pela hipótese de indução e como m é par segue que

$$\langle f_m(w), n \rangle = \alpha^{-1}(\langle w, n_{m-1} \rangle) \quad (14.1.2)$$

Usando as equações (14.1.1) e (14.1.2), obtemos que

$$\langle g(f_m(w)), n \rangle = \alpha(\alpha^{-1}(\langle w, n_{m-1} \rangle)) = \langle w, n_{m-1} \rangle. \quad (14.1.3)$$

Sabemos que, por definição,

$$\langle w, n_{m-1} \rangle = \langle h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w), n \rangle \quad (14.1.4)$$

Usando as equações (14.1.3) e (14.1.4), temos que

$$\langle g(f_m(w)), n \rangle = \langle h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w), n \rangle.$$

Finalizamos, assim, a demonstração do lema. ■

Pelo Lema 14.1.7, para cada $w \in \mathbb{Z}W_n$, os elementos $g \circ f_m(w)$ e $h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w)$ determinam o mesmo elemento em $D(\mathfrak{T})$. Então, para cada $w \in \mathbb{Z}W_n$, existe ℓ_w tal que

$$h_{\mathfrak{T}_{n,\ell_w}}(g \circ f_m(w)) = h_{\mathfrak{T}_{n,\ell_w}}(h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},n}}(w)) = h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1},\ell_w}}(w).$$

Escolheremos, para cada $w \in \mathbb{Z}W_n$, ℓ_w mínimo com essa propriedade. Definimos

$$n_{m+1} = \max\{\ell_w \mid w \in W_{n_{m-1}}\} + 1$$

e

$$f_{m+1} = h_{\mathfrak{T}_{n, n_{m+1}}} \circ g.$$

Pelo Lema 14.1.6, temos que para todo $v \in V_{n_{m+1}}$

$$\langle f_{m+1}(v), n_{m+1} \rangle = \alpha(\langle v, n_m \rangle).$$

Lema 14.1.8. $f_{m+1} \circ f_m = h_{\mathfrak{T}_{n_{m-2}, n_{m+1}}}.$

Prova. Seja $w \in W_{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned} f_{m+1} \circ f_m(w) &= (h_{\mathfrak{T}_{n, n_{m+1}}} \circ g) \circ f_m(w) = (h_{\mathfrak{T}_{\ell_w, n_{m+1}}} \circ h_{\mathfrak{T}_{n, \ell_w}}) \circ g \circ f_m(w) \\ &= h_{\mathfrak{T}_{\ell_w, n_{m+1}}} \circ h_{\mathfrak{T}_{n, \ell_w}} \circ (g \circ f_m(w)) = h_{\mathfrak{T}_{\ell_w, n_{m+1}}} \circ h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1}, \ell_w}}(w) \\ &= h_{\mathfrak{T}_{n_{m-1}, n_{m+1}}}(w) \end{aligned}$$

Provando, assim, o lema. ■

O caso em que m é ímpar é feito de forma análoga. Concluimos, assim, a demonstração do lema. ■

Demonstramos, portanto, a existência de um entrelaçamento entre os diagramas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$.

Na hipótese do Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger a relação de equivalência considerada é a relação AF . Pelo Teorema 7.1.13, dados um conjunto de Cantor X e um homeomorfismo minimal $\varphi : X \rightarrow X$ podemos associar ao espaço (X, R_φ) um diagrama de Bratteli $\mathfrak{B}$ tal que X e $X_{\mathfrak{B}}$ são conjugados e as relações de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ e R_φ estão relacionadas.

Lembre que dados dois espaços métricos X e Y e duas relações de equivalência R e Q orbitais em, respectivamente, X e Y , dizemos que um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital entre R e Q se, e só se, $h(\langle x \rangle_R) = \langle h(x) \rangle_Q$. Neste capítulo definiremos o que é uma equivalência orbital forte e classificaremos sistemas de Cantor minimais segundo equivalência orbital forte.

15.1

Cociclos orbitais

Proposição 15.1.1. *Sejam dois conjuntos de Cantor X e Y e homeomorfismos $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ sem pontos periódicos. Considere as relações orbitais R_φ e R_ψ . Um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital entre R_φ e R_ψ se e somente se existem funções $m_h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ e $n_h : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que*

$$h \circ \varphi(x) = \psi^{m_h(x)} \circ h(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

e

$$h^{-1} \circ \psi(y) = \varphi^{n_h(y)} \circ h^{-1}(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

As funções m_h e n_h são denominadas de cociclos orbitais. Repare que a continuidade dos cociclos orbitais não é exigida.

Prova. Suponha que $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital. Como $x \sim_{R_\varphi} \varphi(x)$, temos que $h(x) \sim_{R_\psi} h(\varphi(x))$. Pela definição da relação R_ψ , existe um inteiro k tal que

$$\psi^k(h(x)) = h(\varphi(x)) \quad (15.1.1)$$

Definimos $m_h(x) = \{k_1, \dots, k_\ell\}$ como o conjunto formado dos inteiros que satisfazem a equação (15.1.1). Mostraremos que este conjunto contém um único elemento e o definiremos como $m_h(x)$. Suponha que $m_h(x)$ contém dois inteiros

$k_1 > k_2$ em $m_h(x)$. Então $\psi^{k_1}(h(x)) = \psi^{k_2}(h(x))$. Assim,

$$\psi^{k_1-k_2}(h(x)) = h(x).$$

Por hipótese, ψ não possui pontos periódicos, então $k_1 = k_2$ contradizendo a hipótese. Portanto, $m_h(x)$ contém um único elemento e podemos definir a função $m_h: X \rightarrow X$ que satisfaz

$$h \circ \varphi(x) = \psi^{m_h(x)} \circ h(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Agora, suponha que $y \sim_{R_\psi} \psi(y)$, como h é uma equivalência orbital, temos que $h^{-1}(y) \sim_{R_\varphi} h^{-1}(\psi(y))$. Pela definição da relação R_φ , existe um inteiro ℓ tal que

$$\varphi^\ell(h^{-1}(y)) = h^{-1}(h(x)). \quad (15.1.2)$$

Definimos $n_h = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k\}$, que de forma análoga ao que fizemos anteriormente mostramos que possui um único elemento. Podemos, então, definir a função $n_h: Y \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisfaz

$$h^{-1} \circ \psi(y) = \varphi^{n_h(y)} \circ h^{-1}(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Para a recíproca, mostraremos que se existem as funções $m_h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ e $n_h: Y \rightarrow \mathbb{Z}$ como na hipótese, temos que $h(\langle x \rangle_{R_\varphi}) = \langle h(x) \rangle_{R_\psi}$. Para isso, veremos que o primeiro conjunto está contido no segundo e vice-versa.

Lema 15.1.2. $h(\langle x \rangle_{R_\varphi}) \subset \langle h(x) \rangle_{R_\psi}$.

Prova. Seja $y \in h(\langle x \rangle_{R_\varphi})$, então existe $z \in \langle x \rangle_\varphi$ tal que $h(z) = y$, e, portanto, $h^{-1}(y) = z$. Por definição de R_φ , existe inteiro k tal que $\varphi^k(z) = x$. Então,

$$\varphi^k(z) = \varphi^k(h^{-1}(y)) = x.$$

Por hipótese,

$$\psi^{m_h(z)} \circ h(z) = h \circ \varphi(z),$$

portanto,

$$\psi^{m_h(z)}(y) = h \circ \varphi \circ h^{-1}(y). \quad (15.1.3)$$

Compondo a k vezes a função $\psi^{m_h(z)}$, obtemos

$$(\psi^{m_h(z)})^k = h \circ \varphi^k \circ h^{-1}.$$

Usando a equação (15.1.3), temos que

$$\psi^{km_h(z)}(y) = h \circ \varphi^k \circ h^{-1}(y) = h \circ \varphi^k(z) = h(x),$$

portanto $y \in \langle h(x) \rangle_{R_\psi}$. ■

A demonstração de que $\langle h(x) \rangle_{R_\psi} \subset h(\langle x \rangle_{R_\varphi})$ é análoga. Portanto, $h(\langle x \rangle_{R_\varphi}) = \langle h(x) \rangle_{R_\psi}$ para todo $x \in X$. Concluimos, então, que h é uma equivalência orbital entre as relações R_φ e R_ψ . ■

Lema 15.1.3. *Sejam X e Y conjuntos de Cantor. Considere $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ homeomorfismos minimais e $h : X \rightarrow Y$ uma equivalência orbital com cociclos orbitais $m_h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ e $n_h : Y \rightarrow \mathbb{Z}$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, os conjuntos $m_h^{-1}(\{k\})$ e $n_h^{-1}(\{k\})$ são fechados.*
2. *Se $\{x_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência que converge para algum ponto $x \in X$, então o único ponto de acumulação finito da sequência $\{m_h(x_i)\}_{i \geq 0}$ é $m_h(x)$.*
3. *Se $\{y_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência que converge para algum ponto $y \in Y$, então o único ponto de acumulação finito da sequência $\{n_h(y_i)\}_{i \geq 0}$ é $n_h(y)$.*
4. *Se a função m_h é descontínua em algum ponto $x \in X$, então m_h é ilimitada em qualquer vizinhança de x .*
5. *Se a função n_h é descontínua em algum ponto $y \in Y$, então n_h é ilimitada em qualquer vizinhança de y .*

Prova. As demonstrações serão realizadas para a função m_h . A prova para a função n_h é análoga. Mostraremos, primeiro, que para todo $k \in \mathbb{Z}$, o conjunto $m_h^{-1}(\{k\})$ é fechado. Para isso, veremos que se $\{x_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência em $m_h^{-1}(\{k\})$ que converge para um ponto x , provaremos que $x \in m_h^{-1}(\{k\})$. Como para todo $i > 0$, $x_i \in m_h^{-1}(\{k\})$, pela definição de cociclo orbital, temos, para todo $i \geq 0$, que

$$h \circ \varphi(x_i) = \psi^k \circ h(x_i).$$

Então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h \circ \varphi(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi^k \circ h(x_i).$$

Por hipótese, as funções h , φ e ψ são contínuas, então

$$h \circ \varphi(x) = \psi^k \circ h(x).$$

Portanto, $x \in m_h^{-1}(\{k\})$. Concluimos, então, que o conjunto $m_h^{-1}(\{k\})$ é fechado.

Agora, assumamos que a função m_h é descontínua em algum ponto $x \in X$. Então existe sequência $\{z_n\}_{n \geq 1}$ tal que $z_n \rightarrow x$ e $\{m_h(z_n)\}_{n \geq 1}$ não converge

para $m_h(x)$. Considere o conjunto

$$m_h(\{z_n\}_{n \geq 1}) := \{m_h(z_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Se $m_h(\{z_n\}_{n \geq 1})$ é um conjunto infinito, temos que toda vizinhança de x é limitada. Agora, considere o caso em que

$$m_h(\{z_n\}_{n \geq 1}) = \{L_1, \dots, L_j\}.$$

Neste caso, existem n_0 e $1 \leq K \leq j$, tal que $z_n = L_K$ para todo $n \geq n_0$. Pelo item 1 o conjunto $m_j^{-1}(\{L_K\})$ é fechado, então $x \in m_j^{-1}(\{L_K\})$ e, portanto, $m_h(z_n) \rightarrow m_h(x)$, o que é uma contradição.

Teorema 15.1.4 (Boyle-Tomiyama). *Sejam X e Y conjuntos de Cantor. Se $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ são homeomorfismos minimais então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma equivalência orbital $h : X \rightarrow Y$ que possui cociclos contínuos.*
2. *Existe um isomorfismo $h : (X, R_\varphi) \rightarrow (Y, R_\psi)$.*
3. *(X, φ) é topologicamente conjugado a (Y, ψ) ou (Y, ψ^{-1}) .*

Prova. Provaremos, somente, que $(1) \Leftrightarrow (2)$ e que $(3) \Rightarrow (2)$. Em [2] pode ser encontrada a demonstração completa do resultado.

$(1) \Rightarrow (2)$: Suponha que os cociclos m_h e n_h são contínuos. Mostraremos, que $h \times h$ é um isomorfismo entre R_φ e R_ψ . Para isto, provaremos que $h \times h$ é um homeomorfismo quando considerada a topologia étale.

Já que a função m_h é contínua e o conjunto $\mathbb{Z}$ é discreto, para todo $x \in X$, existe um conjunto clopen U_x , onde a função m_h é constante. Dado $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$h \times h(U_x, \varphi^n(U_x)) = (h(U_x), h(\varphi^n(U_x))).$$

Por hipótese, m_h é constante em U_x , então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h(\varphi^n(U_x)) = \psi^k(h(U_x))$, então,

$$h \times h(U_x, \varphi^n(U_x)) = (h(U_x), \psi^k(h(U_x))).$$

Como a função h é um homeomorfismo, o conjunto $(h(U_x), \psi^k(h(U_x)))$ é um aberto de R_ψ . Provamos, assim, que $h^{-1} \times h^{-1}$ é contínua. Analogamente, como n_h é contínua e $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto, para todo $y \in Y$ existe um conjunto clopen V_y , onde a função n_h é constante. Assim, dado $m \in \mathbb{Z}$, existe um inteiro

ℓ tal que $h^{-1}(\psi^m(V_Y)) = \varphi^\ell(h^{-1}(V_Y))$. Portanto,

$$h^{-1} \times h^{-1}(V_y, \psi^m(V_Y)) = (h^{-1}(V_Y), \varphi^\ell(h^{-1}(V_y))).$$

Como h é um homeomorfismo o conjunto $(h^{-1}(V_Y), \varphi^\ell(h^{-1}(V_y)))$ é um aberto de R_φ . Concluimos, então que $h \times h$ e $h^{-1} \times h^{-1}$, além disto, como h é um homeomorfismo e uma equivalência orbital, temos que $h \times h : R_\varphi \rightarrow R_\psi$ é uma bijeção. Portanto $h \times h : R_\varphi \rightarrow R_\psi$ é um homeomorfismo e portanto um isomorfismo entre (X, R_φ) e (Y, R_ψ) .

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponha, agora, que existe um isomorfismo h entre (X, R_φ) e (Y, R_ψ) , isto é, $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e $h \times h : R_\varphi \rightarrow R_\psi$ é um isomorfismo quando considerada a topologia étale.

Como $h \times h : R_\varphi \rightarrow R_\psi$ é um homeomorfismo, temos que h é um equivalência orbital. Mostraremos que o cociclo m_h é contínuo. A demonstração de que o cociclo n_h é contínuo é análoga. Considere $x \in X$ e $U \subset X$ clopen que contém x . Como h, φ e ψ são homeomorfismos temos que os conjuntos $h(\varphi(U))$ e $\psi^{m_h(x)}(h(U))$ são abertos. Além disso,

$$V_{m_h(x)} := h(\varphi(U)) \cap \psi^{m_h(x)}(h(U)) \neq \emptyset.$$

Portanto, o conjunto

$$\varphi^{-1} \circ h^{-1}(V_{m_h(x)}).$$

é um aberto em que a função m_h é limitada. Pelo Lema 15.1.3, a função m_h é contínua.

(3) $\Rightarrow$ (2) : suponha que $h : X \rightarrow Y$ é uma conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ) , mostraremos que h é um isomorfismo entre (X, R_φ) e (Y, R_ψ) . Seja $(x, z) \in R_\varphi$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \varphi^n(x)$. Como h é uma conjugação, temos que

$$h(x) = h(\varphi^n(x)) = \psi^n(h(x)).$$

Então $(h(x), h(y)) \in R_\psi$. Agora, seja $(a, b) \in R_\psi$, temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = \psi^k(a)$. Como h é uma conjugação, segue que

$$h^{-1}(b) = h^{-1}(\psi^k(a)) = \varphi^k(h^{-1}(a)).$$

Então, $(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \in R_\varphi$. Portanto, $h \times h(R_\varphi) = R_\psi$, em particular, $h \times h$ é uma sobrejeção. Como h é injetiva, a função $h \times h$ também é injetiva. Falta mostrar que $h \times h$ e $h^{-1} \times h^{-1}$ são contínuas. Dado U subconjunto clopen de

X e $n \in \mathbb{Z}$, considere o aberto $(U, \varphi^n(U))$. Como h é uma conjugação

$$h \times h(U, \varphi^n(U)) = (h(U), h(\varphi^n(U))) = (h(U), \psi^n(h(U))).$$

Como h é um homeomorfismo, o conjunto $h(U)$ é um subconjunto clopen de Y . Assim, a função $h^{-1} \times h^{-1}$ é contínua. A demonstração de que $h \times h$ é contínua é análoga. Concluimos que $h \times h : R_\varphi \rightarrow R_\psi$ é um homeomorfismo. Portanto h é um isomorfismo entre (X, φ) e (Y, ψ) .

(3) $\Rightarrow$ (1): pelo mesmo argumento usado na implicação (3) $\Rightarrow$ (2), mostramos que $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência orbital. Precisamos mostrar que os cociclos são contínuos, No caso em que h é uma conjugação topológica os cociclos são constantes, portanto são contínuos.

Concluimos a demonstração do teorema. ■

15.2

Equivalência orbital forte e classificação

Lembre, mais uma vez, que dados um espaço métrico X e uma relação de equivalência R em X , podemos considerar R como o seguinte conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim_R y\}.$$

Definição 15.2.1 (Equivalência orbital forte). *Considere X e Y conjuntos de Cantor e $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ homeomorfismos minimais. Uma equivalência orbital $h : X \rightarrow Y$ entre R_φ e R_ψ tal que os cociclos orbitais possuem cada um, no máximo, um ponto de descontinuidade, é dita forte.*

Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ um diagrama de Bratteli. Lembre que na Seção 5.2 vimos que é possível obter um novo diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência. Além disso, definimos a função de blocos $f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}} : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$. Pela Proposição 5.2.2, $f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}$ é um homeomorfismo.

Pelo Teorema 5.3.5, se a relação de equivalência $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal, então existe um diagrama de Bratteli $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$, obtido através de $\mathfrak{B}$ a partir de uma subsequência, tal que $\mathfrak{T}$ possui todas as arestas conectadas. Isto é, para todo $n > 0$, todo vértice de W_n está conectado por meio de alguma aresta em E_n com todo vértice de W_{n-1} .

Teorema 15.2.2. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ uma diagrama de Bratteli. Suponha que os elementos $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^I, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^I$ estão em $X_{\mathfrak{B}}$ e que se considerarmos dois a dois distintos, eles não estão relacionados por $R_{\mathfrak{B}}$. Se $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal, então existe um homeomorfismo $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ tal que:*

1. $h(\mathbf{x}^i) = \mathbf{y}^i$, para todo $1 \leq i \leq I$.
2. $h \times h : R_{\mathfrak{B}} \rightarrow R_{\mathfrak{B}}$ é um homeomorfismo quando considerada a topologia étale de $R_{\mathfrak{B}}$.

Prova. Precisaremos de um resultado preliminar.

Lema 15.2.3. *Seja $\mathfrak{B} = (V, E, r, s)$ é um diagrama de Bratteli que possui todas as arestas conectadas. Se existem $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^I, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^I$ em $X_{\mathfrak{B}}$, tais que qualquer par formado por elementos desta lista não está em $R_{\mathfrak{B}}$, então é possível obter a partir de $\mathfrak{B}$ através de uma subsequência um diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$ tal que para todo $n \geq 1$ existem pelo menos $3I$ arestas distintas em E_n e que as arestas entre vértices de níveis consecutivos nos elementos $f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{x}^1), \dots, f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{x}^I), f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{y}^1), \dots, f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{y}^I)$ são distintas.*

Prova. Lembremos que denotamos um elemento de $X_{\mathfrak{B}}$ como $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$. Faremos o caso $I = 1$. Por hipótese, $\mathbf{x}^1 = (x_n^1)_{n \geq 1}$ e $\mathbf{y}^1 = (y_n^1)_{n \geq 1}$ não estão relacionados por $R_{\mathfrak{B}}$, então existe uma sequência crescente $\{\ell_k\}_{k \geq 1}$, tal que $x_{\ell_k}^1 \neq y_{\ell_k}^1$. Definimos $n_0 = 0$ e

$$n_1 = \min\{\ell_k > 0 \mid \text{existe } e \in E_{\ell_k} \text{ tal que } s(e) = s(x_{\ell_k}^1) \text{ ou } s(e) = s(y_{\ell_k}^1)\}.$$

Indutivamente, definimos

$$n_m = \min\{\ell_k > n_{m-1} \mid \text{existe } e \in E_{\ell_k} \text{ tal que } s(e) = s(x_{\ell_k}^1) \text{ ou } s(e) = s(y_{\ell_k}^1)\}.$$

A sequência $\{n_m\}_{m \geq 0}$ é crescente. Considere que $\mathfrak{T} = (W, F, \bar{r}, \bar{s})$ é obtido a partir de $\mathfrak{B}$ através da sequência $\{n_m\}_{m \geq 0}$.

Fixe $n \geq 0$. Por definição, $W_n = E_{n_{m-1}, n_m}$. Note que, a quantidade de arestas em W_n é dada por

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq \#V_{n_{m-1}} \\ 1 \leq j \leq \#V_{n_{m-1}+1}}} \left(\#E(v_i^{n_{m-1}}, v_j^{n_{m-1}+1}) \#s^{-1}(v_j^{n_{m-1}+1}) \prod_{n_{m-1}+2 \leq t \leq n_m} \#s^{-1}(v_{i_t}^t) \right)$$

Por definição da sequência $\{n_m\}_{m \geq 0}$, existe $v_{i_{n_{m-1}}}^{n_{m-1}}$ tal que $\#s^{-1}(v_{i_{n_{m-1}}}^{n_{m-1}}) > 1$, portanto, $\#W_n > \#E_k$ para todo $n_{m-1} \leq k \leq n_m$. Dessa forma, o diagrama obtido possui um número maior de arestas em cada nível do que $\mathfrak{B}$. Repetimos o processo acima quantas vezes forem necessárias até obter um diagrama de Bratteli que possui pelo menos $3I$ arestas distintas em cada nível. Pela definição da subsequência $\{n_m\}_{m \geq 0}$ as arestas entre vértices de níveis consecutivos dos elementos $f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{x}^1), \dots, f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{x}^I), f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{y}^1), \dots, f_{\mathfrak{B}, \mathfrak{T}}(\mathbf{y}^I)$ são distintas. Finalizamos, assim, a demonstração do lema. ■

Por hipótese, a relação $R_{\mathfrak{B}}$ é minimal. Então é possível obter um novo diagrama de Bratteli $\mathfrak{T}$ através de $\mathfrak{B}$ a partir de uma subsequência, tal que $\mathfrak{T}$ possui todas as arestas conectadas e pelo menos $3I$ arestas distintas em E_n e que arestas entre vértices níveis consecutivos nos elementos $f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}(\mathbf{x}^1), \dots, f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}(\mathbf{x}^I), f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}(\mathbf{y}^1), \dots, f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}(\mathbf{y}^I)$ são distintas.

Suponha que existe um homeomorfismo $g : X_{\mathfrak{T}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$ tal que

- $g(f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}(\mathbf{x}^i)) = \mathbf{y}^i$, para todo $1 \leq i \leq I$.
- $g \times g : R_{\mathfrak{T}} \rightarrow R_{\mathfrak{T}}$ é um homeomorfismo quando considerada a topologia étale de $R_{\mathfrak{T}}$.

Definimos a função

$$h = f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}^{-1} \circ g \circ f_{\mathfrak{B},\mathfrak{T}}.$$

Temos que $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ é um homeomorfismo e satisfaz as condições do teorema. Faremos, então, o caso que $\mathfrak{B}$, possui todas as arestas conectadas, pelo menos $3I$ arestas em E_n e que as arestas entre vértices de níveis consecutivos nos elementos $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^I, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^I$ são distintas.

Começaremos escolhendo para cada $1 \leq i \leq I$ um elemento $\mathbf{z}^i \in X_{\mathfrak{B}}$. Já que $\mathfrak{B}$ possui todas as arestas conectadas é possível fazer a seguinte escolha de arestas:

- Para todo $1 \leq i \leq I$, $z_1^i = y_1^i$.
- Se $n \geq 2$ e par, escolhemos para cada $1 \leq i \leq I$, uma aresta z_n^i distinta de x_n^i e y_n^i , tal que

$$s(z_n^i) = s(y_n^i) \quad \text{e} \quad r(z_n^i) = r(x_n^i).$$

- Para $n \geq 2$ ímpar, escolhemos para cada $1 \leq i \leq I$, uma aresta z_n^i distinta de x_n^i e y_n^i , tal que

$$s(z_n^i) = s(x_n^i) \quad \text{e} \quad r(z_n^i) = r(y_n^i).$$

Assim, para todo $1 \leq i \leq I$, $\mathbf{z}^i$ é um elemento em $X_{\mathfrak{B}}$.

Para cada $n \geq 1$ ímpar, considere a permutação h_0 em $E_{n-1,n+1}$ que permuta os pares de arestas (x_n^i, x_{n+1}^i) e (z_n^i, z_{n+1}^i) e não altera os outros pares. Para estender o domínio de h_0 para $X_{\mathfrak{B}}$, definimos

$$h_0(e_1, e_2, \dots) = (h_0(e_1, e_2), h_0(e_3, e_4), \dots).$$

Para cada $n \geq 1$ par, considere a permutação h_1 em $E_{n-1,n+1}$ que permuta os pares (z_n^i, z_{n+1}^i) e (y_n^i, y_{n+1}^i) e não altera os outros pares. Estendemos o domínio de h_1 para $X_{\mathfrak{B}}$ de forma análoga ao que fizemos para h_0 .

Repare que as funções h_0 e h_1 trocam um par de arestas em dois níveis consecutivos ou não o altera. Assim, para $k = 0, 1$,

$$h_k \circ h_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Portanto, a função inversa de h_k é ela mesma e h_k é uma bijeção.

Lema 15.2.4. Para $k = 0, 1$, a função $h_k : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{B}}$ é contínua.

Prova. Sejam $n \geq 1$ e $p \in E_{0,n}$. Na Definição 5.1.4 definimos um cilindro $C(p)$ de tamanho n centrado em $p = (e_1, \dots, e_n)$. Pela Proposição 5.1.5 os cilindros de tamanho par formam uma base da topologia de $X_{\mathfrak{B}}$. Fixe k e $n \geq 1$ par. Mostraremos que $h_k^{-1}(C(p))$ é um aberto em $X_{\mathfrak{B}}$. Temos que

$$h_k^{-1}(C(p)) = h_k(C((e_1, e_2, \dots, e_n))) = C(h_k(e_1, e_2), \dots, h_k(e_{n-1}, e_n)).$$

Portanto, a função h_k é contínua. ■

Como $k = 0, 1$ a função h_k é uma bijeção contínua e que $h_k^{-1} = h_k$. Portanto h_k é um homeomorfismo. Definimos o homeomorfismo

$$h := h_1 \circ h_0.$$

Mostraremos agora que a função h satisfaz as condições do teorema.

Fixe $1 \leq i \leq I$. Por definição da função h ,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}^i) &= h_1(h_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i \dots)) = h_1(z_1^i, z_2^i, z_3^i, \dots) \\ &= (z_1^i, y_2^i, y_3^i, \dots) = (y_1^i, y_2^i, y_3^i \dots) = \mathbf{y}^i. \end{aligned}$$

Assim, a primeira condição do teorema é satisfeita.

Para mostrar que $h \times h : R_{\mathfrak{B}} \rightarrow R_{\mathfrak{B}}$ é um homeomorfismo quando considerada a topologia étale de $R_{\mathfrak{B}}$ precisamos mostrar que $h \times h(R_{\mathfrak{B}}) = R_{\mathfrak{B}}$, $h \times h$ é uma bijeção e que $h \times h$ e $(h \times h)^{-1}$ são contínuas.

Mostraremos, primeiro, que $h \times h(R_{\mathfrak{B}}) \subset R_{\mathfrak{B}}$. Para isto, considere $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in h \times h(R_{\mathfrak{B}})$. Existe $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}}$ tal que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ e $h(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$. Como $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}}$, existe $N > 0$ tal que $x_n = y_n$ para todo $n \geq N$. Pela definição da função h ,

$$a_n = (h(\mathbf{x}))_n = (h(\mathbf{y}))_n = b_n \quad \text{para todo } n \geq N + 1.$$

Então, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R_{\mathfrak{B}}$.

Para provar a inclusão contrária, considere $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R_{\mathfrak{B}}$. Já que h é sobrejetora, existem $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $X_{\mathfrak{B}}$, tais que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ e $h(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$. Como $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R_{\mathfrak{B}}$, existe $N > 0$ tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq N$. Pela definição da função h , $x_n = y_n$ para todo $n \geq N$. Portanto, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\mathfrak{B}}$.

Provamos, então, que $h \times h : R_{\mathfrak{B}} \rightarrow R_{\mathfrak{B}}$ é uma função sobrejetora. Além disso, como h é uma função injetora, temos que $h \times h$ também é. Portanto, $h \times h$ é uma bijeção.

Falta mostrar que $h \times h$ e $(h \times h)^{-1}$ são contínuas. Como $(h \times h)^{-1} = h \times h$, é suficiente provar que $(h \times h)^{-1}$ é contínua. Lembre que na Seção 8.1 vimos que uma base da topologia étale de $R_{\mathfrak{B}}$ é formada por conjuntos da forma

$$\gamma(p, q) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in C(p), \mathbf{y} \in C(q) \text{ e } x_n = y_n \text{ para todo } n > N\},$$

onde $p, q \in E_{0,N}$. Pela definição da função h , se $\mathbf{x} \in C(p)$, então $h(\mathbf{x}) \in C(h(p))$. Além disso, temos que $(h(\mathbf{x}))_n = (h(\mathbf{y}))_n$ para todo $n > N$. Portanto,

$$h \times h(\gamma(p, q)) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in C(h(p)), \mathbf{y} \in C(h(q)) \text{ e } x_n = y_n \forall n > N\},$$

que é um aberto em $R_{\mathfrak{B}}$. Portanto $h \times h$ e $(h \times h)^{-1}$ são contínuas, e, portanto, homeomorfismos. Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

Teorema 15.2.5. *Considere conjuntos de Cantor X e Y e homeomorfismo minimais $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$. Existe uma equivalência orbital forte entre (X, φ) e (Y, ψ) se, e só se, existe um isomorfismo ordenado que preserva ordem unitária entre os invariantes $D(X, R_{\varphi})$ e $D(Y, R_{\psi})$.*

Prova. Suponha que existe uma equivalência orbital forte $h : X \rightarrow Y$ com cociclos orbitais associados os cociclos m e n , isto é,

$$h \circ \varphi(x) = \psi^{m(x)} \circ h(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

e

$$h^{-1} \circ \psi(y) = \varphi^{n(y)} \circ h^{-1}(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Há dois casos de acordo com a continuidade das funções m e n . Consideraremos, primeiro, o caso em que os cociclos m e n são, ambos, contínuos. Neste caso, pelo Teorema 15.1.4, h é um isomorfismo entre (X, R_{φ}) e (Y, R_{ψ}) . Usando o Teorema 10.2.2, existe um isomorfismo ordenado que preserva ordem unitária entre $D(X, R_{\varphi})$ e $D(Y, R_{\psi})$.

Agora, suponha que x_0 e y_0 são os únicos pontos de descontinuidade das funções m e n . Pelo Teorema 7.1.13, existem um diagrama de Bratteli ordenado, simples e próprio $\mathfrak{B} = (V, E, r, s, \geq)$ e um homeomorfismo $g_X : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X$ tal que

$$g_X \circ \varphi_{\mathfrak{B}} = \varphi \circ g_X$$

onde $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é a função de Bratteli-Vershik associada a $\mathfrak{B}$ e $g_X(\mathbf{x}_{\max}) = x_0$.

Analogamente, existem um diagrama de Bratteli ordenado, simples e próprio $\mathfrak{T}$ e um homeomorfismo $g_Y : X_{\mathfrak{T}} \rightarrow Y$ tal que

$$g_Y \circ \psi_{\mathfrak{T}} = \psi \circ g_Y,$$

onde $\psi_{\mathfrak{T}}$ é a função de Bratteli-Vershik associada a $\mathfrak{T}$ e $g_Y(\mathbf{y}_{\max}) = y_0$.

Lema 15.2.6. *A função*

$$H : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}, \quad H := g_Y^{-1} \circ h \circ g_X$$

é uma equivalência orbital entre as relações $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ e $R_{\psi_{\mathfrak{T}}}$ com cociclos orbitais $m \circ g_X$ e $n \circ g_Y$.

Prova. Seja $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$. Temos que

$$\begin{aligned} H \circ \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) &= g_Y^{-1} \circ h \circ g_X \circ \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}) = g_Y^{-1} \circ h \circ \varphi \circ g_X(\mathbf{x}) \\ &= g_Y^{-1} \circ \psi^{m(g_X(\mathbf{x}))} \circ h(g_X(\mathbf{x})) = \psi^{m(g_X(\mathbf{x}))} \circ g_Y^{-1} \circ h \circ g_X(\mathbf{x}) \\ &= \psi_{\mathfrak{T}}^{m(g_X(\mathbf{x}))} \circ H(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que dado $\mathbf{y} \in X_{\mathfrak{T}}$

$$H^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{T}}(\mathbf{y}) = \varphi_{\mathfrak{B}}^{n(g_Y(\mathbf{y}))} \circ H^{-1}(\mathbf{y}).$$

Pela proposição 15.1.1, a função H é uma equivalência orbital entre as relações $R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ e $R_{\psi_{\mathfrak{T}}}$ com cociclos orbitais associados $m \circ g_X$ e $n \circ g_Y$. Concluimos, assim, a demonstração do lema ■

Pelo Lema 12.2.4 temos que

$$D(X, R_{\varphi}) \cong D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \quad \text{e} \quad D(Y, R_{\psi}) \cong D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}}).$$

Mostraremos, então que

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \cong D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}}).$$

Proposição 15.2.7. *Se $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$ é uma equivalência orbital forte com $\mathbf{x}_{\max}$ e $\mathbf{y}_{\max}$ pontos de descontinuidade dos cociclos $m : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $n : X_{\mathfrak{T}} \rightarrow \mathbb{Z}$, respectivamente, então*

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \cong D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}}).$$

Prova. Precisaremos de alguns resultados.

Lema 15.2.8. *Para todo $\mathbf{x} \in X_{\mathfrak{B}}$ e $k \geq 1$,*

$$h(\varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x})) = \psi_{\mathfrak{T}}^{m(\mathbf{x})+m(\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}))+\dots+m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{k-1}(\mathbf{x}))}(h(\mathbf{x})).$$

Prova. A demonstração será por indução. O caso $k = 1$ já foi provado na Proposição 15.1.1. Considere que afirmação seja verdadeira para $k = \ell$. Mostraremos que também é verdadeira para $k = \ell + 1$. Temos que

$$h(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1}(\mathbf{x})) = \psi_{\mathfrak{T}}^{m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell}(\mathbf{x}))}(h(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell}(\mathbf{x}))).$$

Pela hipótese de indução,

$$h(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell}(\mathbf{x})) = \psi_{\mathfrak{T}}^{m(\mathbf{x})+\dots+m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell-1}(\mathbf{x}))}(h(\mathbf{x})).$$

Então,

$$\begin{aligned} h(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell+1}(\mathbf{x})) &= \psi_{\mathfrak{T}}^{m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell}(\mathbf{x}))}(\psi_{\mathfrak{T}}^{m(\mathbf{x})+\dots+m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell-1}(\mathbf{x}))}(h(\mathbf{x}))) \\ &= \psi_{\mathfrak{T}}^{m(\mathbf{x})+\dots+m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell-1}(\mathbf{x}))+m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{\ell}(\mathbf{x}))}(h(\mathbf{x}))). \end{aligned}$$

Concluimos, assim, a demonstração da afirmação. ■

Considere os conjuntos

$$R_1 := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\varphi_{\mathfrak{B}}} \mid h \times h \text{ é contínua em } (\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

e

$$R_2 := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{\psi_{\mathfrak{T}}} \mid h^{-1} \times h^{-1} \text{ é contínua em } (\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Lema 15.2.9. $R_1 = R_{\mathfrak{B}}$ e $R_2 = R_{\mathfrak{T}}$.

Prova. Mostraremos que $R_1 = R_{\mathfrak{B}}$. Para isto, mostraremos que para cada $k \geq 1$, a função $h \times h$ é descontínua em $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}})$ se, só se, $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}) \notin R_{\mathfrak{B}}$. A demonstração de que $R_2 = R_{\mathfrak{T}}$ é análoga.

Para cada $k \geq 1$, considere a função

$$m_k : X \rightarrow \mathbb{Z}, \quad m_k(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + m(\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})) + \dots + m(\varphi_{\mathfrak{B}}^{k-1}(\mathbf{x})).$$

Já que a função $\varphi_{\mathfrak{B}}$ não possui pontos periódicos, m_k é contínua se, e só se, $\mathbf{x}_{\max}$ não está no conjunto $\{\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{\mathfrak{B}}^{k-1}(\mathbf{x})\}$. Pelo Lema 15.2.8, $h \times h$ é descontínua em $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}))$ se, e só se,

$$\mathbf{x}_{\max} \in \{\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{\mathfrak{B}}^{k-1}(\mathbf{x})\}.$$

Isto significa que existe $1 \leq i \leq k-1$ tal que $\varphi_{\mathfrak{B}}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\max}$. Logo, pela definição da função $\varphi_{\mathfrak{B}}$, temos que existe ℓ tal que $x_j = x_{\max_j}$ para todo $j \geq \ell$. Portanto

$$\mathbf{x} \sim_{R_{\mathfrak{B}}} \varphi_{\mathfrak{B}}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\max}.$$

Como $\varphi_{\mathfrak{B}}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\max}$, temos que $\varphi_{\mathfrak{B}}^{i+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\min}$. Com isso, usando que $k \geq i+1$, obtemos que $(\mathbf{x}_{\min}, \varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x})) \in R_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}))$ não está em $R_{\mathfrak{B}}$. Assim, $h \times h$ é descontínua em $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x}))$ se e somente se $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}^k(\mathbf{x})) \notin R_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $R_1 = R_{\mathfrak{B}}$. ■

Lema 15.2.10. $h \times h(R_1) = R_2$.

Prova. Suponha que $h \times h$ é contínua em algum ponto, de forma que também é contínua em alguma vizinhança U desse ponto. Podemos supor que a vizinhança U é compacta e aberta. Como $h \times h$ é contínua em U , temos que $h \times h(U)$ é conjunto compacto e aberto. Assim, a função

$$h \times h|_U : U \rightarrow h \times h(U)$$

é uma bijeção contínua, de forma que $h \times h(R_1) = R_2$. ■

Pelos Lemas 15.2.9 e 15.2.10, $h \times h$ determina um isomorfismo entre $(X, R_{\mathfrak{B}})$ e $(Y, R_{\mathfrak{T}})$. Pelo Teorema 10.2.2, $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$ são isomorfos. Agora, pelo Lema 12.2.4, $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ é isomorfo a $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ e $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$ é isomorfo a $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}})$. Então, $D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ e $D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}})$ são isomorfos. Concluimos, assim, a demonstração da proposição. ■

Finalizamos, então, a ida do teorema.

Agora, mostraremos a volta. Suponha que existe um isomorfismo ordenado entre $D(X, R_{\varphi})$ e $D(X, R_{\psi})$. Mais uma vez pelo Teorema 7.1.13, identificamos (X, R_{φ}) com $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ e (Y, R_{ψ}) com $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}})$, onde $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ são diagramas de Bratteli ordenados, simples e próprios. Como $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$ são simples, as relações $R_{\mathfrak{B}}$ e $R_{\mathfrak{T}}$ são minimais. Considere que $\mathbf{x}_{\max}$, $\mathbf{x}_{\min}$, $\mathbf{y}_{\max}$ e $\mathbf{y}_{\min}$ são, respectivamente, os únicos caminhos maximais e minimais de $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{T}$. Pelo Lema 12.2.4, temos que

$$D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}}) \cong D(X_{\mathfrak{B}}, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}}) \quad \text{e} \quad D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}}) \cong D(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}}).$$

Pelo Teorema de Bratteli-Elliott-Krieger, existe uma função $h : X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$ que determina um isomorfismo entre $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$. Agora, considere os caminhos $\mathbf{x}^1 = h(\mathbf{x}_{\max})$, $\mathbf{x}^2 = h(\mathbf{x}_{\min})$, $\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}_{\min}$ e $\mathbf{y}^2 = \mathbf{y}_{\min}$. Como a relação $R_{\mathfrak{T}}$ é minimal existe um homeomorfismo $\bar{h} : X_{\mathfrak{T}} \rightarrow X_{\mathfrak{T}}$ satisfazendo as condições do Teorema 15.2.2. Então a função $\bar{h} \circ h$ determina um isomorfismo entre $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$ que leva $\mathbf{x}_{\max}$ em $\mathbf{y}_{\max}$ e $\mathbf{x}_{\min}$ em $\mathbf{y}_{\min}$. Pelo item 3 do Teorema 6.2.1, $\bar{h} \circ h$ é uma equivalência orbital entre $(X, R_{\varphi_{\mathfrak{B}}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\psi_{\mathfrak{T}}})$. Além disso, considere um caminho $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\max}$. Como $\varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max}) = \mathbf{x}_{\min}$, temos que $(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})) \in R_{\mathfrak{B}}$, enquanto $(\mathbf{x}_{\max}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_{\max})) \notin R_{\mathfrak{B}}$. Como $\bar{h} \circ h$ é um isomorfismo entre $(X_{\mathfrak{B}}, R_{\mathfrak{B}})$ e $(X_{\mathfrak{T}}, R_{\mathfrak{T}})$, temos que

$$(\bar{h} \circ h) \times (\bar{h} \circ h)(\mathbf{x}, \varphi_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x})) \in R_{\mathfrak{T}}.$$

Mas,

$$(\bar{h} \circ h) \times (\bar{h} \circ h)(\mathbf{x}_{\max}, \mathbf{x}_{\min}) = (\bar{h} \circ h(\mathbf{x}_{\max}), \bar{h} \circ h(\mathbf{x}_{\min})) = (\mathbf{y}_{\max}, \mathbf{y}_{\min}) \notin R_{\mathfrak{T}}.$$

Portanto, a equivalência orbital $\bar{h} \circ h$ é contínua em todo ponto diferente de $\mathbf{x}_{\max}$. Pelo Teorema 15.1.4, m é contínua em todo ponto distinto de $\mathbf{x}_{\max}$. Analogamente, mostramos que n é contínua em todo ponto diferente de $\mathbf{y}_{\max}$. Concluimos, então, que $\bar{h} \circ h$ é uma equivalência orbital forte. ■

Sejam X e Y espaços métricos e $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ homeomorfismos. Observamos que toda conjugação topológica entre (X, φ) e (Y, ψ) é, também, uma equivalência orbital. Provamos que se X e Y são espaços métricos compactos e conexos e os homeomorfismos φ e ψ não possuem pontos periódicos, então existe uma equivalência orbital entre (X, φ) e (Y, ψ) se, e só se, (X, φ) é topologicamente conjugado a (Y, ψ) ou a (Y, ψ^{-1}) .

Para o caso em que X e Y são conjuntos de Cantor e os homeomorfismos φ e ψ são minimais provamos que (X, φ) é topologicamente conjugado com (Y, ψ) ou com (Y, ψ^{-1}) se, e só se, existe uma equivalência orbital entre (X, φ) e (Y, ψ) com cociclos contínuos.

Pode surgir a pergunta: há algum caso em que uma equivalência orbital não é uma conjugação? A resposta é sim. Apresentaremos um exemplo em que isto ocorre neste capítulo.

16.1

Equivalência orbital versus conjugação

Conceitos de teoria ergódica necessários podem ser encontrados em [7]. Aqui, apresentamos as definições mais importantes para o nosso objetivo.

Definição 16.1.1. *Um sistema (X, T) é dito unicamente ergódico se existe uma única medida μ invariante de probabilidade.*

Os odômetros são exemplos de sistemas unicamente ergódicos.

No caso do espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ os conjuntos mensuráveis são os cilindros. Dado $[\mathbf{x}]_k$ um cilindro de tamanho k em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, definimos a medida

$$\mu([\mathbf{x}]_k) = \frac{1}{2^k}.$$

A medida μ é a única medida invariante de probabilidade para o odômetro diádico.

Um homeomorfismo $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ que preserva orientação com número de rotação irracional, sem pontos periódicos e que não é topologicamente conjugado com alguma rotação irracional é chamado de homeomorfismo de Denjoy. Um sistema de Denjoy é um homeomorfismo de Denjoy restrito ao

seu único conjunto de Cantor invariante. Mais sobre estes sistemas pode ser encontrado em [5].

Em [4] pode ser encontrada a demonstração do seguinte resultado:

Proposição 16.1.2. *Se (X, φ) é um sistema de Cantor unicamente ergódico, então existe uma equivalência orbital entre (X, φ) e um sistema dinâmico formado por um odômetro ou entre (X, φ) e um sistema de Denjoy.*

Definição 16.1.3. *Sejam $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de probabilidade e T uma transformação que preserva medida. T é fracamente misturadora se para todo par de conjuntos mensuráveis A e B , existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\mu(T^{-n}(A) \cap A) > 0 \quad e \quad \mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0.$$

O odômetro não são fracamente misturadores. Veremos para o odômetro diádico Φ . Considere os conjuntos $[0]$ e $[1]$, temos que $\Phi([0]) = [1]$ e $\Phi([1]) = [0]$ e que $[0] \cap [1] = \emptyset$. Então, pra todo $n \in \mathbb{Z}$ um dos conjuntos $\Phi^{-n}([0]) \cap [0]$, $\Phi^{-n}([0]) \cap [1]$ é vazio e, portanto, possui medida nula.

Um exemplo de transformação fracamente misturada é a transformação de Chacón que foi criada por R.V. Chacón em 1969 [3]. Em [1] pode ser encontrada uma construção da transformação de Chacón. Aqui apresentaremos a primeira etapa da construção.

Primeiro, dividimos o intervalo $[0, 1]$ nos intervalos disjuntos $[0, \frac{2}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Dividimos o intervalo $[0, \frac{2}{3}]$ em três partes iguais e dividimos o intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ nos intervalos $[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$ e $[\frac{8}{9}, 1]$. Este primeiro passo está ilustrado na Figura 16.1.

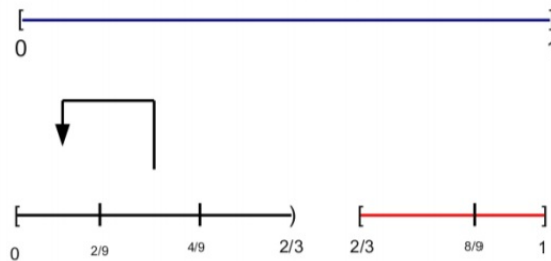


Figura 16.1: Primeiro passo da primeira etapa da Construção da transformação de Chacón.[1]

Agora, faremos uma torre com os intervalos destacados como na Figura 16.2.

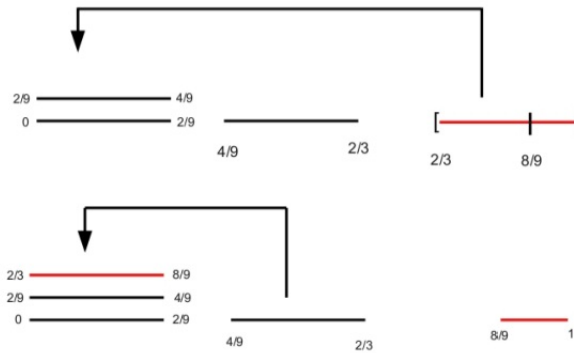


Figura 16.2: Segundo passo da primeira etapa da construção da transformação de Chacón.[1]

Ao final da primeira etapa temos uma torre de intervalos com quatro níveis e um intervalo separado. Na primeira etapa, definimos uma função que leva o primeiro andar torre para o andar seguinte e assim por diante, como ilustrado na Figura 16.3.



Figura 16.3: Fim da primeira etapa da construção da transformação de Chacón.[1]

A transformação de Chacón é um sistema de Cantor unicamente ergódico (veja [1]) e, portanto, existe uma equivalência orbital entre ela e um odômetro ou a um sistema de Denjoy. Neste caso, a equivalência orbital será com um odômetro, especificamente o odômetro definido em $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Como, o odômetro não é fracamente misturador e a transformação de Chacón é, não existe uma conjugação entre a transformação de Chacón e o odômetro.

Referências bibliográficas

- [1] AGYEMAN-PREMPEH, C.. **Cutting and stacking in ergodic theory**. Master's thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 2010.
- [2] BOYLE, M.; TOMIYAMA, J.. **Bounded topological orbit equivalence and c^* -algebras**. Journal of the Mathematical Society of Japan, 50(2):317–329, 1998.
- [3] CHACON, R. V.. **Weakly mixing transformations which are not strongly mixing**. Proceedings of the American Mathematical Society, 22(3):559–562, 1969.
- [4] GIORDANO, T.; PUTNAM, I. F. ; SKAU, C. F.. **Topological orbit equivalence and c^* -crossed products**. J. Reine Angew. Math., 469:51–111, 1995.
- [5] HASSELBLATT, B.; KATOK, A.. **Recurrence and equidistribution on the circle**. In: A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments, chapter 4, p. 96–142. Cambridge University Press, 2014.
- [6] PUTNAM, I. F.. **Cantor minimal systems**, volumen 70 de **University Lecture Notes**. American Mathematical Soc., 2018.
- [7] SILVA, C. E.. **Mixing notions**. In: Invitation to Ergodic Theory, volumen 42 de **Student Mathematical Library**, chapter 6, p. 201–234. American Mathematical Soc., 2008.